PROBLEMAS SELECIONADOS DE DESENHO GEOMÉTRICO
Parte III: Cônicas e Outras Curvas

Sergio Lima Netto

sergioℓn@ℓps.ufrj.br

versão 3b
dezembro de 2008

Foi feito um grande esforço para reproduzir os desenhos que acompanham as questões da forma mais fiel possível, tanto para efeito de registro quanto para se determinar a resposta na escala desejada. Tenho que confessar que em alguns casos foi necessário um pequeno ajuste (em geral, não mais do que 1% da escala) para gerar o resultado desejado.

Em relação às provas do ITA, minhas fontes incluem cópias das provas (79–88), na escala original, distribuídas pelo Colégio Princesa Isabel, gentilmente fornecidas pelo amigo Alessandro J. S. Dutra; cópias dos gabaritos (de 79, 80, 82–88, 93) fora da escala, disponibilizados pelo Curso Etapa através do site www.rumoaoita.com; originais das provas de 83 e 84.

Em relação às provas do IME, minha principal fonte das questões mais antigas foi uma pesquisa nos arquivos da própria instituição, no que fui auxiliado pelo Sub-Tenente Petrenko e sua equipe, a quem devo muitos agradecimentos.

Como nas Parte I e II, procurei acompanhar cada solução de uma breve análise do problema e de uma figura adequada, onde usei a seguinte legenda de cores:

- preto: dados do problema;
- verde: contruções auxiliares básicas;
- vermelho: elemento-chave para minha solução;
- azul: elemento desejado pelo problema.
- cinza: curva auxiliar.

Como antes, a notação $\mathcal{C}(O, r)$ indica um círculo de centro O e raio r.

Esta terceira versão contém as soluções das questões de Desenho Geométrico do ITA e do IME no tema de "Cônicas e Outras Curvas". Em particular, esta versão "b", inclui uma solução me passada pelo Prof. Luís Lopes. Infelizmente, este volume contém algumas questões problemáticas. Em particular: **ITA 1979, questão 13**; **ITA 1980, questão 20**; **ITA 1981, questão 18**; **ITA 1982, questão 19**; **ITA 1985, questão 18** e **ITA 1988, questão 3**.

Boa parte das soluções neste volume é baseada no estudo da apostila [1] do saudoso Prof. Brandão do antigo Colégio Impacto. Gostaria de citar também a excelente apostila [2] enviado por Marcílio U. Nagayama, que me fez lembrar a razão básica de organizar este material.

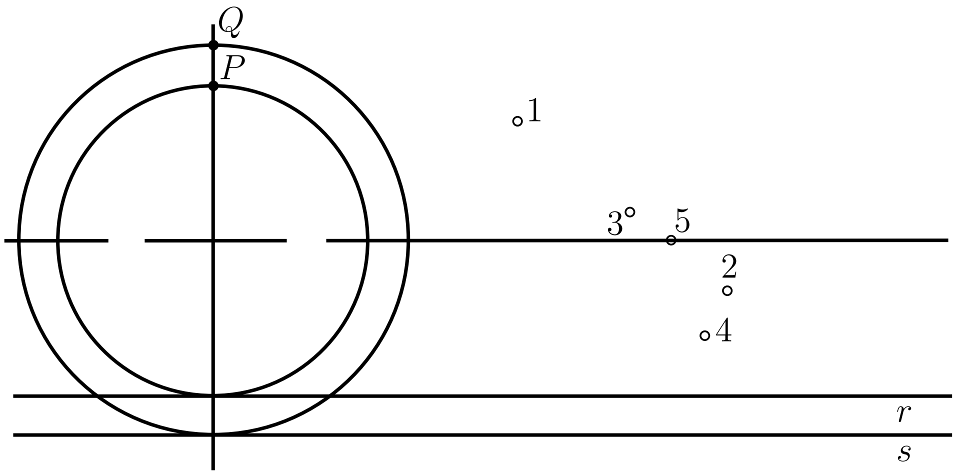
Rio, Dezembro de 2008

Sergio L. Netto
sergioℓn@ℓps.ufrj.br

1 Questões do ITA

ITA 1979, Questão 12: São dadas duas circunferências, uma com raio igual a 20 mm e outra com 25 mm, dois pontos P e Q e duas retas r e s, conforme a figura a seguir. As circunferências desenvolvem meia volta sobre as retas, sem escorregar, no sentido horário, partindo dos pontos P e Q, descrevendo duas curvas cíclicas, sendo uma encurtada e outra alongada. Pede-se determinar o ponto de interseção das duas curvas.

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 1 (E) 3



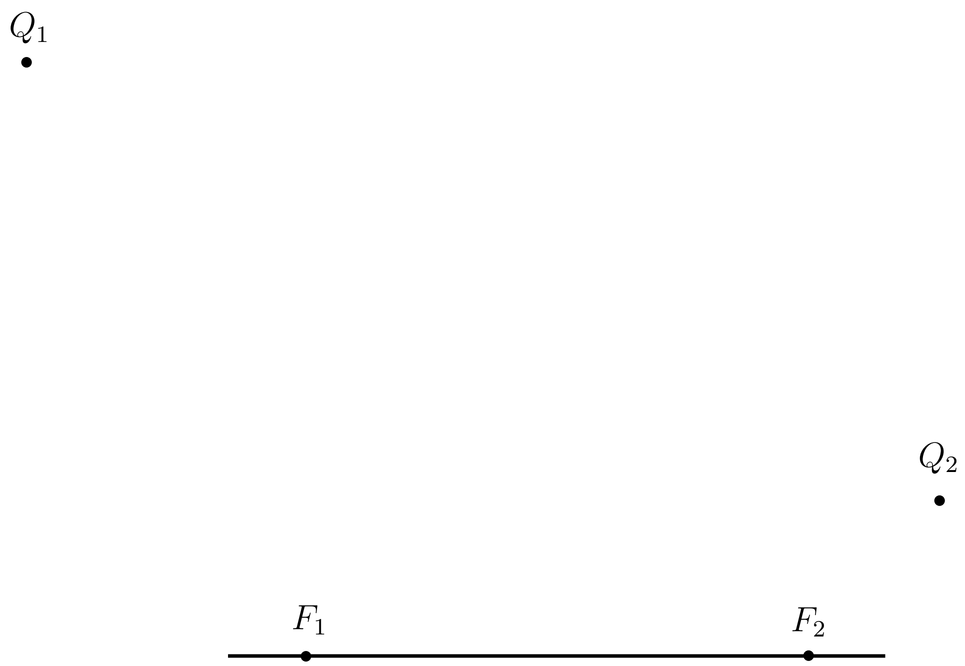
ITA 1979, Questão 12.

ITA 1979, Questão 13: Dados o eixo maior AB de uma elipse, os focos F_1 e F_2, bem como dois pontos Q_1 e Q_2, conforme a figura a seguir, pertencentes ao círculo diretor, determinar o ângulo formado por duas retas tangentes à elipse.

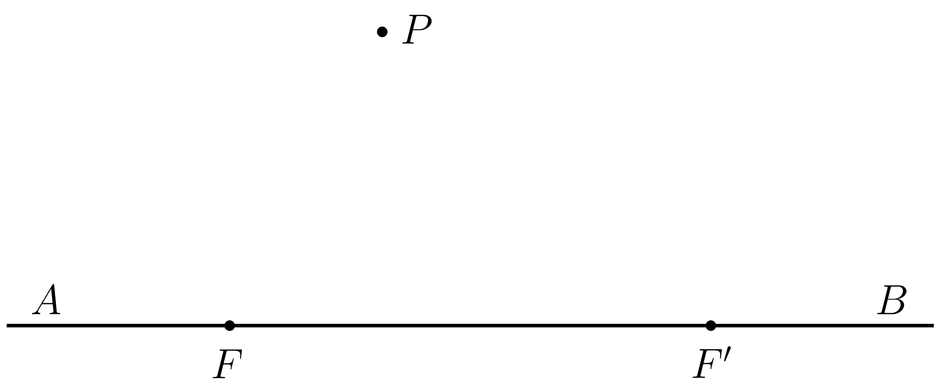
(A) 75° (B) 90° (C) 80° (D) 85° (E) 70°

ITA 1980, Questão 20: Dado o eixo AB de uma hipérbole regular, os focos F e F', bem como um ponto P, como mostra a figura, determinar, aproximadamente, o menor ângulo formado pelas retas que serão tangentes aos ramos da hipérbole e que contêm o ponto P.

(A) 48° (B) 53° (C) 58° (D) 60° (E) 63°



ITA 1979, Questão 13.



ITA 1980, Questão 20.

ITA 1981, Questão 17: Determinar graficamente o avanço de um parafuso, por volta, conhecendo-se:

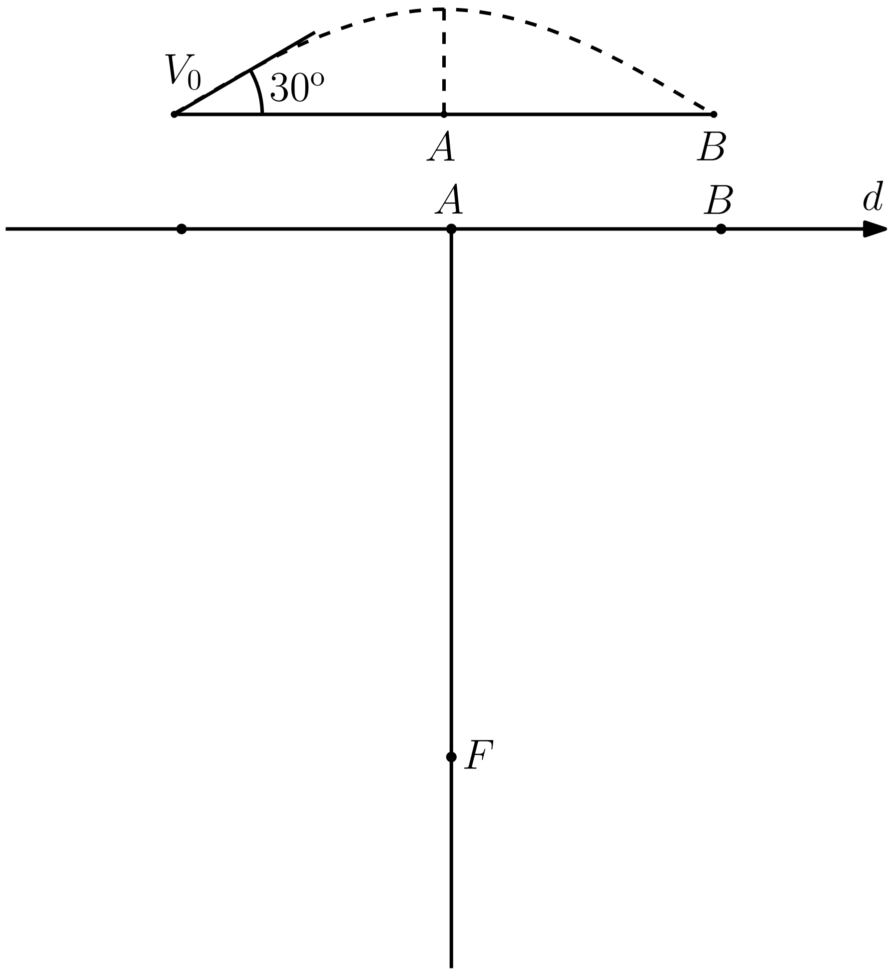
- Ângulo da hélice da rosca igual a 18^o.
- Diâmetro nominal do parafuso igual a 35 mm.

(A) 40 mm (B) 48 mm (C) 45 mm (D) 36 mm (E) 30 mm

ITA 1981, Questão 18: Um projétil é lançado com uma velocidade inicial V_0 formando um ângulo de 30º com a horizontal, descrevendo um movimento parabólico. Determinar graficamente (valor aproximado) a altura máxima atingida pelo projétil, sendo dados:

- AB: 6800 metros (metade do alcance do projétil).
- F: foco da parábola.
- d: diretriz da parábola.
- Escala: 1 cm = 2000 metros.

(A) 1150 metros (B) 2000 metros (C) 2500 metros
(D) 2750 metros (E) 3000 metros



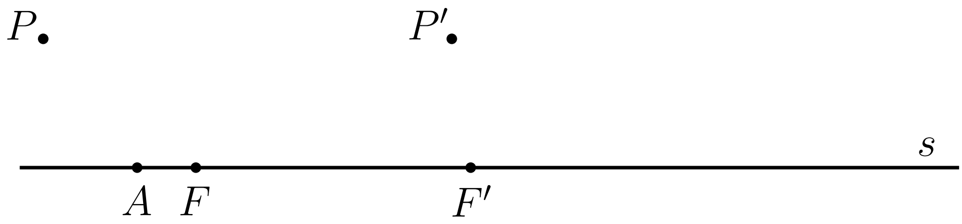
ITA 1981, Questão 18.

ITA 1982, Questão 19: São dados do problema:

- O ponto P' pertence a uma elipse.
- O ponto F é, simultaneamente, foco desta elipse e de uma parábola.
- A reta s é suporte do eixo da elipse e do eixo da parábola.
- O ponto F' é o outro foco da elipse.
- O ponto A é o vértice da parábola.

Pede-se o menor ângulo formado pela tangente à parábola, passando pelo ponto P, e a tangente à elipse, passando pelo ponto P'.

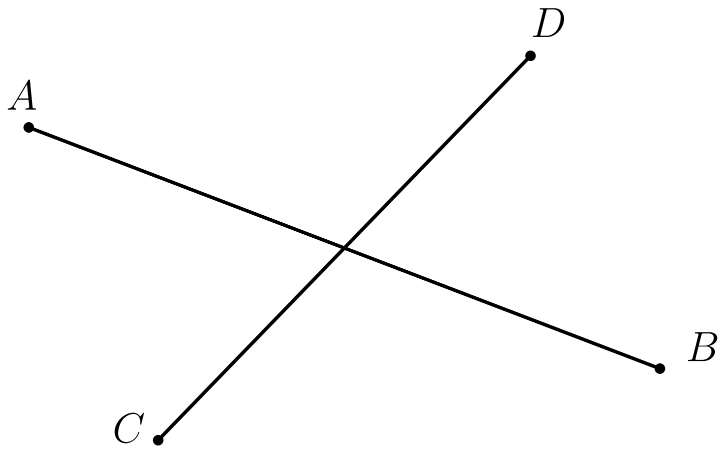
(A) 50º (B) 58º (C) 27º (D) 48º (E) 13º



ITA 1982, Questão 19.

ITA 1984, Questão 20: As retas AB e CD são diâmetros conjugados de uma elipse. Determinar o valor de seus diâmetros maior e menor.

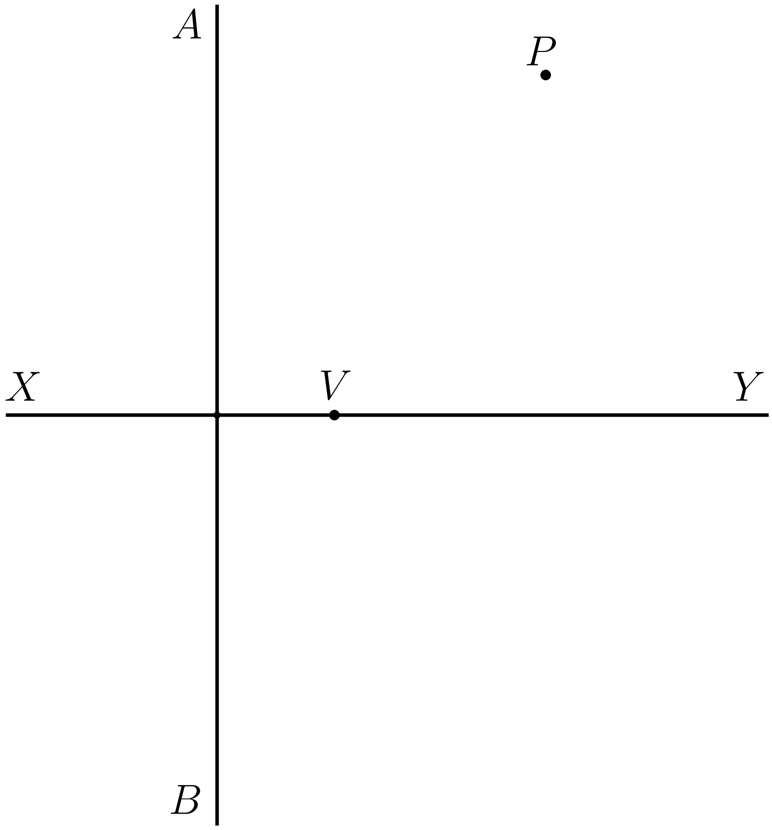
(A) 85 mm e 62 mm (B) 90 mm e 55 mm (C) 96 mm e 57 mm
(D) 100 mm e 68 mm (E) 88 mm e 64 mm



ITA 1984, Questão 20.

ITA 1985, Questão 18: De uma parábola são conhecidos: o eixo XY, a diretriz AB, o vértice V e um ponto P de tangência. Encontrar a soma dos comprimentos das medianas do triângulo definido pelo ponto P, pelo foco F e um ponto Q determinado pela interseção da reta tangente à parábola no ponto P com o eixo XY.

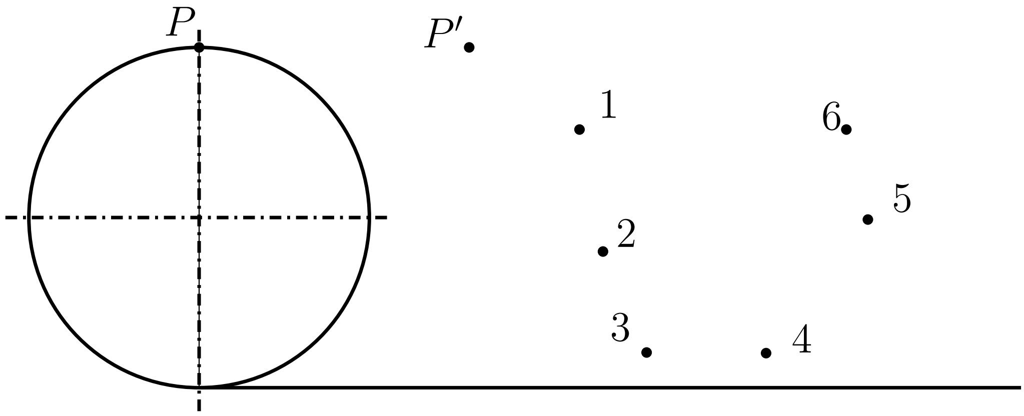
(A) 130 mm (B) 105 mm (C) 145 mm (D) 140 mm (E) 110 mm



ITA 1985, Questão 18.

ITA 1985, Questão 20: Uma hélice de 60 mm de passo é traçada sobre uma superfície cilíndrica de diâmetro D. Na representação gráfica de seu desenvolvimento, iniciado no ponto P, qual o par de pontos assinalados pertence à curva?

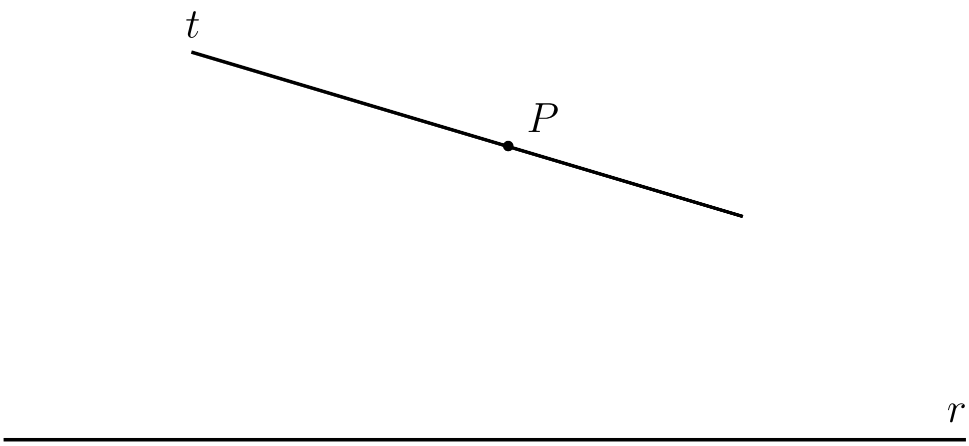
(A) 1 - 2 (B) 3 - 4 (C) 5 - 3 (D) 6 - 3 (E) 2 - 4



ITA 1985, Questão 20.

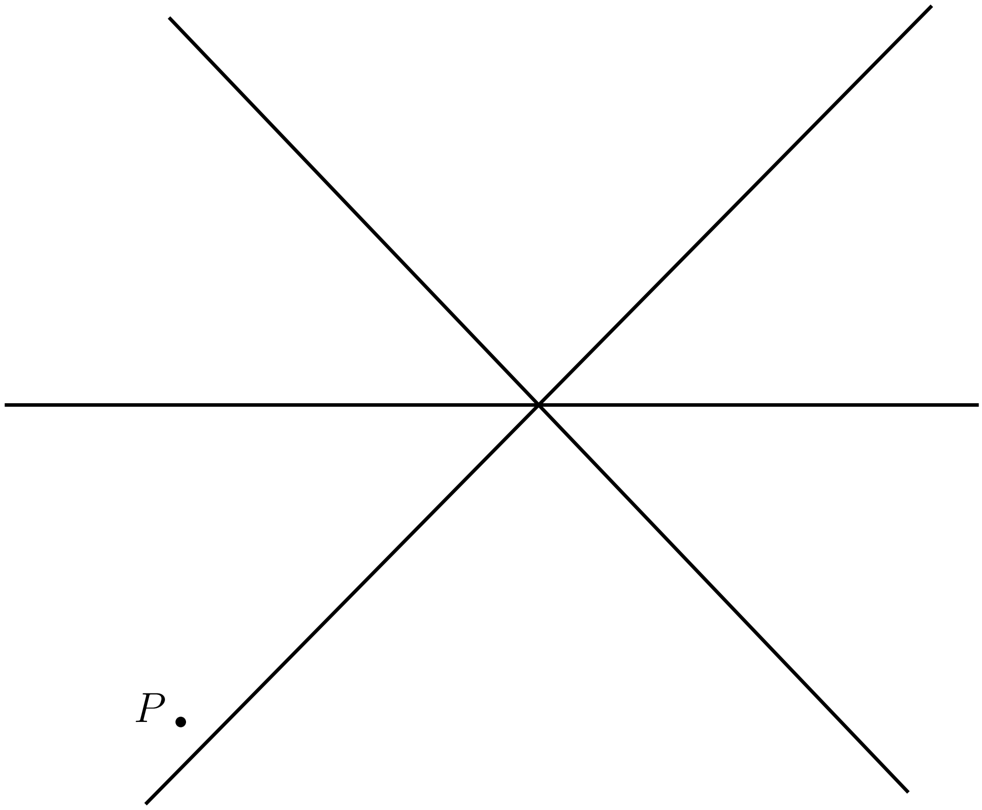
ITA 1986, Questão 17: Conhecendo-se: t, reta tangente a uma cíclica; P, ponto de tangência; r, diretriz da cíclica. Pede-se: O raio da circunferência geradora, assim como a construção de um ciclo dessa curva, passando por P.

(A) 20 mm (B) 27 mm (C) 16 mm (D) 24 mm (E) 30 mm



ITA 1986, Questão 17.

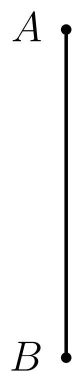
ITA 1986, Questão 20: Determinar a distância focal da hipérbole, conhecendo-se: As assíntotas e o ponto P pertencente à curva.
(A) 60 mm (B) 80 mm (C) 75 mm (D) 65 mm (E) 70 mm



ITA 1986, Questão 20.

ITA 1987, Questão 3: Dado o passo AB construir a espiral de Arquimedes, usando 8 pontos. Pelo 5º ponto, traçar uma tangente a essa espiral. A normal a essa tangente mede:

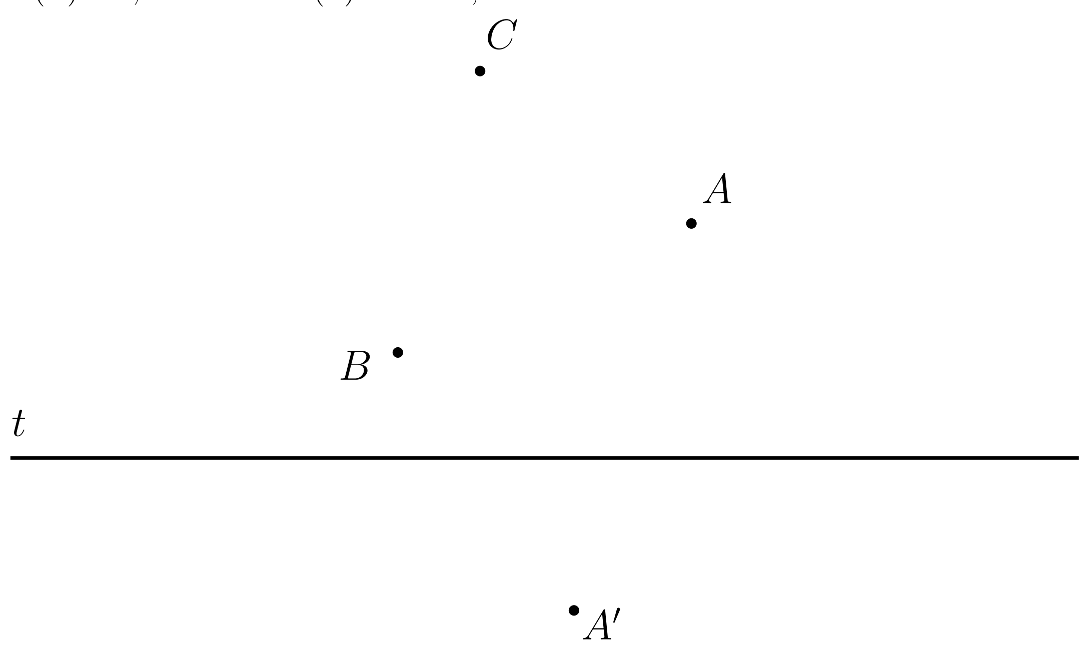
(A) 20 (B) 23 (C) 30 (D) 26 (E) 19



ITA 1987, Questão 3.

ITA 1988, Questão 3: Seja t um eixo de afinidade; A, B e C pontos que pertencem a uma circunferência e A' o ponto afim de A. Quanto medem, aproximadamente, os eixos maior e menor da elipse afim da circunferência que contém A, B e C?

(A) 100 e 65 mm (B) 120 e 72,5 mm (C) 130 e 80 mm
(D) 135,5 e 85 mm (E) 140 e 90,5 mm



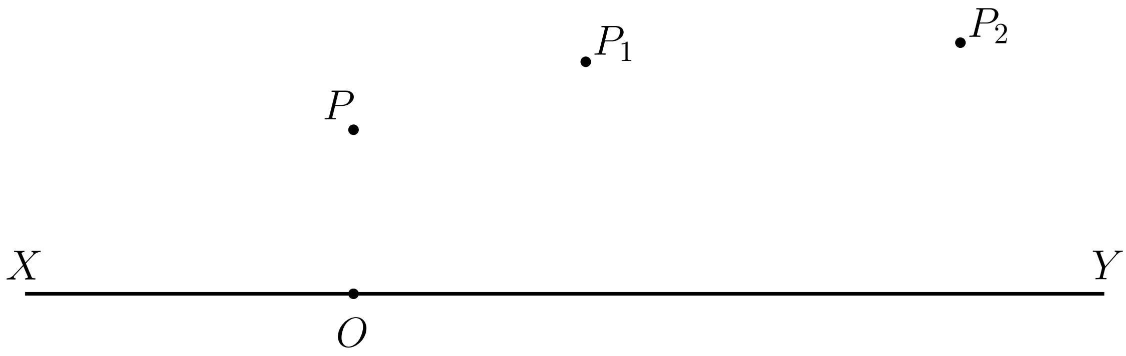
ITA 1988, Questão 3.

ITA 1988, Questão 6: Construa uma hipociclóide encurtada de tal forma que a cíclica seja uma elipse, sabendo-se que os pares de números dados correspondem respectivamente ao raio do círculo diretor e do círculo gerador da curva. Qual é o par de valores correto?

(A) 40 e 20 mm (B) 45 e 15 mm (C) 50 e 20 mm
(D) 40 e 16 mm (E) 60 e 20 mm

ITA 1988, Questão 7: P, P_1 e P_2 são pontos que pertencem a uma espiral hiperbólica de eixo polar XY e pólo O. Trace a assíntota da espiral e, pelo ponto P, uma reta tangente à curva. Pergunta: Qual é, aproximadamente, a medida do maior ângulo formado pela interseção da assíntota com a tangente?

(A) 140° (B) 148° (C) 157° (D) 165° (E) 176°

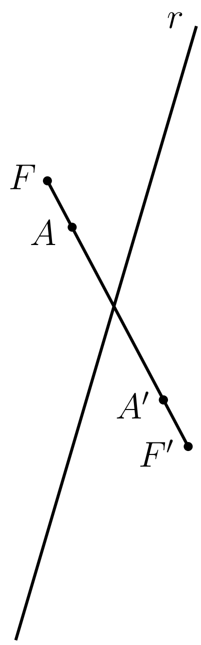


ITA 1988, Questão 7.

ITA 1993, Questão 21: Determinar, sem traçar a curva, os pontos P e Q, comuns a uma reta dada r e a uma hipérbole dada por seus focos F e F' e o eixo transverso $\overline{AA'}$. Sobre $\overline{PQ}$, encontre um ponto M de tal forma que $\overline{PM}^2 = \overline{PQ}.\overline{MQ}$. Pergunta: Quanto mede aproximadamente o segmento $\overline{MQ}$?

(A) 16 mm (B) 33 mm (C) 41 mm (D) 25 mm (E) 9 mm

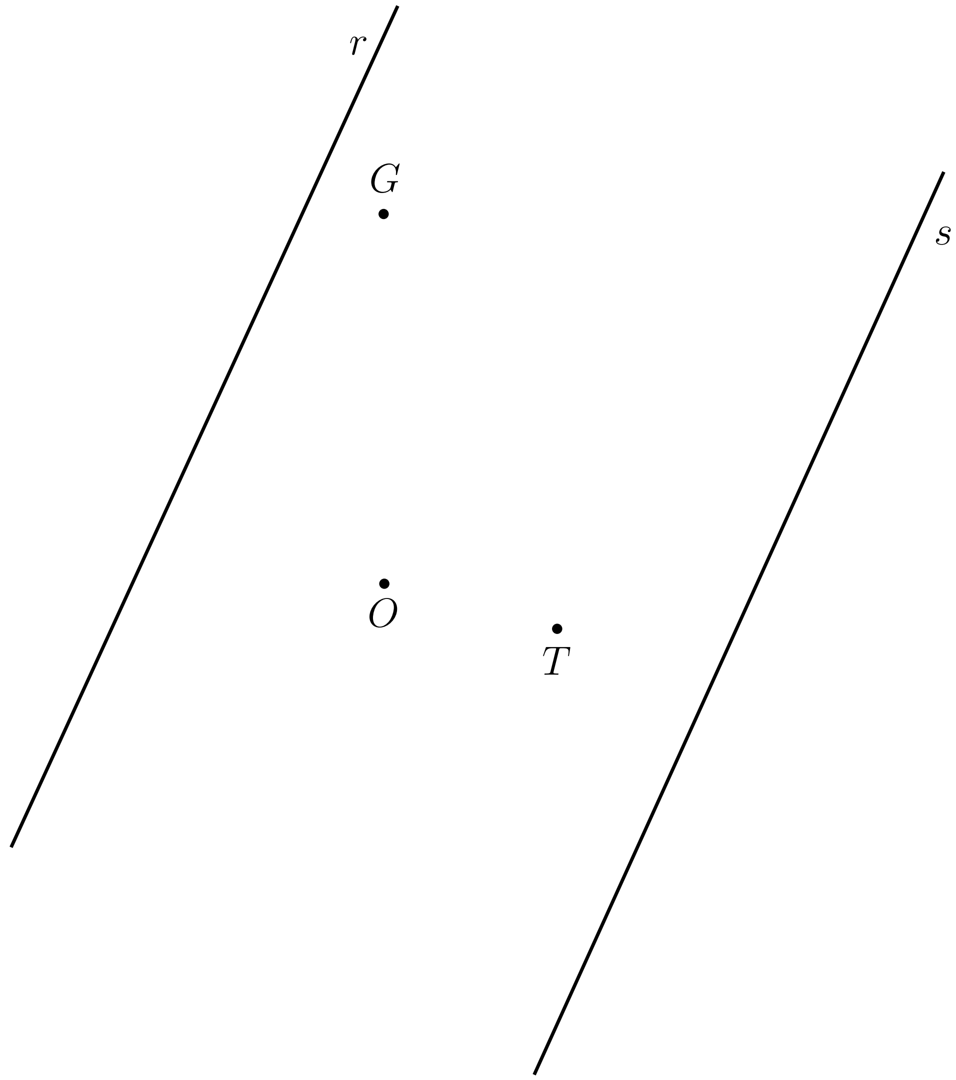
Obs: O ponto P está situado à direita de $\overline{FF'}$.



ITA 1993, Questão 21.

ITA 1993, Questão 25: De um tricúspide são dados: o centro O da circunferência diretora, o ponto gerador G e um ponto T da curva. Pede-se traçar por T uma reta tangente à curva. Pergunta: Quanto mede a menor distância entre dois pontos P e P', equidistantes das retas dadas r e s e que vêem a porção da tangente em T, compreendida entre r e s, sob ângulos de 75°?

(A) 132 mm (B) 119 mm (C) 88 mm (D) 91 mm (E) 105 mm



ITA 1993, Questão 25.

2 Questões do IME

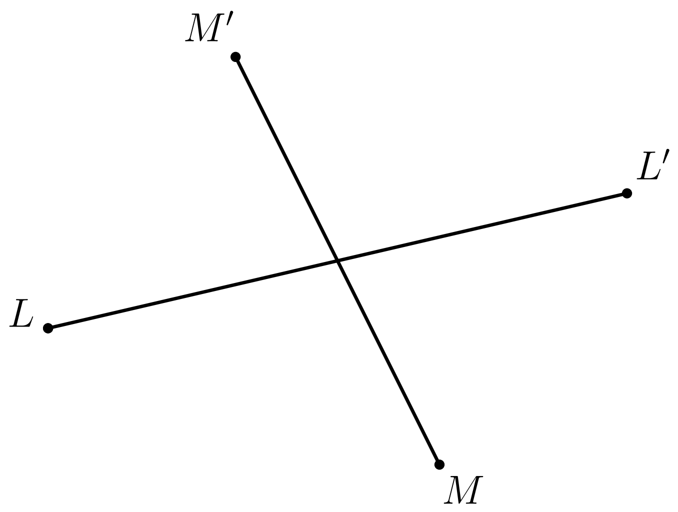
IME 1964/1965, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: Um jato d' água, sob pressão constante, descreve uma parábola no espaço. A interseção desta parábola com o plano horizontal se dá num ponto P, 8 cm à direita do seu eixo, que é vertical. Construir a parábola, sabendo que a tangente à curva, tirada no ponto P, faz um ângulo de 45° com o plano horizontal. (Determinar o vértice e mais 6 pontos da curva).

IME 1965/1966, Questão 1, Item (b): Traçar uma falsa espiral de 5 centros, dispostos estes segundo uma circunferência de 4 cm de diâmetro. A espiral deverá ser traçada até o prolongamento do primeiro raio.

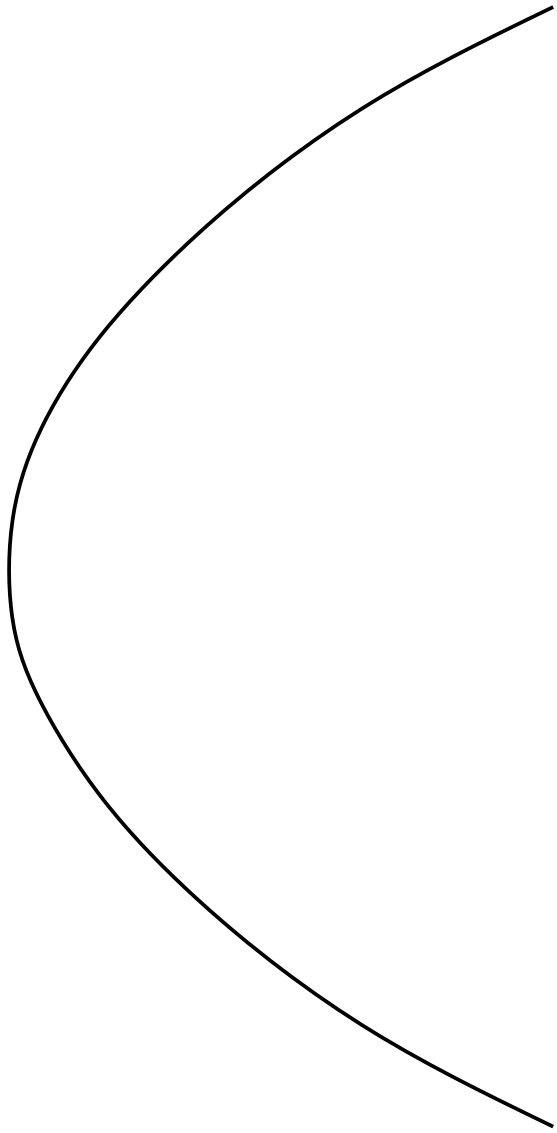
IME 1965/1966, Questão 1, Item (e): Restabelecer o eixo, o vértice, o foco e a diretriz da parábola dada.
sln: Ver figura na próxima página.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (f): Dado um triângulo equilátero ABC de 8 cm de lado, concordar os lados AB e AC com um arco de elipse. Tomar um dos focos da elipse sobre o lado BC.

IME 1965/1966, Questão 2, Item (b): São dados dois diâmetros conjugados LL' e MM' de uma elipse que tangencia os 2 ramos de uma hipérbole, sendo L um dos pontos de tangência. Sabendo-se que o eixo maior da elipse é perpendicular ao eixo não transverso da hipérbole e que os raios vetores desta última fazem em L um ângulo de 50°, traçar as duas curvas.

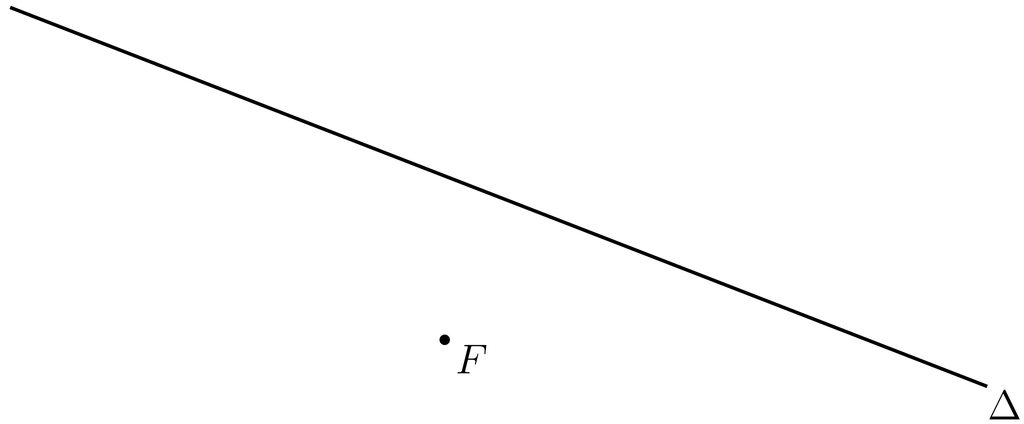


IME 1965/1966, Questão 2, Item (b).



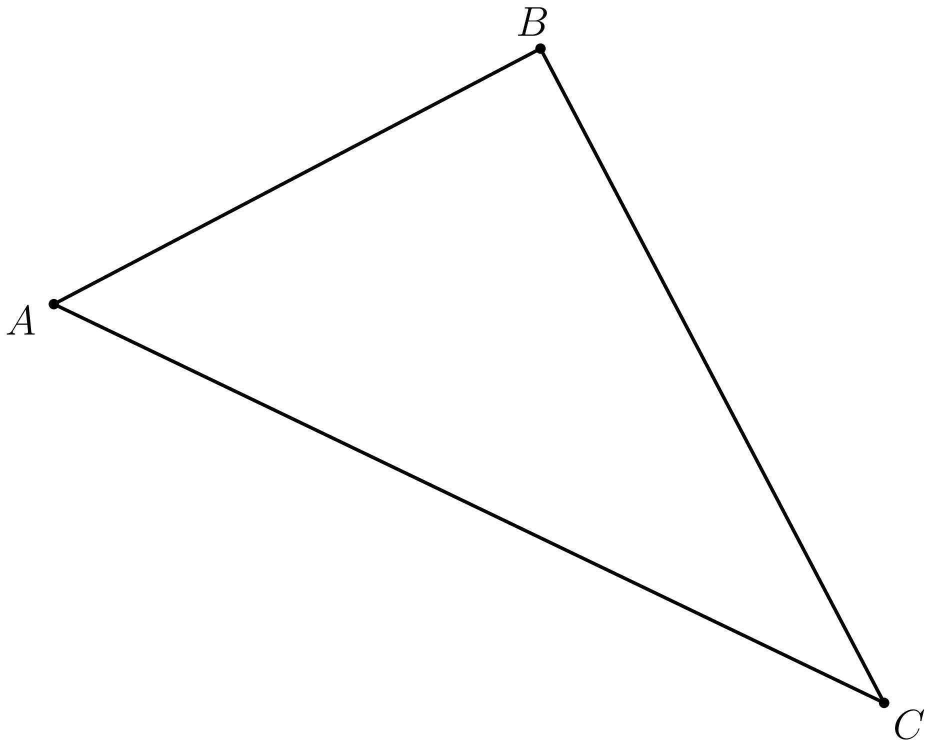
IME 1965/1966, Questão 1, Item (e).

IME 1966/1967, Questão 2 [valor 3,0]: A reta Δ e o ponto F são respectivamente uma tangente e o foco direito de uma elipse com 80 mm de distância focal e 0,8 de excentricidade. Pedem-se: (a) Determinar os vértices, o outro foco e o centro da elipse; (b) Traçar o suporte Δ_1 do diâmetro conjugado da direção Δ; (c) Traçar a circunferência do círculo equivalente à elipse e que a tangencie na extremidade superior da corda focal mínima relativa ao foco direito.



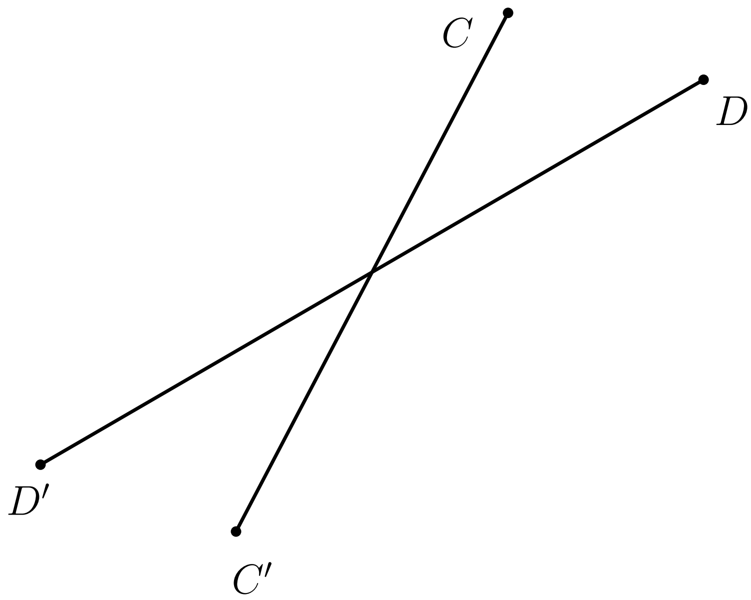
IME 1966/1967, Questão 2.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 5 [valor 1,0]: O triângulo ABC, retângulo em B, é formado por três tangentes a uma parábola. O foco da parábola é um ponto da bissetriz interna do ângulo A. Pede-se determinar 5 pontos de passagem da parábola.



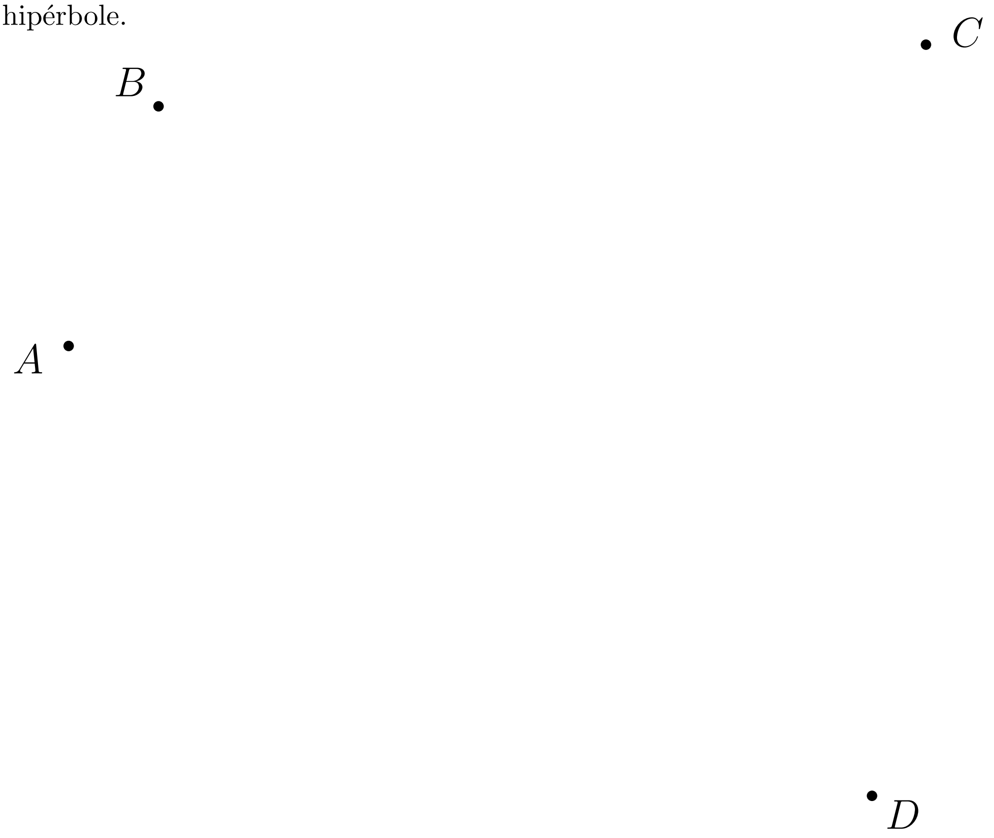
IME 1967/1968, Questão 1, Item 5.

IME 1968/1969, Questão 1, Item 4 [valor 0,5]: Determinar a direção e tamanho dos eixos de uma hipérbole de diâmetros conjugados CC' e DD'.



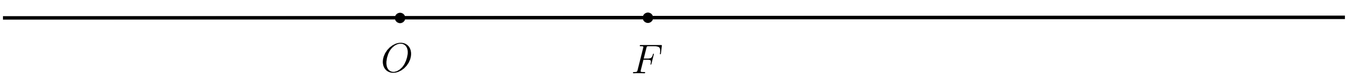
IME 1968/1969, Questão 1, Item 4.

IME 1969/1970, Questão 1, Item 1 [valor 1,5]: O quadrilátero $ABCD$ inscritível tem os vértices A e B num dos ramos de uma hipérbole equilátera e os vértices C e D no outro ramo da hipérbole. Ache as assíntotas e focos da hipérbole.



IME 1969/1970, Questão 1, Item 1.

IME 1971/1972, Questão 8 [valor 1,0]: Dão-se o centro O e o foco F de uma elipse. Sabe-se que de um ponto P distante 6,5 cm do ponto O podem ser traçadas duas tangentes à elipse, perpendiculares entre si. Pedem-se: (a) Determinar, graficamente, com os dados acima, os vértices da elipse; (b) Construir uma tangente à elipse inclinada de 45º com seus eixos; (c) Achar o ponto de contato M desta mesma tangente.

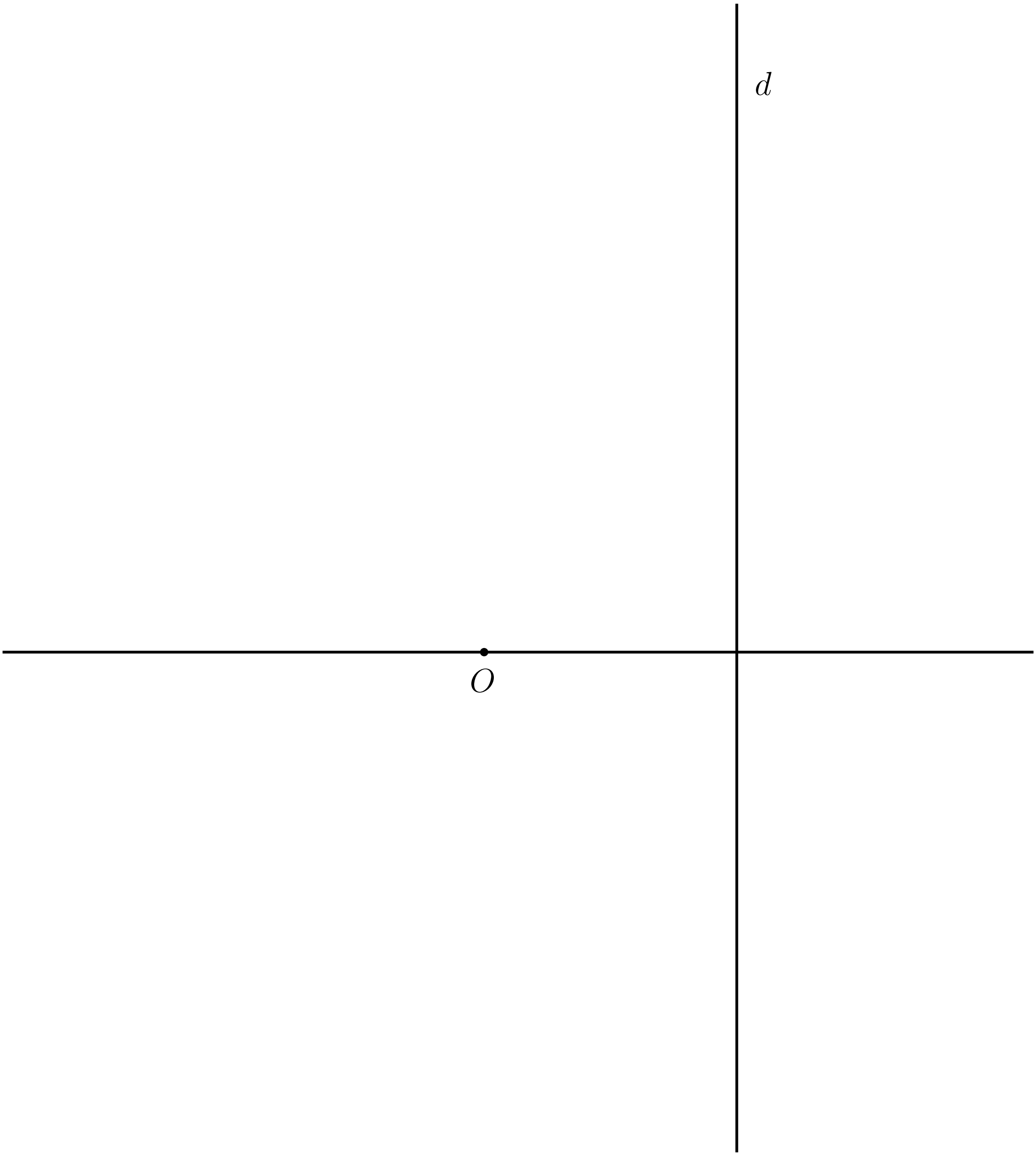


IME 1971/1972, Questão 8.

IME 1971/1972, Questão 9 [valor 1,0]: Em uma espiral hiperbólica são dados: (i) O ponto assintótico O; (ii) A direção assintótica orientada OX no sentido do ramo infinito da espiral; (iii) A distância de O ao ponto P, sendo P o ponto mais afastado da espiral sobre a perpendicular à assíntota: $OP = 4$ cm. Pedem-se: (a) Construir os pontos M_1, M_2 e M_3 da curva, mais afastados de O e tais que $M_1\hat{O}X = \pi$, $M_2\hat{O}X = \frac{\pi}{4}$, $M_3\hat{O}X = \frac{\pi}{8}$. (b) Construir a assíntota da espiral; (c) Construir a tangente no ponto M_1.

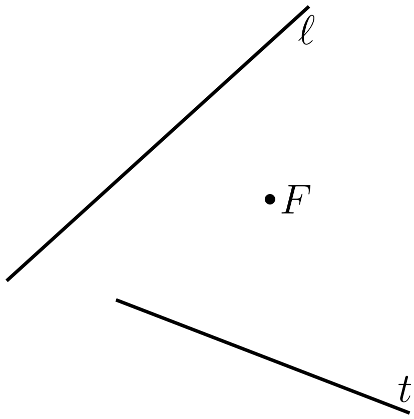
IME 1971/1972, Questão 9.

IME 1971/1972, Questão 10 [valor 1,0]: Uma hipérbole equilátera H tem a diretriz distante 4 cm do seu centro O. (a) Determinar graficamente, com os dados acima, os focos e as extremidades dos eixos de H. (b) Sabendo-se que: (i) Uma diretriz da hipérbole H e seu foco são a diretriz e o foco de uma parábola P_1; (ii) A mesma diretriz, acima citada, da hipérbole H e um vértice do seu eixo não transverso, são a diretriz e o foco de uma parábola P_2. Pede-se construir as tangentes comuns às parábolas P_1 e P_2.



IME 1971/1972, Questão 10.

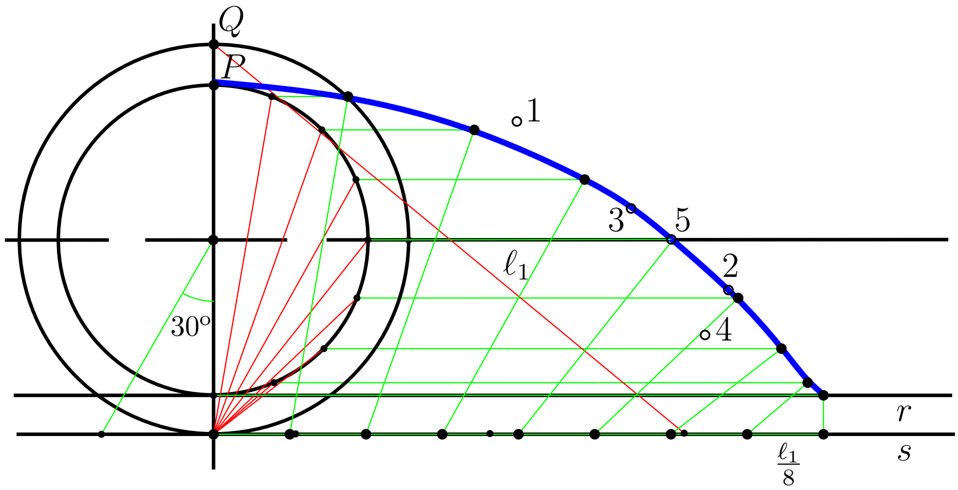
IME 1983/1984, Questão 7, Item B: Em uma hipérbole (h) são dados: um foco F, uma assíntota (ℓ) e uma tangente (t). Pede-se determinar graficamente o outro foco, a outra assíntota e os comprimentos dos eixos, justificando a construção executada.



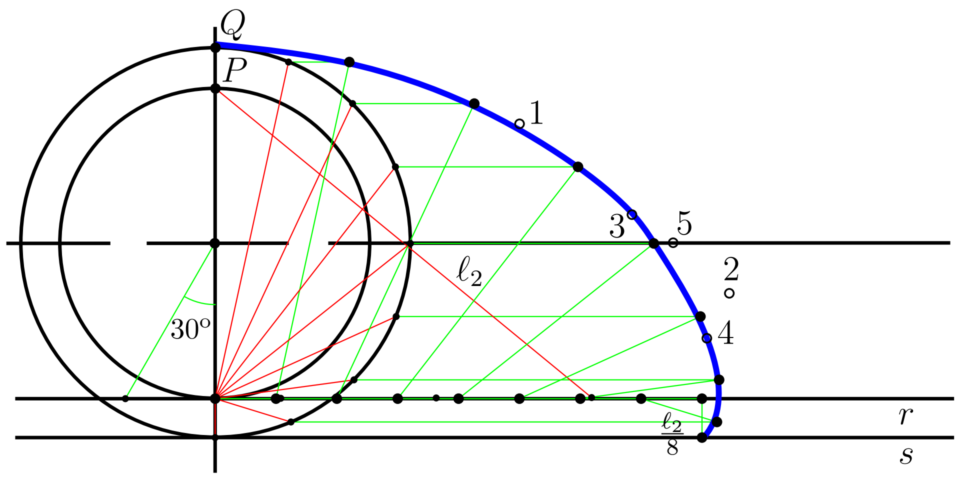
IME 1983/1984, Questão 7, Item B.

3 Soluções do ITA

ITA 1979, Questão 12: São dadas duas circunferências, uma com raio igual a 20 mm e outra com 25 mm, dois pontos P e Q e duas retas r e s, conforme a figura a seguir. As circunferências desenvolvem meia volta sobre as retas, sem escorregar, no sentido horário, partindo dos pontos P e Q, descrevendo duas curvas cíclicas, sendo uma encurtada e outra alongada. Pede-se determinar o ponto de interseção das duas curvas.

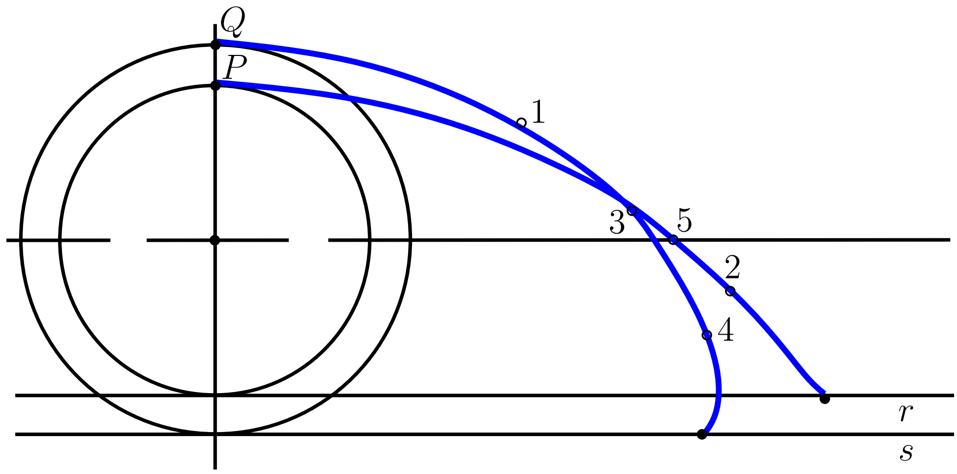


ITA 1979, Questão 12: Cíclica encurtada.



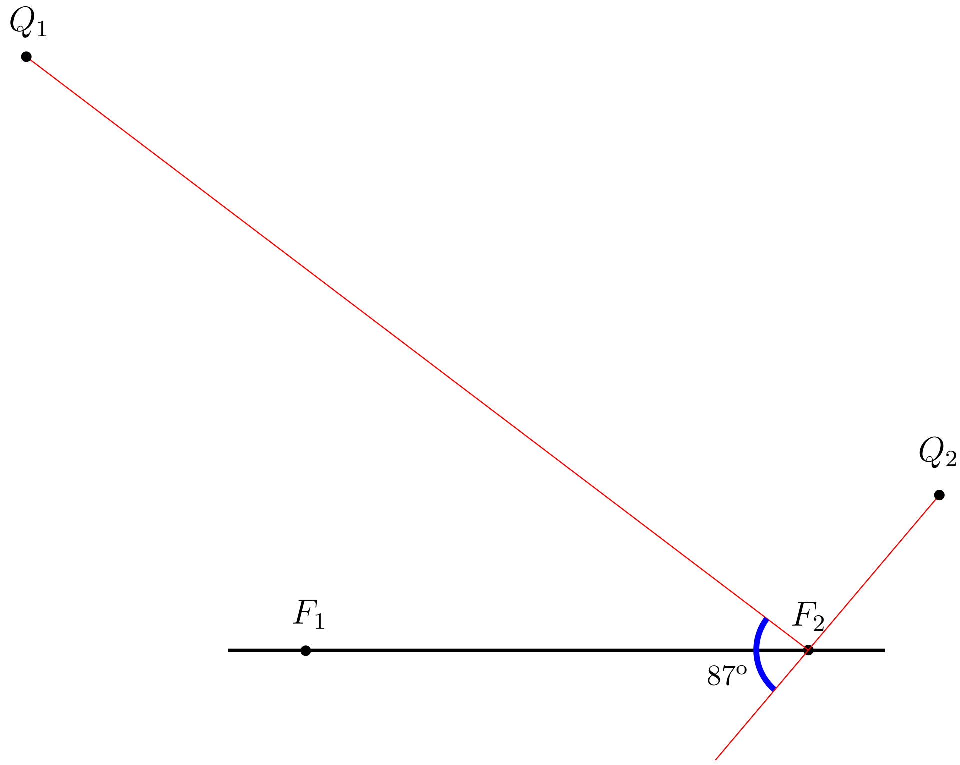
ITA 1979, Questão 12: Cíclica alongada.

Construção: Sejam C_1 e C_2 as circunferências de raios 20 e 25 mm, respectivamente. **Cíclica encurtada:** (i) Retifique meia C_2 (ver [3], Cap. 4) e divida esta distância ℓ_1 em 8 partes iguais; (ii) Divida C_1 em 8 partes e una o ponto de apoio de C_2 com cada parte de C_1; (iii) Por cada divisão obtida no passo (i), trace uma paralela à reta correspondente do passo (ii); (iv) Por cada divisão obtida no passo (ii), trace uma reta horizontal, cuja interseção com a reta correspondente do passo (iii) pertence à cíclica encurtada. **Cíclica alongada:** (i) Retifique meia C_1 (ver [3], Cap. 4) e divida esta distância ℓ_2 em 8 partes iguais; (ii) Divida C_2 em 8 partes e una o ponto de apoio de C_1 com cada parte de C_2; (iii) Por cada divisão obtida no passo (i), trace uma paralela à reta correspondente do passo (ii); (iv) Por cada divisão obtida no passo (ii), trace uma reta horizontal, cuja interseção com a reta correspondente do passo (iii) pertence à cíclica alongada.
Justificativa: Os traçados das cíclicas encurtada e alongada são descritos em [5], pp. 281–282 e pp. 283–285, respectivamente.



ITA 1979, Questão 12: Solução - (E) 3.

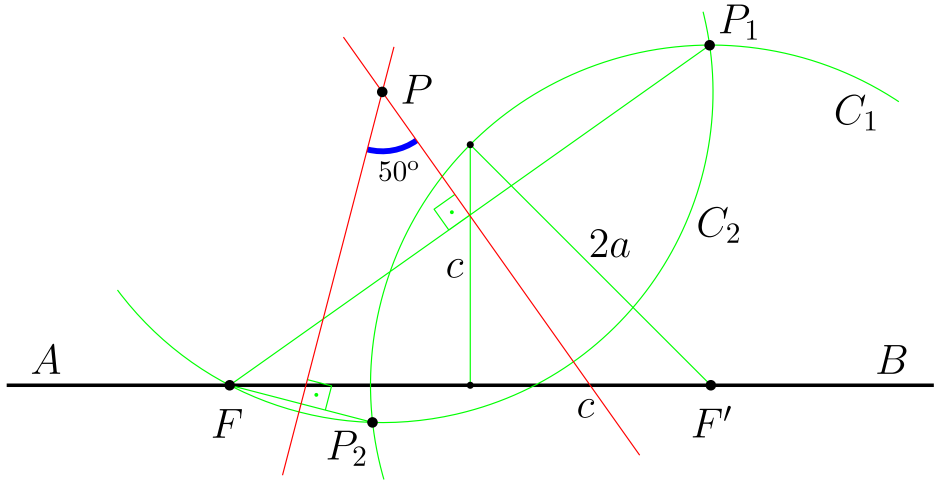
ITA 1979, Questão 13: Dados o eixo maior AB de uma elipse, os focos F_1 e F_2, bem como dois pontos Q_1 e Q_2, conforme a figura a seguir, pertencentes ao círculo diretor, determinar o ângulo formado por duas retas tangentes à elipse.



ITA 1979, Questão 13: Sem Solução.

Construção: (i) Determine o ângulo entre as retas suportes de F_2Q_1 e F_2Q_2.
Justificativa: Como Q_1 e Q_2 pertencem ao círculo diretor $(F_1, 2a)$, logo as mediatrizes de F_2Q_1 e F_2Q_2 são tangentes à elipse. O ângulo entre estas duas tangentes é igual ao ângulo entre F_2Q_1 e F_2Q_2.
sln: O resultado solicitado ("o ângulo formado por duas retas tangentes") é indeterminado e a questão deveria ser anulada. A construção acima assume que as tangentes desejadas são determinadas a partir dos pontos auxiliares Q_1 e Q_2.

ITA 1980, Questão 20: Dado o eixo AB de uma hipérbole regular, os focos F e F', bem como um ponto P, como mostra a figura, determinar, aproximadamente, o menor ângulo formado pelas retas que serão tangentes aos ramos da hipérbole e que contêm o ponto P.

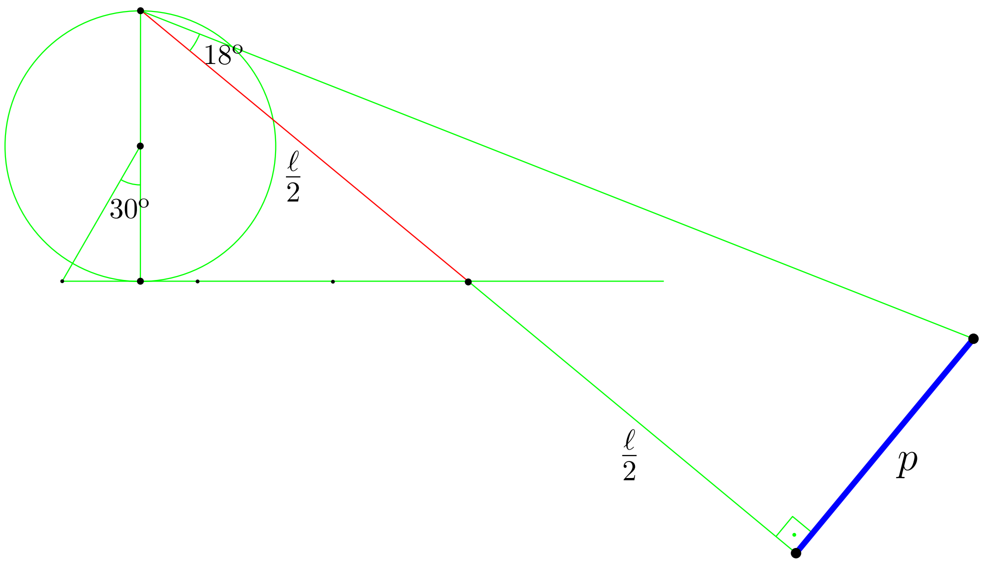


ITA 1980, Questão 20: Solução - (A) 48º ou (B) 53º?

Construção: (i) Seja $FF' = 2c$, determine a grandeza $2a = c\sqrt{2}$; (ii) Trace $C_1 \equiv (F', 2a)$ e $C_2 \equiv (P, PF)$, cujas interseções são os pontos P_1 e P_2; (iii) Trace as mediatrizes de FP_1 e FP_2, que são as tangentes desejadas.
Justificativa: Na hipérbole equilátera (regular), $2a = c\sqrt{2}$, o que permite traçar o círculo diretor C_1 por F'. Para cada ponto P' deste círculo, a mediatriz de FP' é tangente à hipérbole. Assim, temos que determinar os pontos P_1 e P_2 de C_1 tais que as mediatrizes de FP_1 e FP_2 passem por P. Para isto, as distâncias de P aos pontos F, P_1 e P_2 devem ser iguais, o que define o círculo C_2.
sln: Na minha construção, o ângulo entre as tangentes é igual a 50º, próximo a duas alternativas da questão, e, por isto mesmo, a questão poderia ser anulada.

ITA 1981, Questão 17: Determinar graficamente o avanço de um parafuso, por volta, conhecendo-se:

- Ângulo da hélice da rosca igual a 18°.
- Diâmetro nominal do parafuso igual a 35 mm.



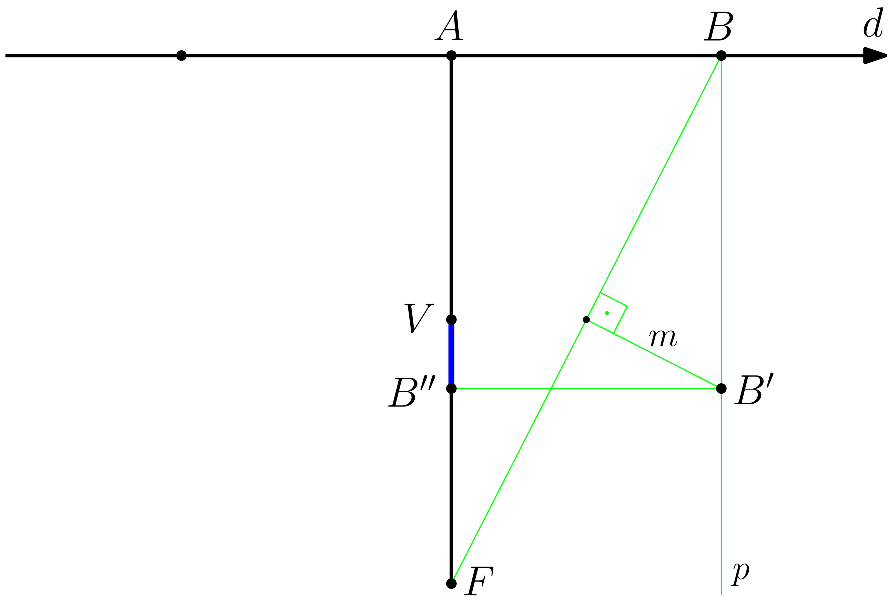
ITA 1981, Questão 17: Solução - (D) 36 mm.

Construção: (i) Retifique o círculo de diâmetro $D = 35$ mm, obtendo o comprimento ℓ; (ii) Trace o triângulo retângulo de cateto ℓ e ângulo adjacente 18°, determinando o cateto oposto p, que é o passo desejado.
Justificativa: Algebricamente, o passo p é dado por

$$p = \pi D \operatorname{tg} \theta = \pi\, 35 \operatorname{tg} 18^{\circ} = 35{,}7 \text{ mm}$$

ITA 1981, Questão 18: Um projétil é lançado com uma velocidade inicial V_0 formando um ângulo de 30^o com a horizontal, descrevendo um movimento parabólico. Determinar graficamente (valor aproximado) a altura máxima atingida pelo projétil, sendo dados:

- AB: 6800 metros (metade do alcance do projétil).
- F: foco da parábola.
- d: diretriz da parábola.
- Escala: 1 cm = 2000 metros.



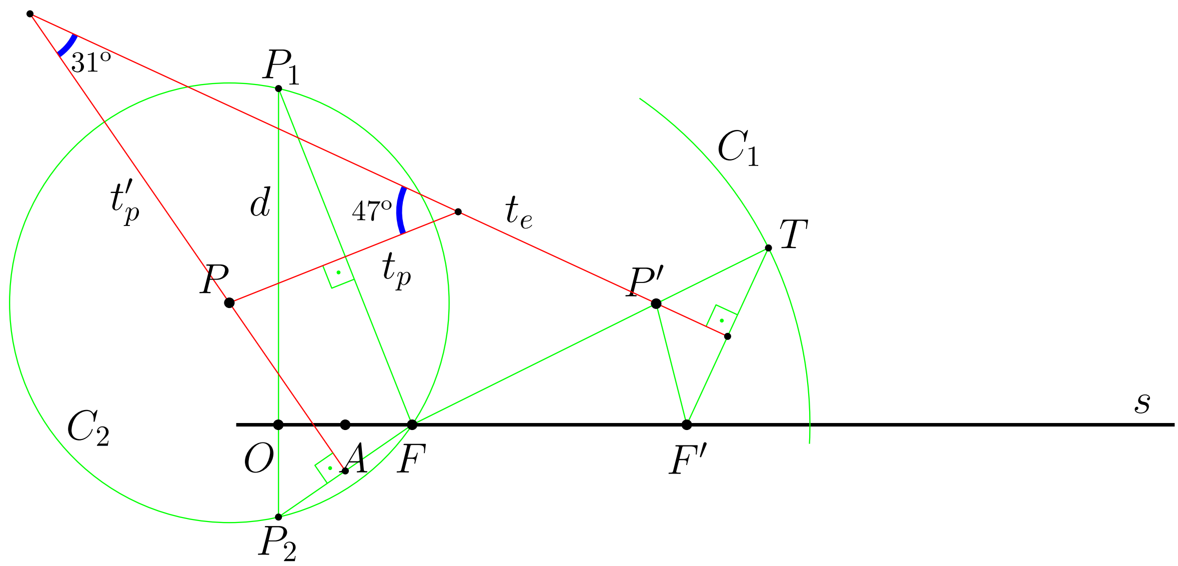
ITA 1981, Questão 18: Solução - (B) 2000 m (?).

Construção: (i) Determine o vértice V, ponto médio de FA; (ii) Trace por B a perpendicular p a d, cuja interseção com a mediatriz m de FB é o ponto B' da parábola; (iii) Projete B' sobre FA, determinando o ponto B'', que define a altura VB'' desejada.
Justificativa: Pela definição de parábola, o ponto de abscissa B pertence à mediatriz de FB.
sln: A informação do ângulo inicial de 30^o não foi utilizada e a resposta encontrada corresponde a 1800 m.

ITA 1982, Questão 19: São dados do problema:

- O ponto P' pertence a uma elipse.
- O ponto F é, simultaneamente, foco desta elipse e de uma parábola.
- A reta s é suporte do eixo da elipse e do eixo da parábola.
- O ponto F' é o outro foco da elipse.
- O ponto A é o vértice da parábola.

Pede-se o menor ângulo formado pela tangente à parábola, passando pelo ponto P, e a tangente à elipse, passando pelo ponto P'.



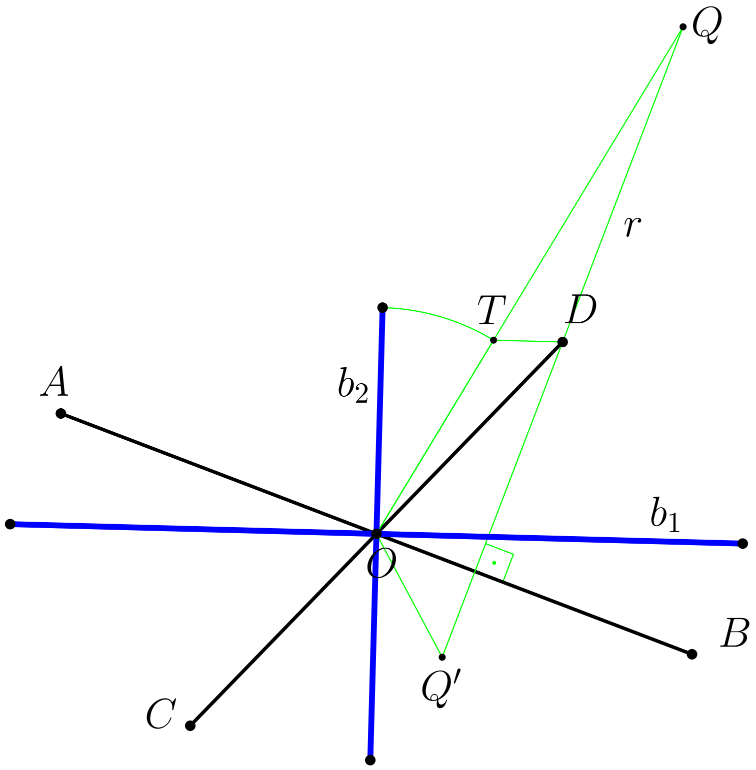
ITA 1982, Questão 19: Sem Solução.

Construção: (i) Trace $C_1 \equiv (F, 2a)$, onde $2a = (FP' + P'F')$; (ii) Estenda FP', cuja interseção com C_1 é o ponto T; (iii) Trace a mediatriz de $F'T$, que é a tangente t_e à elipse por P'; (iv) Trace a perpendicular d a s, pelo ponto O tal que A seja médio de OF; (v) Trace $C_2 \equiv (P, PF)$, cujas interseções com a reta d são os pontos P_1 e P_2; (vi) As mediatrizes t_p e t'_p de FP_1 e FP_2, respectivamente, são tangentes à parábola por P.

Justificativa: Para a elipse, como T, sobre a extensão de FP', pertence ao círculo diretor C_1, de centro F, então a mediatriz t_e de $F'T$ é tangente à elipse por P'. Para a parábola, se P_i é ponto da diretriz d, então a mediatriz de FP_i é tangente à parábola. Para que esta tangente passe por P, o ponto P_i deve ser tal que $PF = PP_i$. Assim, P_i é determinado em d pelo círculo C_2.

sln: Há duas tangentes à parábola por P. Com isto, a questão fica indeterminada e deveria ser anulada. Na minha construção, os ângulos entre as tangentes não têm opções de respostas correspondentes.

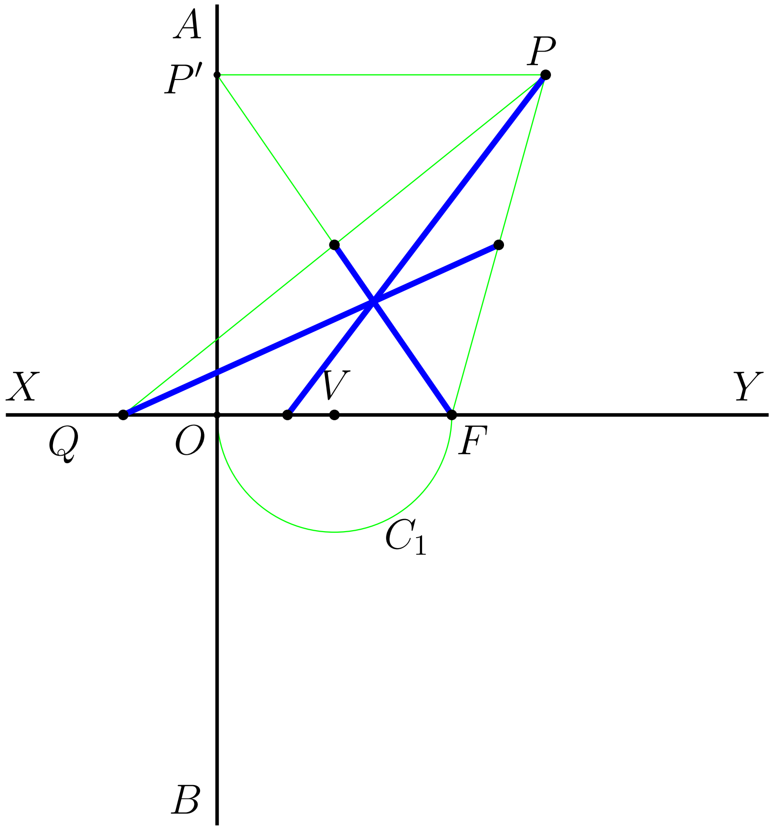
ITA 1984, Questão 20: As retas AB e CD são diâmetros conjugados de uma elipse. Determinar o valor de seus diâmetros maior e menor.



ITA 1984, Questão 20: Solução - (C) 96 mm e 57 mm.

Construção: (i) Trace por D uma perpendicular r a AB, determinando sobre r os pontos Q e Q', tais que $DQ = DQ' = AO$, onde O é a interseção de AB e CD; (ii) Trace as bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados pelas retas OQ e OQ', determinando as direções dos eixos da elipse; (iii) Trace por D uma paralela a b_1, determinando o ponto T sobre OQ tal que TQ e OT são os comprimentos dos semi-eixos da elipse.
Justificativa: Ver [5], p. 230.

ITA 1985, Questão 18: De uma parábola são conhecidos: o eixo XY, a diretriz AB, o vértice V e um ponto P de tangência. Encontrar a soma dos comprimentos das medianas do triângulo definido pelo ponto P, pelo foco F e um ponto Q determinado pela interseção da reta tangente à parábola no ponto P com o eixo XY.



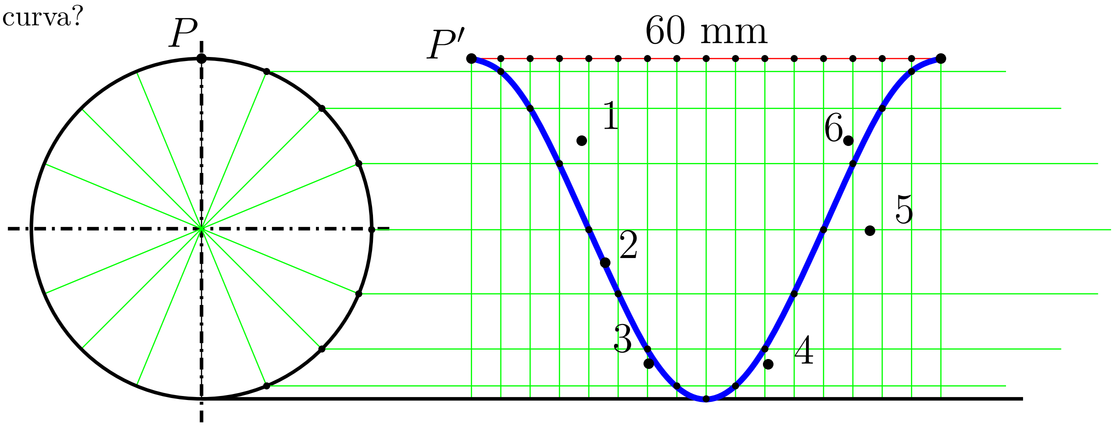
ITA 1985, Questão 18: Sem Solução.

Construção: (i) Trace $C_1 \equiv (V, VO)$, onde O é a interseção do eixo XY com a diretriz AB, determinando o foco F sobre o eixo XY; (ii) Trace a mediatriz de FP', onde P' é a projeção de P sobre a diretriz AB. Esta mediatriz é a tangente à parábola por P (ver observação abaixo), cuja interseção com o eixo XY é o ponto Q desejado; (iii) Trace as medianas do triângulo ΔPFQ.

Justificativa: A tangente por um ponto P de uma parábola é a mediatriz da reta FP', onde P' é a projeção de P sobre a diretriz.

sln: O foco também poderia ser determinado pela interseção do círculo (P, PP') com o eixo XY. Na figura do enunciado, o foco assim obtido seria incompatível com o dado acima, e a questão poderia (deveria?) ser anulada.

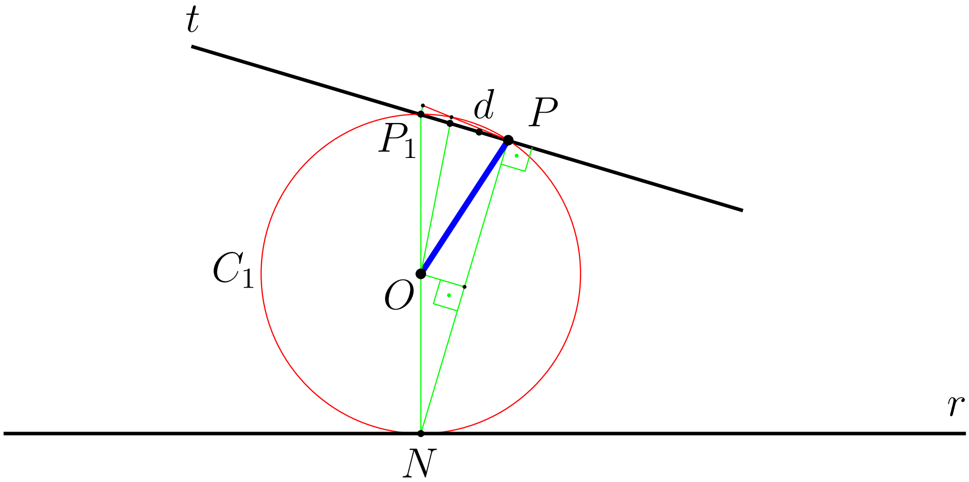
ITA 1985, Questão 20: Uma hélice de 60 mm de passo é traçada sobre uma superfície cilíndrica de diâmetro D. Na representação gráfica de seu desenvolvimento, iniciado no ponto P, qual o par de pontos assinalados pertence à curva?



ITA 1985, Questão 20: Solução - (E) 2 - 4.

Construção: (i) Marque a partir de P a distância de 60 mm e divida-a em 16 partes iguais; (ii) Divida o círculo de diâmetro D em 16 partes iguais, e trace paralelas à diretriz por cada uma dos extremos destas partes, cujas interseções com as divisões correspondentes obtidas no item anterior pertencem à hélice desejada.
Justificativa: O passo define o deslocamento do ponto P ao longo da rotação da hélice. A composição destes dois movimentos define o traçado da curva.
sln: Na construção acima, a hélice obtida contém o ponto 2, sendo que os pontos 3 e 4 estão bem próximos a ela.

ITA 1986, Questão 17: Conhecendo-se: t, reta tangente a uma cíclica; P, ponto de tangência; r, diretriz da cíclica. Pede-se: O raio da circunferência geradora, assim como a construção de um ciclo dessa curva, passando por P.

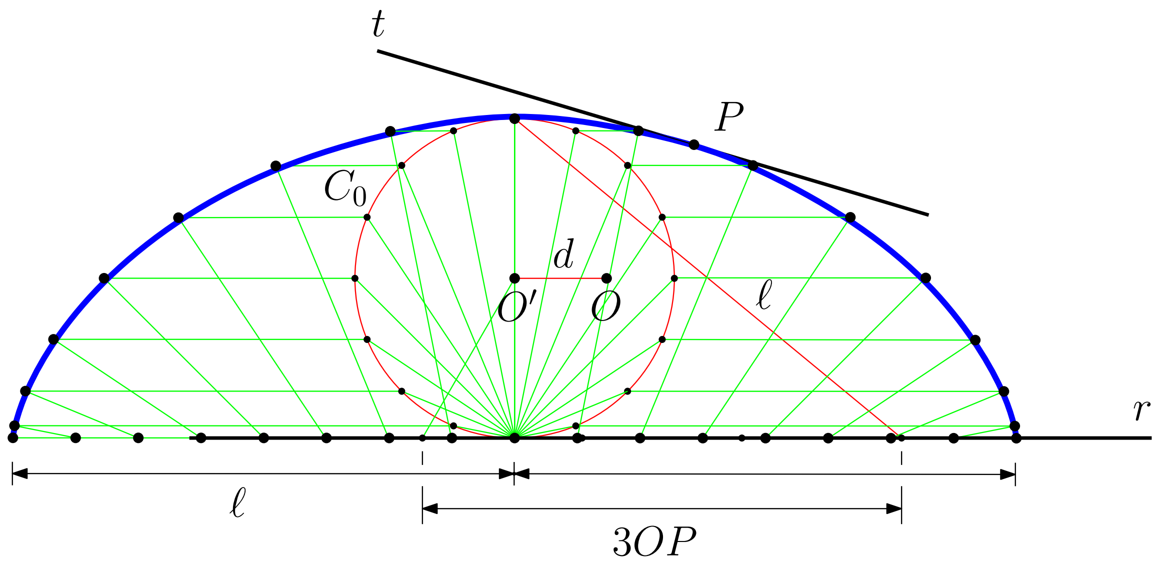


ITA 1986, Questão 17: Solução - (A) 20 mm.

Construção: Determinação do raio: (i) Trace por P a normal à tangente t, determinando o ponto N sobre a diretriz r; (ii) Trace a mediatriz de PN e uma perpendicular à diretriz por N, cuja interseção é o centro O do círculo gerador, o que permite determinar o raio OP desejado.

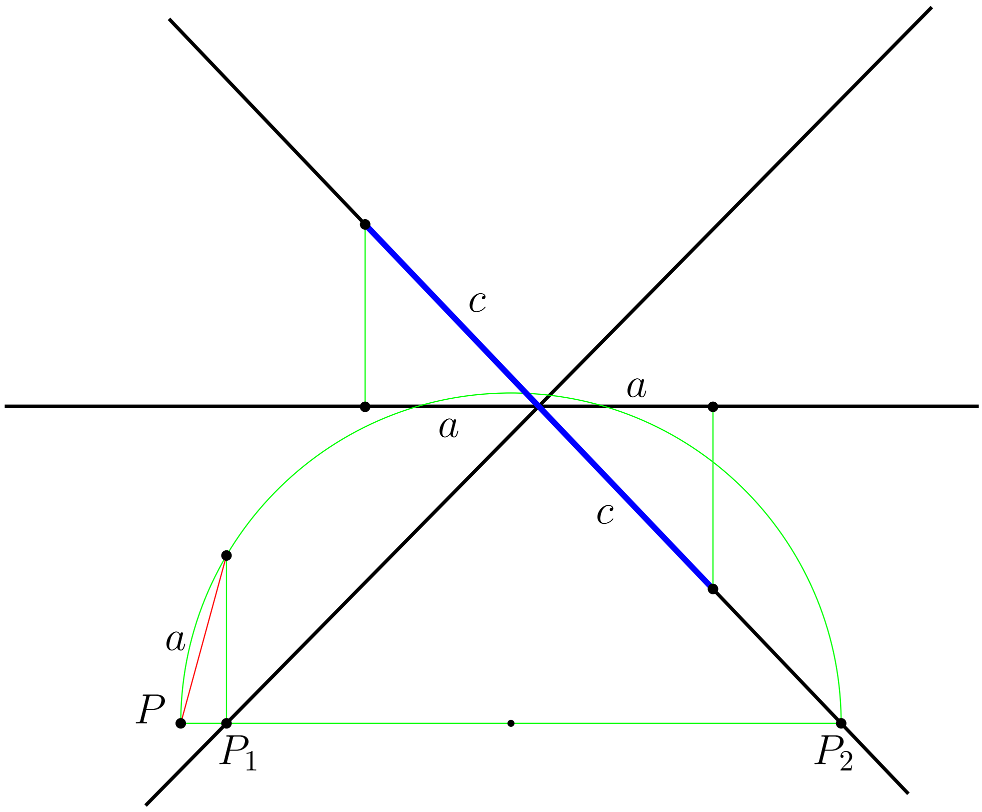
Traçado da cíclica: (iii) Prolongue ON, determinando o ponto P_1 sobre o círculo $C_1 \equiv (O, OP)$; (iv) Retifique o arco PP_1, usando, por exemplo, o método de d'Ocagne (ver [3], pp. 63–65). (v) Determine o círculo $C_0 \equiv T_d(C_1)$, onde d é o deslocamento para a esquerda de uma distância igual à do arco PP_1 retificado; (vi) Retifique o círculo C_0 e marque o comprimento ℓ da semi-circunferência para cada lado de N', interseção de C_0 com r; (vii) Divida C_0 em 16 partes iguais e una N' a cada um dos 16 pontos; (viii) Divida cada distância ℓ em 8 partes iguais e trace paralelas aos segmentos correspondentes obtidos no item anterior; (ix) Trace paralelas a r por cada uma das 16 divisões de C_0, cujas interseções com os respectivos segmentos do item anterior pertencem à cíclica desejada.

Justificativa: A normal por P é a corda NP do círculo gerador da cíclica desejada. Com isto, o centro O pode ser obtido pela interseção da perpendicular a r por N com a mediatriz de NP. Para o traçado da cíclica, ver [5], pp. 279–281.



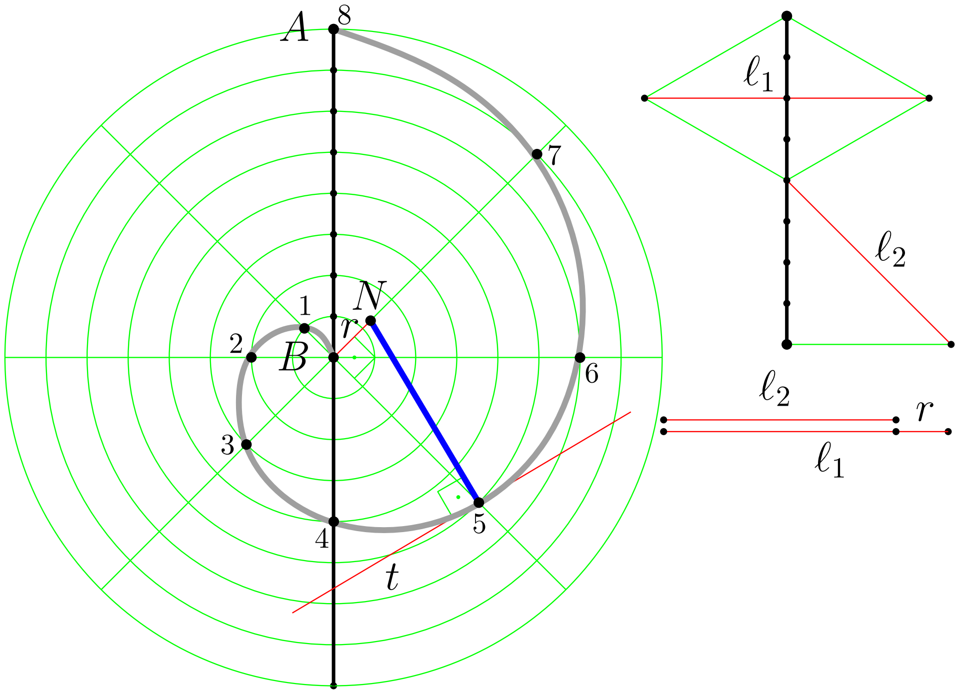
ITA 1986, Questão 17: Cíclica.

ITA 1986, Questão 20: Determinar a distância focal da hipérbole, conhecendo-se: As assíntotas e o ponto P pertencente à curva.
Construção: (i) Trace por P uma paralela ao eixo transverso determinando os pontos P_1e P_2 sobre as assíntotas; (ii)Determine a média geométrica $a = \sqrt{PP_1.PP_2}$; (iii) Marque a distância a, sobre o eixo transverso, em cada lado do centro, interseção das assíntotas, da hipérbole; (iv) Trace perpendiculares ao eixo transverso pelas marcações do item anterior, determinando sobre qualquer uma das assíntotas a distância focal desejada.
Justificativa: Traçando por P uma paralela ou uma perpendicular ao eixo transverso, as respectivas interseções com as assíntotas, P_1 e P_2 devidos à paralela ou P_3 e P_4 devidos à perpendicular, são tais que $a = \sqrt{PP_1.PP_2}$ e $b = \sqrt{PP_3.PP_4}$. A partir do centro, podemos traçar um retângulo de lados $2a$ e $2b$ cujas diagonais estão sobre as assíntotas e têm comprimentos $2c$.



ITA 1986, Questão 20: Solução - (D) 65 mm.

ITA 1987, Questão 3: Dado o passo AB construir a espiral de Arquimedes, usando 8 pontos. Pelo 5º ponto, traçar uma tangente a essa espiral. A normal a essa tangente mede:

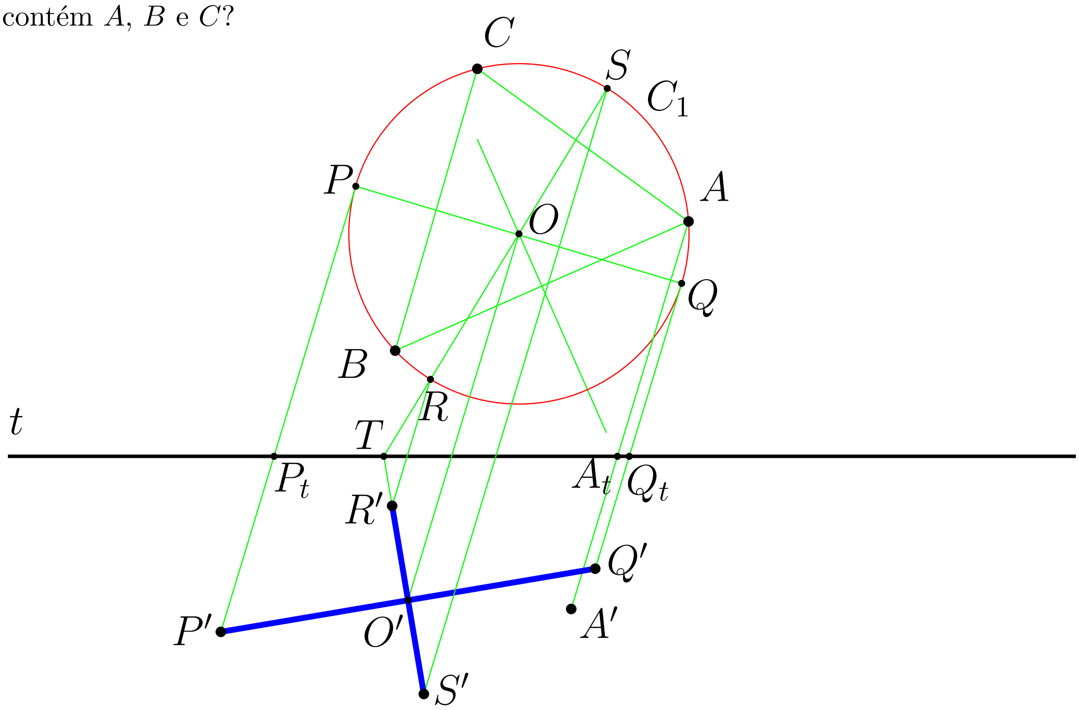


ITA 1987, Questão 3: Solução - (D) 26.

Construção: (i) Divida o segmento AB em 8 partes iguais e trace 8 círculos de centros em B e raios determinados por cada uma destas 8 partes; (ii) Marque sobre cada círculo, em seqüência, do menor para o maior, pontos espaçados a cada 45º; (iii) Trace a espiral, unindo os pontos determinados no passo anterior; (iv) Determine o raio r da circunferência de comprimento AB (ver [4], Problema 4.4); (v) Marque sobre a reta suporte dos pontos '3' e '7' a distância $BN = r$; (vi) Trace a reta N'5', que é a normal desejada; (vii) Trace a tangente t, perpendicular a N'5' pelo ponto '5'.

Justificativa: A espiral de Arquimedes é caracterizada por $R(\theta) = \frac{AB}{2\pi}\theta$, onde θ é dado em radianos. Nesta espiral, a subnormal (projeção da reta normal na reta perpendicular ao raio B'5') é constante [5], pp. 259–260, e igual ao passo normalizado $r = \frac{AB}{2\pi} \approx AB\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$. Isto permite determinar a normal e, subseqüentemente, a tangente em um dado ponto da espiral.

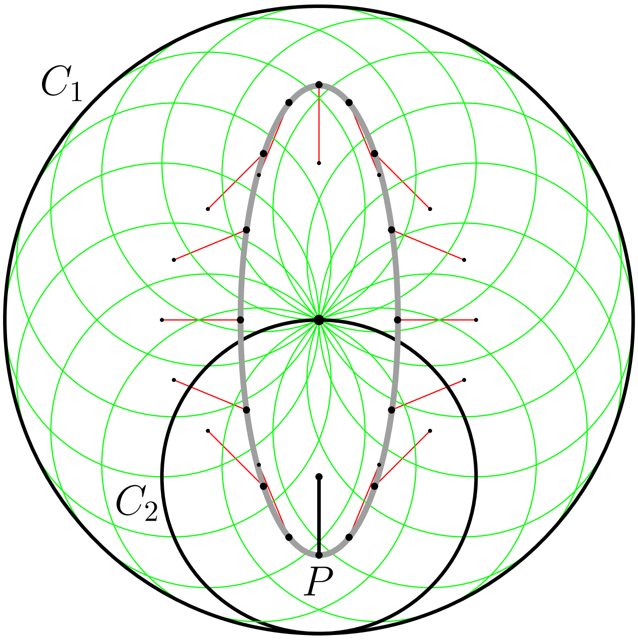
ITA 1988, Questão 3: Seja t um eixo de afinidade; A, B e C pontos que pertencem a uma circunferência e A' o ponto afim de A. Quanto medem, aproximadamente, os eixos maior e menor da elipse afim da circunferência que contém A, B e C?



ITA 1988, Questão 3: Sem Solução.

Construção: (i) Determine o circuncentro O do triângulo ΔABC e trace o círculo $C_1 \equiv (O, OA)$ circunscrito a este triângulo (ver [4], Problema 1.3) (ii) Trace AA', cuja interseção com o eixo t é o ponto A_t; (iii) Trace por O uma perpendicular a AA', cujas interseções com C_1 são os pontos P e Q; (iv) Determine os pontos P' e Q' afins de P e Q, respectivamente, extremos do eixo maior da elipse desejada; (v) Trace uma perpendicular por O', médio de $P'Q'$, cuja interseção com o eixo t é o ponto auxiliar T; (vi) Trace TO, cujas interseções com C_1 são os pontos R e S; (vii) Determine os pontos R' e S' afins de R e S, respectivamente, extremos do eixo menor da elipse desejada.
Justificativa: Um ponto X' é afim de X se $XX' \parallel AA'$ e $XX_t : AA_t = X_tX' : A_tA'$, onde X_t é a interseção de XX' com o eixo t. Dada a direção AA', a transformação de afinidade correspondente mapeia o diâmetro PQ (perpendicular a AA') de C_1 no eixo maior da elipse. O eixo menor é ortogonal ao eixo maior com centro O' comum, transformação afim do centro O de C_1.
sln: Não há opção correspondente ao resultado obtido. A questão deve ter sido anulada.

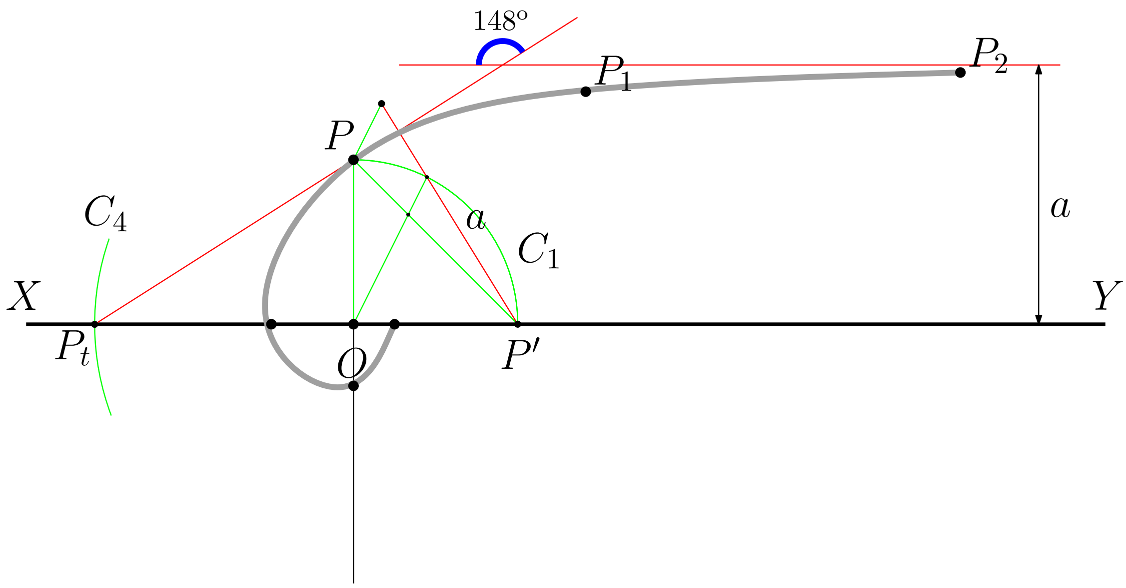
ITA 1988, Questão 6: Construa uma hipociclóide encurtada de tal forma que a cíclica seja uma elipse, sabendo-se que os pares de números dados correspondem respectivamente ao raio do círculo diretor e do círculo gerador da curva. Qual é o par de valores correto?



ITA 1988, Questão 6: Solução (A) 40 e 20 mm.

Construção: (i) Divida os círculos diretor C_1 e gerador C_2 usando 16 raios auxiliares em cada círculo; (ii) Marque o ponto P sobre o raio de C_2; (iii) Para cada raio auxiliar de C_1, contado no sentido horário, marque a imagem do ponto P no raio auxiliar de C_2, contado no sentido anti-horário; (iv) Una os pontos obtidos no passo anterior para compor a elipse desejada.
Justificativa: Para que hipociclóide encurtada seja uma elipse, o raio do círculo gerador deve ser metade do raio do círculo diretor [5], pp. 303–304. A única alternativa que satisfaz esta relação é a opção (A), representada acima.

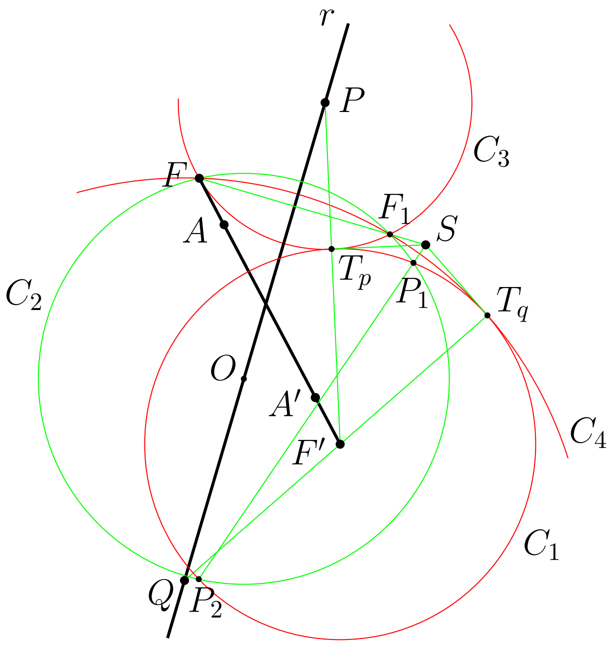
ITA 1988, Questão 7: P, P_1 e P_2 são pontos que pertencem a uma espiral hiperbólica de eixo polar XY e pólo O. Trace a assíntota da espiral e, pelo ponto P, uma reta tangente à curva. Pergunta: Qual é, aproximadamente, a medida do maior ângulo formado pela interseção da assíntota com a tangente?



ITA 1988, Questão 7: Solução - (B) 148°.

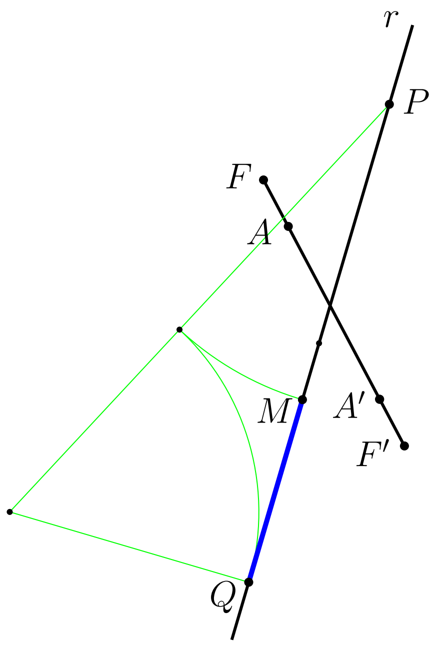
Construção: (i) Trace qualquer um dos cículos $C_1 \equiv (O, OP)$, $C_2 \equiv (O, OP_1)$ ou $C_3 \equiv (O, OP_2)$, determinando P', P'_1 ou P'_2, respectivamente, sobre o eixo XY, à direita de O; (ii) Retifique qualquer um dos arcos PP', $P_1P'_1$ ou $P_2P'_2$, resultando no comprimento a; (iii) Trace a assíntota da espiral paralela a XY a uma distância a; (iv) Trace $C_4 \equiv (O, a)$, cuja interseção com o eixo XY determina o ponto P_t; (v) Trace P_tP, que é a tangente à espiral por P, determinando o ângulo desejado com a assíntota;
Justificativa: Na espiral hiperbólica, o raio vetor é inversamente proporcional ao ângulo deste com o eixo polar. Com isto, a medida a do arco associada ao raio vetor é constante e a assíntota é a paralela a uma distância a do eixo. Além disto, a sub-tangente por um ponto da espiral é constante e igual a a também (ver [5], pp. 263–265).

ITA 1993, Questão 21: Determinar, sem traçar a curva, os pontos P e Q, comuns a uma reta dada r e a uma hipérbole dada por seus focos F e F' e o eixo transverso $\overline{AA'}$. Sobre $\overline{PQ}$, encontre um ponto M de tal forma que $\overline{PM}^2 = \overline{PQ}.\overline{MQ}$. Pergunta: Quanto mede aproximadamente o segmento $\overline{MQ}$?
Obs: O ponto P está situado à direita de $\overline{FF'}$.



ITA 1993, Questão 21 (baseada em solução de [2]): Pontos P e Q.

Construção: (i) Determine o simétrico F_1 de F em relação a r; (ii) Trace os círculos $C_1 \equiv (F', \overline{AA'})$ e $C_2 \equiv (O, OF)$, com O qualquer sobre r, cujas interseções com C_1 são os pontos P_1 e P_2 quaisquer; (iii) Trace as retas suportes de FF_1 e P_1P_2, cuja interseção é o ponto S; (iv) Determine os pontos T_p e T_q de tangência a C_1 por S; (v) Trace as retas suportes de $F'T_p$ e $F'T_q$, cujas interseções com r determinam os pontos P e Q desejados; (vi) Determine o segmento áureo de PQ (ver [3], pp. 40–42), marcando o ponto M mais próximo a Q.



ITA 1993, Questão 21: Solução - (D) 25 mm.

Justificativa: Traçando o círculo $C_1 \equiv (F', \overline{AA'})$, a hipérbole pode ser descrita como o lugar geométrico dos centros dos círculos tangentes a C_1 e que passam por F. Com isto, o problema requer a determinação dos centros de dois círculos, C_3 e C_4, que passam por F e F_1 (simétrico de F em relação a r, de modo a garantir que os centros estejam sobre r) e são tangentes a C_1.

A chave da solução é o centro radical S de C_1, C_3 e C_4. Para determinarmos S, usamos o círculo auxiliar C_2 de forma que

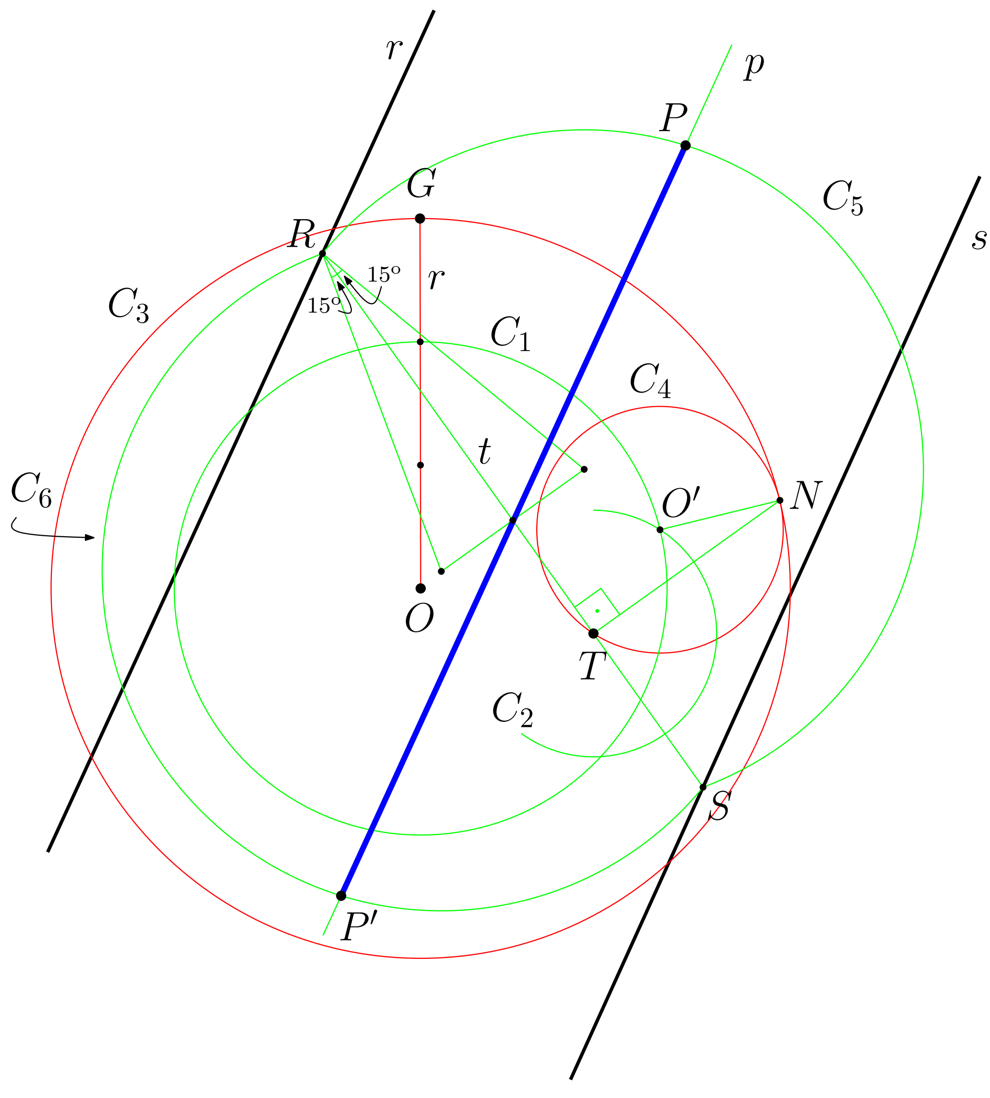
$$\text{Pot}_{C_2}(S) = \overline{SF}.\overline{SF_1} = \overline{SP_1}.\overline{SP_2} = \text{Pot}_{C_1}(S) = \begin{cases} \overline{ST_p}^2 = \text{Pot}_{C_3}(S) \\ \overline{ST_q}^2 = \text{Pot}_{C_4}(S) \end{cases}$$

Assim, os círculos C_3 e C_4 ficam determinados pelas tríades de pontos (F, F_1, T_p) e (F, F_1, T_q), respectivamente. Os círculos C_3 e C_4 são tangentes a C_1 em T_p e T_q, respectivamente. Com isto, o centro de C_3 é colinear com F' e T_p e o de C_4 com F' e T_q, o que permite determinar P e Q sobre r. Da figura-solução é simples perceber que

$$\begin{cases} \overline{PF'} - \overline{PF} = \overline{PF'} + \overline{PT_p} = \overline{F'T_p} = \overline{AA'} \\ \overline{QF} - \overline{QF'} = \overline{QT_q} - \overline{QF'} = \overline{F'T_q} = \overline{AA'} \end{cases}$$

confirmando que P e Q pertencem à hipérbole.

ITA 1993, Questão 25: De um tricúspide são dados: o centro O da circunferência diretora, o ponto gerador G e um ponto T da curva. Pede-se traçar por T uma reta tangente à curva. Pergunta: Quanto mede a menor distância entre dois pontos P e P', equidistantes das retas dadas r e s e que vêem a porção da tangente em T, compreendida entre r e s, sob ângulos de 75°?

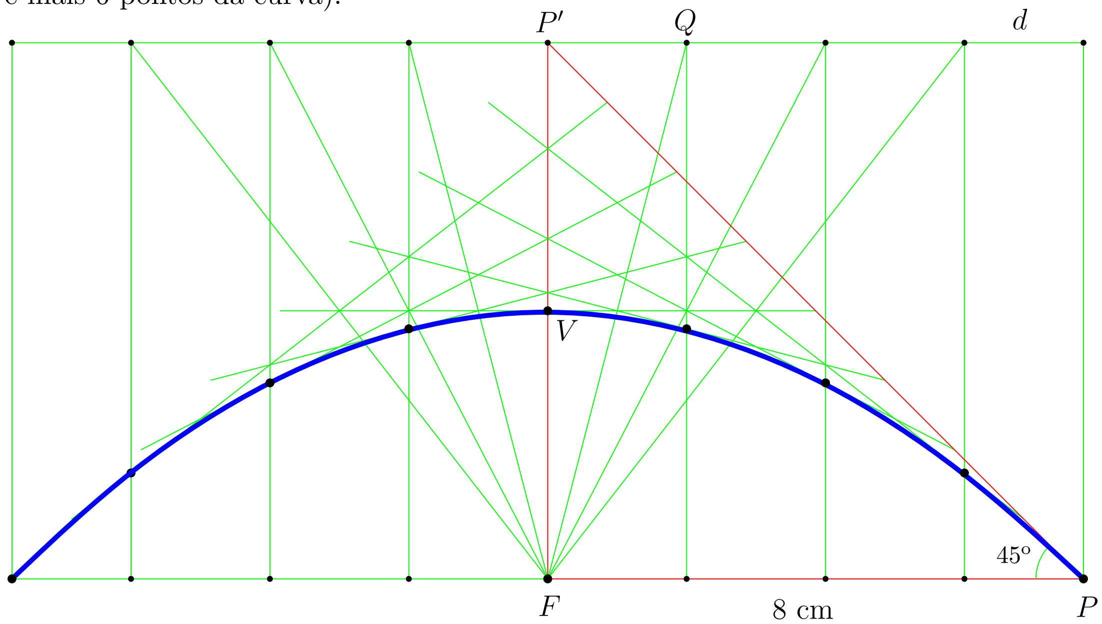


ITA 1993, Questão 25: Solução (E) 105 mm.

Construção: (i) Determine o raio do círculo gerador $r = \frac{OG}{3}$; (ii) Trace os círculos auxiliares $C_1 \equiv (O, 2r)$ e $C_2 \equiv (T, r)$, determinando o centro do círculo gerador O'; (iii) Trace os círculos diretor $C_3 \equiv (O, OG)$ e gerador $C_4 \equiv (O', r)$, determinando seu ponto de tangência N; (iv) Trace a perpendicular t a NT por T, que é a tangente desejada, determinando os pontos R e S sobre as retas r e s, respectivamente; (v) Trace a bissetriz p das retas r e s. Estas retas parecem ser paralelas, assim p é paralela a r e s passando pelo ponto médio de RS; (vi) Trace os arcos-capazes C_5 e C_6 do ângulo de 75^o em cada lado do segmento RS, determinando os pontos P e P' sobre p.
Justificativa: A tricúspide é uma hipociclóide em que o raio do círculo gerador r é $\frac{1}{3}$ do raio do círculo diretor. O centro O' do círculo gerador está a uma distância r tanto do ponto T quanto do círculo diretor, o que permite determinar O'. Assim, é possível traçar os círculos diretor e gerador (que contém T), determinando seu ponto de tangência N. A tangente à hipociclóide em T é perpendicular a NT. Tendo-se a tangente, a solução do problema é trivial.

4 Soluções do IME

IME 1964/1965, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: Um jato d' água, sob pressão constante, descreve uma parábola no espaço. A interseção desta parábola com o plano horizontal se dá num ponto P, 8 cm à direita do seu eixo, que é vertical. Construir a parábola, sabendo que a tangente à curva, tirada no ponto P, faz um ângulo de 45° com o plano horizontal. (Determinar o vértice e mais 6 pontos da curva).



IME 1964/1965, Questão 1, Item (2): Solução.

Construção: (i) Trace o triângulo retângulo isósceles $\Delta FPP'$ com catetos $FP = FP' = 8$ cm; (ii) Marque o vértice V da parábola, médio de FP'; (iii) Trace a diretriz d, paralela a FP por P'; (iv) Determine pontos da parábola, interseções das perpendiculares a d por Q qualquer com a mediatriz de FQ.
Justificativa: A tangente por um ponto P de uma parábola é a bissetriz do ângulo formado por PF, sendo F o foco da parábola, e a perpendicular à diretriz d por P. Como a tangente dada faz um ângulo de 45°, então o foco F da parábola é a própria projeção de P no eixo vertical. Por definição, a distância de P a d é igual a $PF = 8$ cm, o que permite determinar d e, em seguida, o vértice V, médio de F e a projeção P' deste em d.

Os pontos da parábola devem ser equidistantes de F e da diretriz d. Assim traçando uma perpendicular a d por Q qualquer, determina-se um ponto da parábola pela interseção desta perpendicular com a mediatriz de FQ.

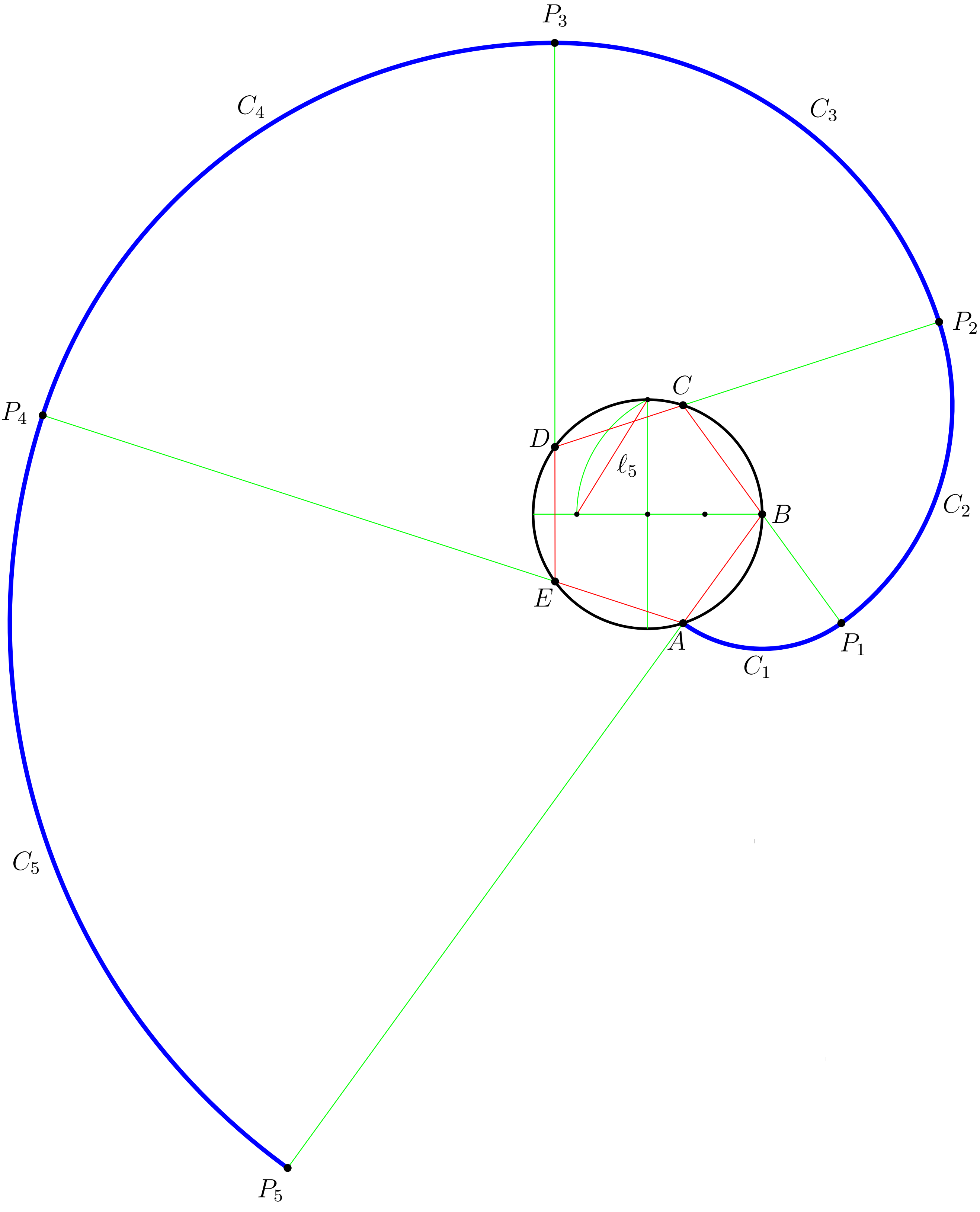
IME 1965/1966, Questão 1, Item (b): Traçar uma falsa espiral de 5 centros, dispostos estes segundo uma circunferência de 4 cm de diâmetro. A espiral deverá ser traçada até o prolongamento do primeiro raio.

Construção: (i) Inscreva o pentágono $ABCDE$ de lado

$$\ell_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R$$

em uma circunferência de diâmetro $2R = 4$ cm (ver [4], Exercício 2.25) e prolongue os lados AB, BC, CD, DE e EA; (ii) Trace o arco $C_1 \equiv (B, BA) = \overset{\frown}{AP_1}$, com P_1 sobre o prolongamento de CB; (iii) Trace o arco $C_2 \equiv (C, CP_1) = \overset{\frown}{P_1P_2}$, com P_2 sobre o prolongamento de DC; (iv) Trace o arco $C_3 \equiv (D, DP_2) = \overset{\frown}{P_2P_3}$, com P_3 sobre o prolongamento de ED; (v) Trace o arco $C_4 \equiv (E, EP_3) = \overset{\frown}{P_3P_4}$, com P_4 sobre o prolongamento de AE; (vi) Trace o arco $C_5 \equiv (A, AP_4) = \overset{\frown}{P_4P_5}$, com P_5 sobre o prolongamento de BA.

Justificativa: A falsa espiral de n centros é formada por uma seqüência de arcos de circunferências, com os centros destas percorrendo os vértices de um n-ágono regular (ver [5], pp. 169–171).



IME 1965/1966, Questão 1, Item (b): Solução.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (e): Restabelecer o eixo, o vértice, o foco e a diretriz da parábola dada.

Construção: (i) Trace duas retas paralelas, r e s, secantes à parábola nos pontos R_1 e R_2 e S_1 e S_2, respectivamente; (ii) Trace uma perpendicular p qualquer a RS, onde R é médio de R_1R_2 e S é médio de S_1S_2, cujas interseções com a parábola são os pontos P_1 e P_2; (iii) Trace a mediatriz x de P_1P_2, determinando o eixo da parábola, cuja interseção com a parábola constitui o vértice V da mesma; (iv) Trace uma perpendicular y a x por V e marque um ponto (x_0, y_0) qualquer da parábola; (v) Determine a quarta proporcional $x_0 : y_0 = y_0 : k$ e marque o foco F sobre o eixo x com $VF = f = \frac{k}{4}$; (vi) Trace a diretriz d paralela ao eixo y a uma distância f de V.
Justificativa: As interseções da parábola $x = ay^2 + by + c$ com uma reta descrita por $x = \alpha y + \beta$ são da forma

$$ay^2 + (b - \alpha)y + (c - \beta) = 0,$$

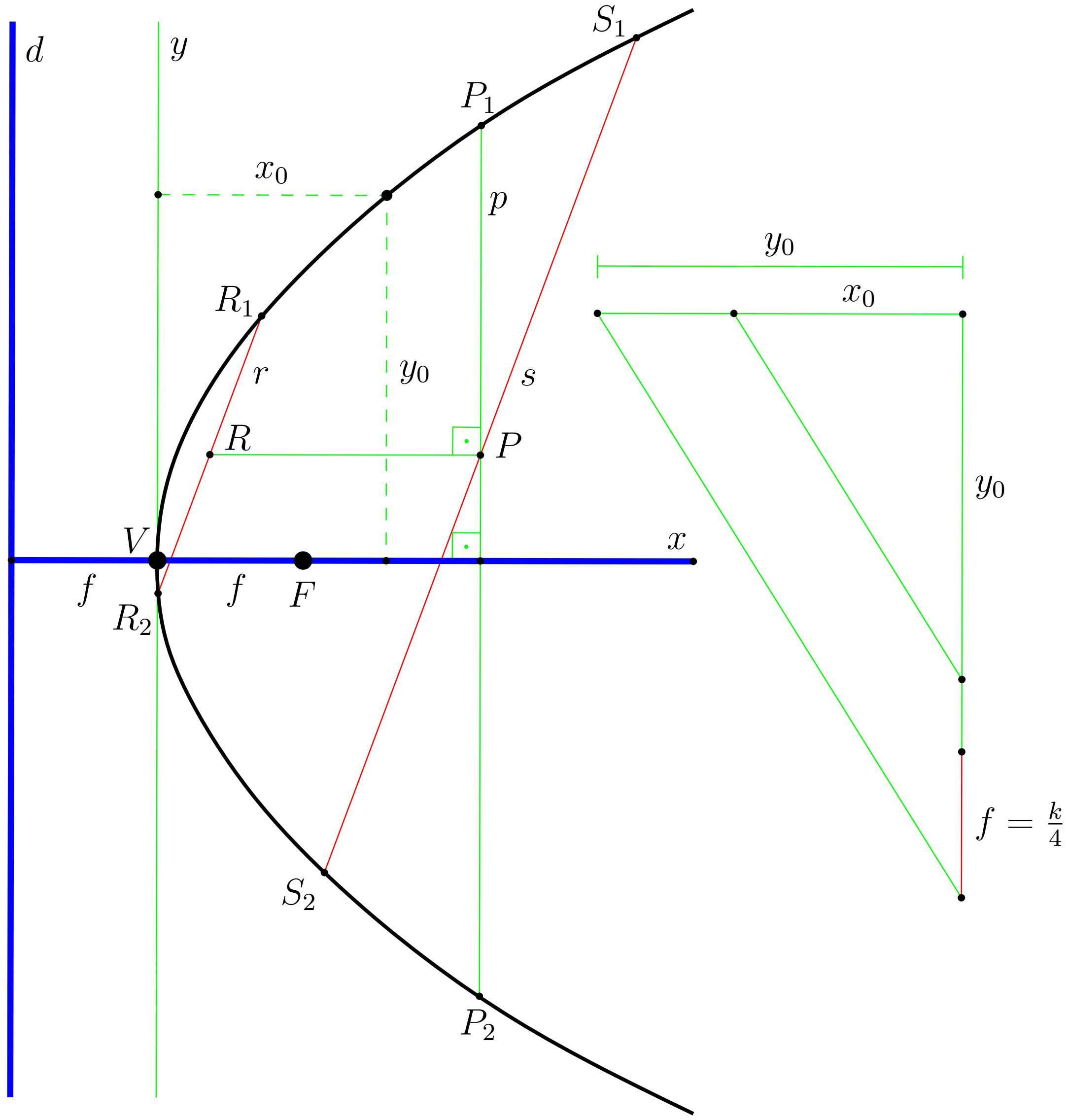
de modo que o ordenada média das interseções é dada por

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\alpha - b}{2a}.$$

Assim, retas paralelas, com mesmo coeficiente angular α, geram interseções com mesma ordenada média, o que permite determinar a direção do eixo da parábola. Uma perpendicular a esta direção intercepta a parábola em dois pontos, cuja mediatriz x é o eixo desejado, que intercepta a parábola dada no vértice V da mesma.

Traçando eixos coordenados com origem no vértice V, um ponto (x_0, y_0) da parábola é descrito por $x_0 = \frac{y_0^2}{k}$. O foco $F \equiv (f, 0)$ é tal que

$$(f - x_0)^2 + y_0^2 = (f + x_0)^2 \Rightarrow y_0^2 = 4fx_0 \Rightarrow f = \frac{y_0^2}{4x_0} = \frac{k}{4}.$$



IME 1965/1966, Questão 1, Item (e): Solução.

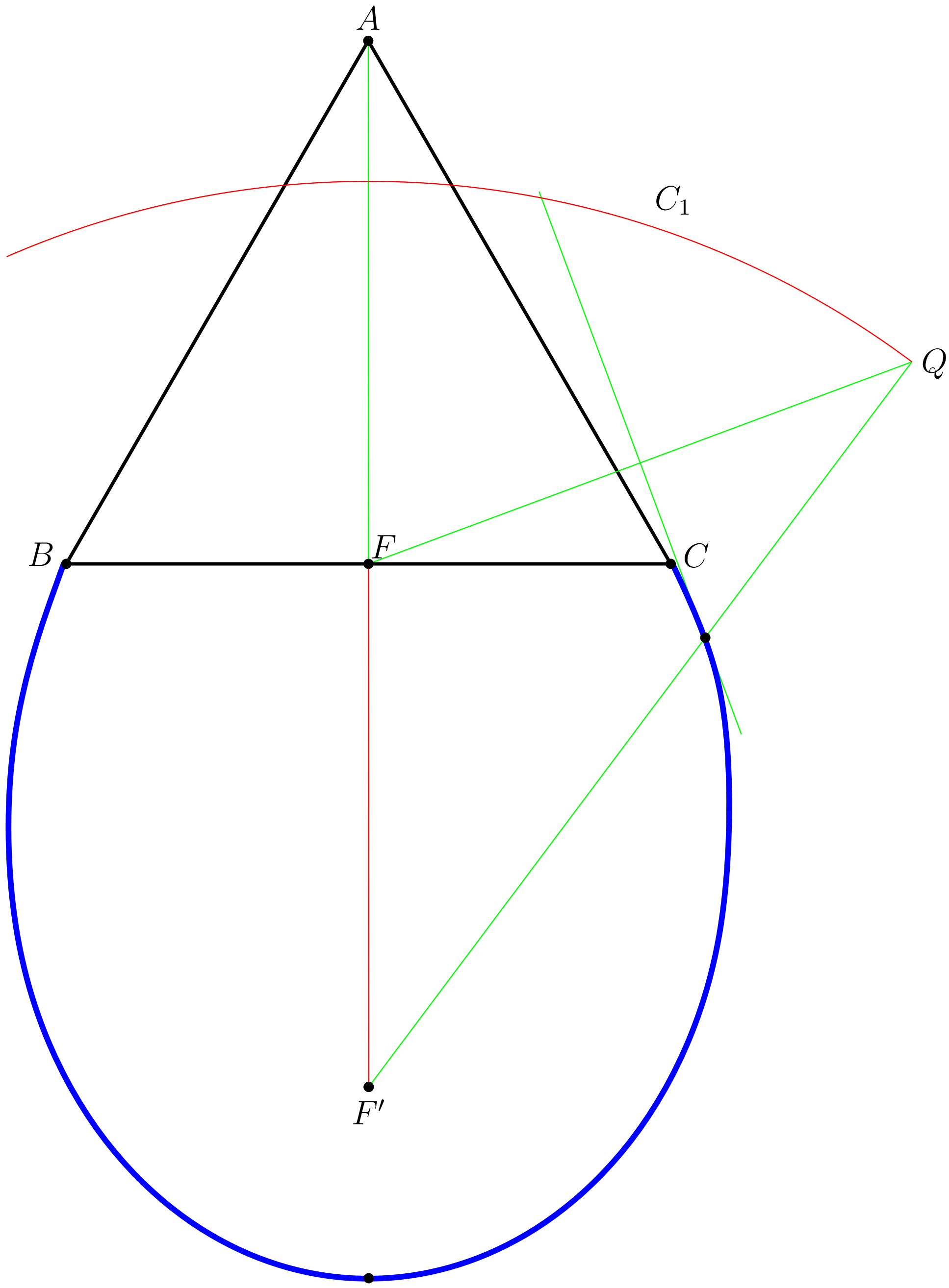
IME 1965/1966, Questão 1, Item (f): Dado um triângulo equilátero ABC de 8 cm de lado, concordar os lados AB e AC com um arco de elipse. Tomar um dos focos da elipse sobre o lado BC.

Construção: (i) Trace o triângulo equilátero ΔABC de lado 8 cm e marque os pontos F, médio de BC, e F', simétrico de A em relação a F, de modo que $AF = FF' = 4\sqrt{3}$ cm; (ii) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F', 12 \text{ cm})$; (iii) Os pontos da elipse são dados pela interseção de $F'Q$, com Q pertencente a C_1, com a mediatriz de FQ.

Justificativa: Por simetria, F é médio de BC. Assim, A é encontro de tangentes pelos extremos da corda focal BC, de forma que $AO = \frac{a^2}{c} = AF + FO = 4\sqrt{3} + c$, onde O é o centro da elipse. Além disto, BC é a corda focal mínima, de forma que BF é o parâmetro da elipse, e assim $BF = \frac{BC}{2} = \frac{b^2}{4}$.

Logo, a elipse é caracterizada por

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 4\sqrt{3}c \\ b^2 = 4a \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 12 \text{ cm} \\ 2b = 2\sqrt{6} \text{ cm} \\ 2c = 4\sqrt{3} \text{ cm} \end{cases}.$$



IME 1965/1966, Questão 1, Item (f): Solução.

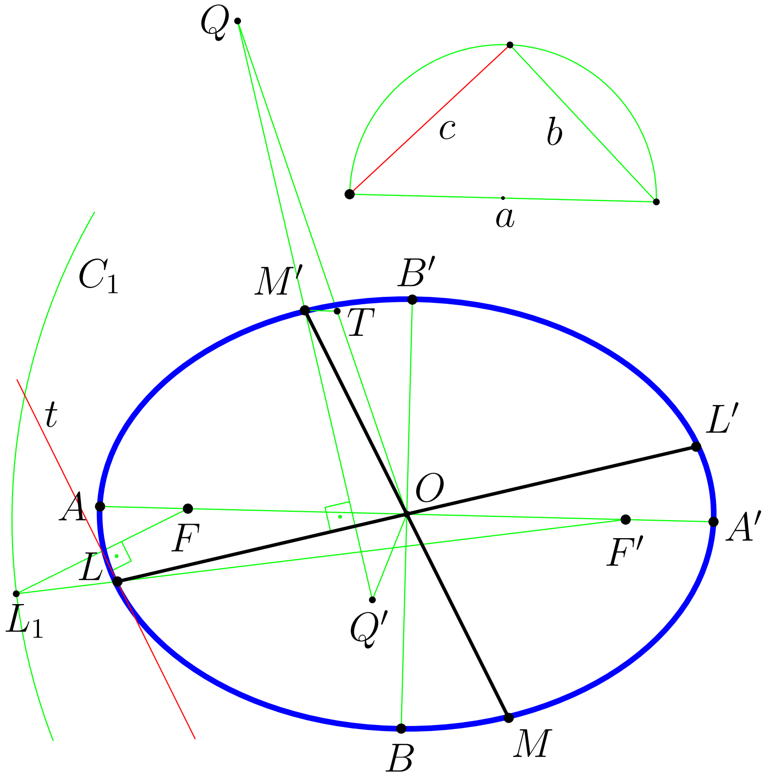
IME 1965/1966, Questão 2, Item (b): São dados dois diâmetros conjugados LL' e MM' de uma elipse que tangencia os 2 ramos de uma hipérbole, sendo L um dos pontos de tangência. Sabendo-se que o eixo maior da elipse é perpendicular ao eixo não transverso da hipérbole e que os raios vetores desta última fazem em L um ângulo de 50^{o}, traçar as duas curvas.

Construção: (i) Determine os eixos da elipse (ver ITA 1984, Questão 20, ou [5], p. 230) e, em seguida, sua distância focal, marcando os extremos e os focos, o que permite traçar a curva; (ii) Trace $C_1 \equiv (F', 2a)$ e a reta $F'L$, cujo prolongamento intercepta C_1 em L_1; (iii) Trace a mediatriz de FL_1, determinando a tangente comum t; (iv) Determine o ponto simétrico L'_1 de L e a reta simétrica t_1 de t em relação ao eixo menor da elipse; (v) Trace as retas r_1 e r_2 fazendo ângulos de $\pm 25^{\text{o}}$ com t e as retas r'_1 e r'_2 fazendo ângulos de $\pm 25^{\text{o}}$ com t_1, cujas interseções de r_1 com r'_1 e de r_2 com r'_2 são os focos F_h e F'_h da hipérbole; (vi) Determine o comprimento $2a = |F'_h L - F_h L|$ do eixo transverso da hipérbole, que permite determinar os demais dados desta curva, viabilizando o seu traçado.

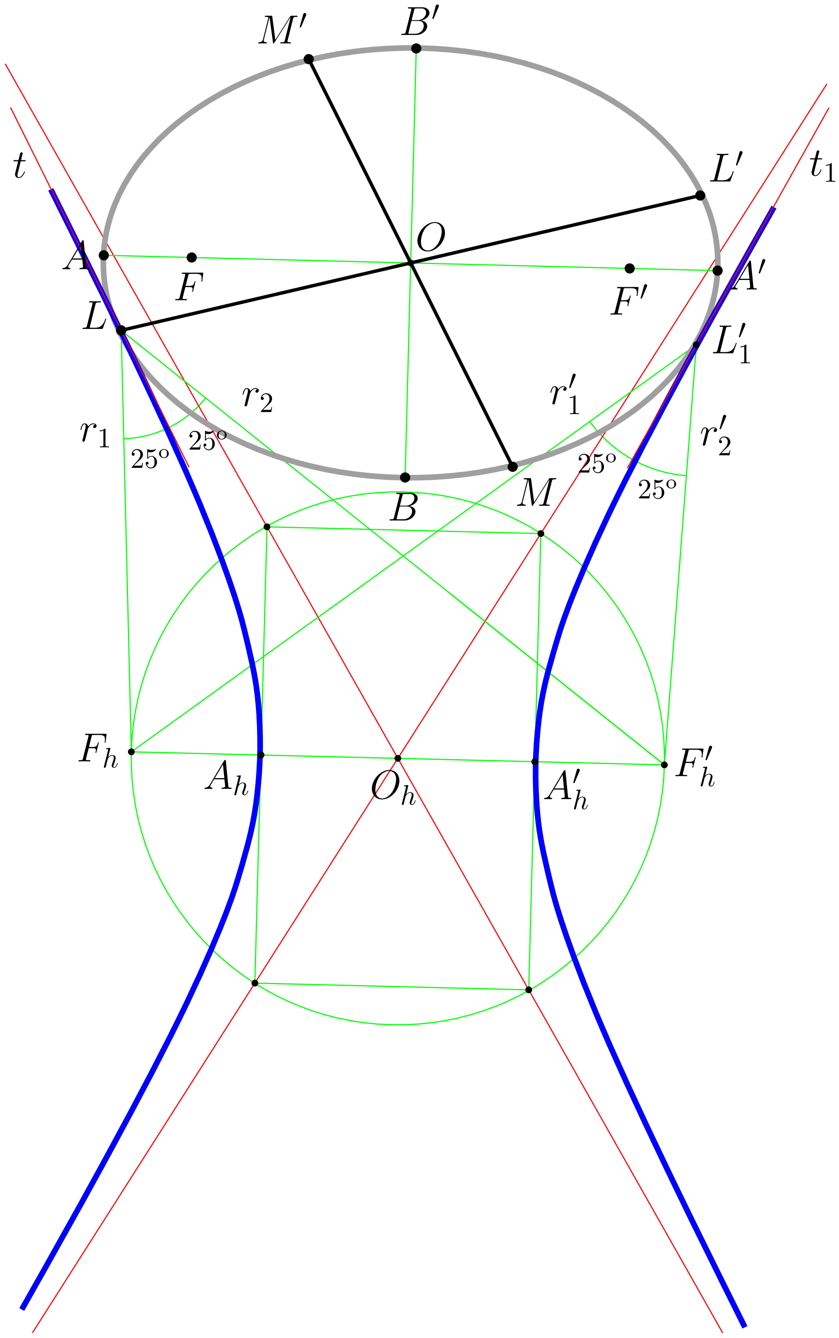
Justificativa: Para o traçado da elipse, ver [5], p. 230. A tangente comum por L é mediatriz de FL_1, onde L_1 é a interseção do prolongamento do raio vetor $F'L$ com o círculo diretor relativo a F'.

Como a elipse é tangente a ambos os ramos da hipérbole e seus eixos são paralelos dois a dois (maior da elipse com o transverso da hipérbole e o menor da elipse com o não transverso da hipérbole), por simetria, o outro ponto de tangência é o simétrico de L em relação ao eixo menor da elipse.

Pelo teorema de Poncelet, a tangente de uma hipérbole pelo ponto L (ou L'_1) é a bissetriz dos raios vetores $F_h L$ e $F'_h L$ (ou $F_h L'_1$ e $F'_h L'_1$). Como o ângulo entre os raios vetores é de 50^{o}, então cada raio vetor faz um ângulo de 25^{o} com a respectiva tangente. Isto permite determinar os focos F_h e F'_h da hipérbole, encontro dos respectivos raios vetores para cada ponto de tangência L e L'_1. Como L pertence à hipérbole, é possível determinar o comprimento do eixo transverso pela definição de hipérbole, ou seja, $2a = |F_h L - F'_h L|$, viabilizando o traçado da hipérbole.



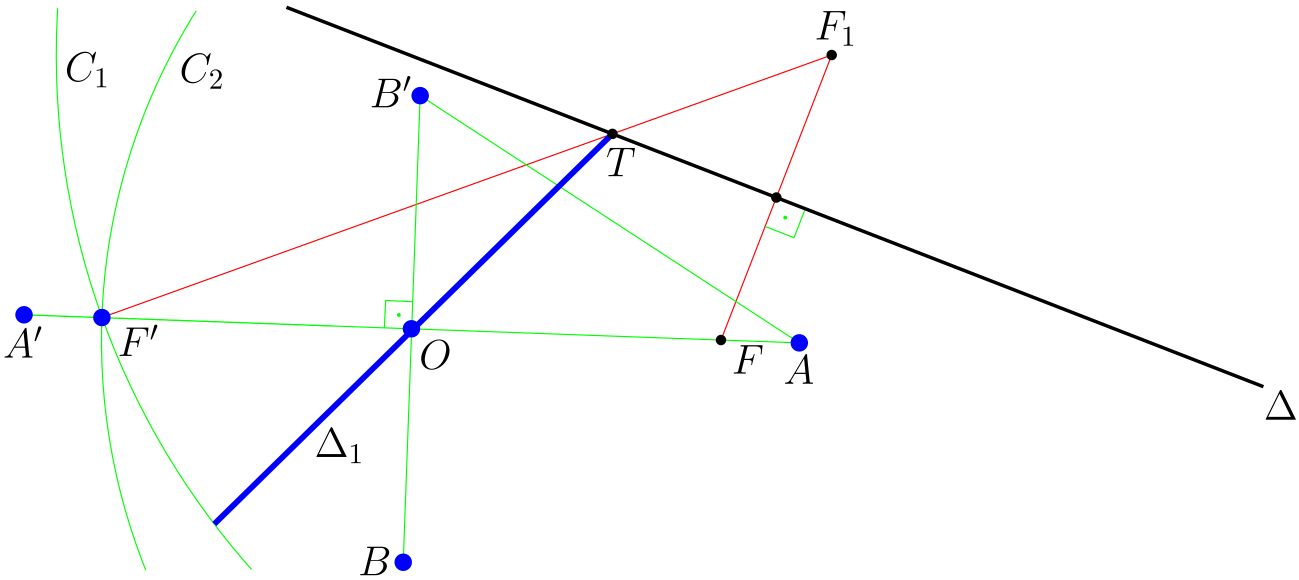
IME 1965/1966, Questão 2, Item (b): Solução - Elipse.



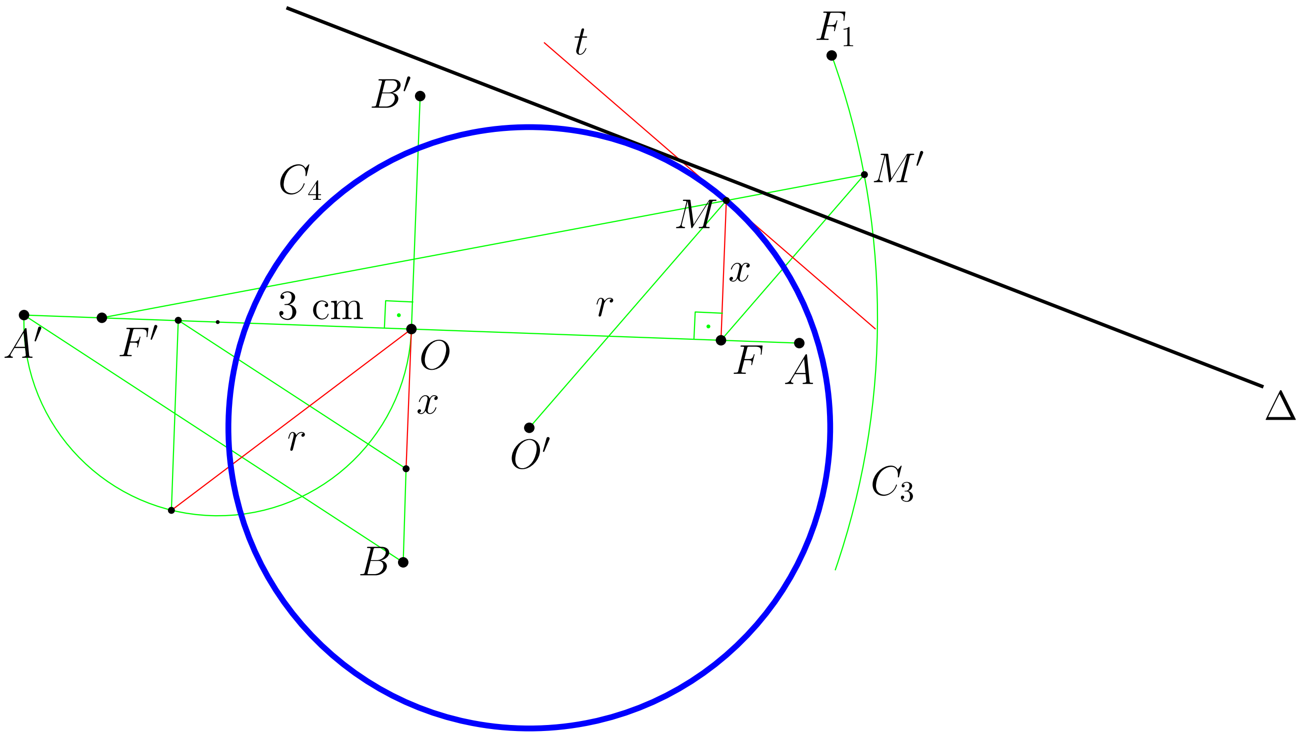
IME 1965/1966, Questão 2, Item (b): Solução - Hipérbole.

IME 1966/1967, Questão 2 [valor 3,0]: A reta Δ e o ponto F são respectivamente uma tangente e o foco direito de uma elipse com 80 mm de distância focal e 0,8 de excentricidade. Pedem-se: (a) Determinar os vértices, o outro foco e o centro da elipse; (b) Traçar o suporte Δ_1 do diâmetro conjugado da direção Δ; (c) Traçar a circunferência do círculo equivalente à elipse e que a tangencie na extremidade superior da corda focal mínima relativa ao foco direito.

Construção: (a.i) Determine o ponto F_1, simétrico de F em relação à reta Δ; (a.ii) Trace $C_1 \equiv (F, 8 \text{ cm})$ e $C_2 \equiv (F_1, 10 \text{ cm})$, cuja interseção à esquerda de F é o outro foco F'; (a.iii) Determine o ponto O, médio de FF' e marque $OA = OA' = 5$ cm sobre o prolongamento de FF' e $OB = OB' = 3$ cm sobre a perpendicular por O a FF'. (b.i) Trace $F'F_1$, cuja interseção com a tangente Δ é o ponto de tangência T; (b.ii) A direção do diâmetro conjugado Δ_1 de Δ é determinada por TO. (c.i) Determine a quarta proporcional $a : b = b : x$ e marque $FM = x$, perpendicular a FF' por F; (c.ii) Trace $C_3 \equiv (F', 10 \text{ cm})$, cuja interseção com o prolongamento de $F'M$ é o ponto M'; (c.iii) Trace a mediatriz t de $M'F$, determinando a tangente à elipse no ponto M; (c.iv) Trace a perpendicular à reta t por M, e marque a distância $MO' = r = \sqrt{ab}$; (c.v) Trace a circunferência desejada $C_4 \equiv (O', r)$.



IME 1966/1967, Questão 2, Itens (a) e (b): Solução.



IME 1966/1967, Questão 2, item (c): Solução.

Justificativa: (a) Pelos dados do problema, têm-se

$$\left\{\begin{array}{l} 2c = 8 \text{ cm} \\ \frac{c}{a} = 0{,}8 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 5 \text{ cm} \\ b = 3 \text{ cm} \\ c = 4 \text{ cm} \end{array}\right. .$$

A tangente Δ é mediatriz de FF_1, onde F_1 pertence ao círculo diretor de centro F' e raio $2a = 10$ cm. Assim, F_1 é simétrico de F em relação à tangente Δ e F' pode ser determinado pelas relações

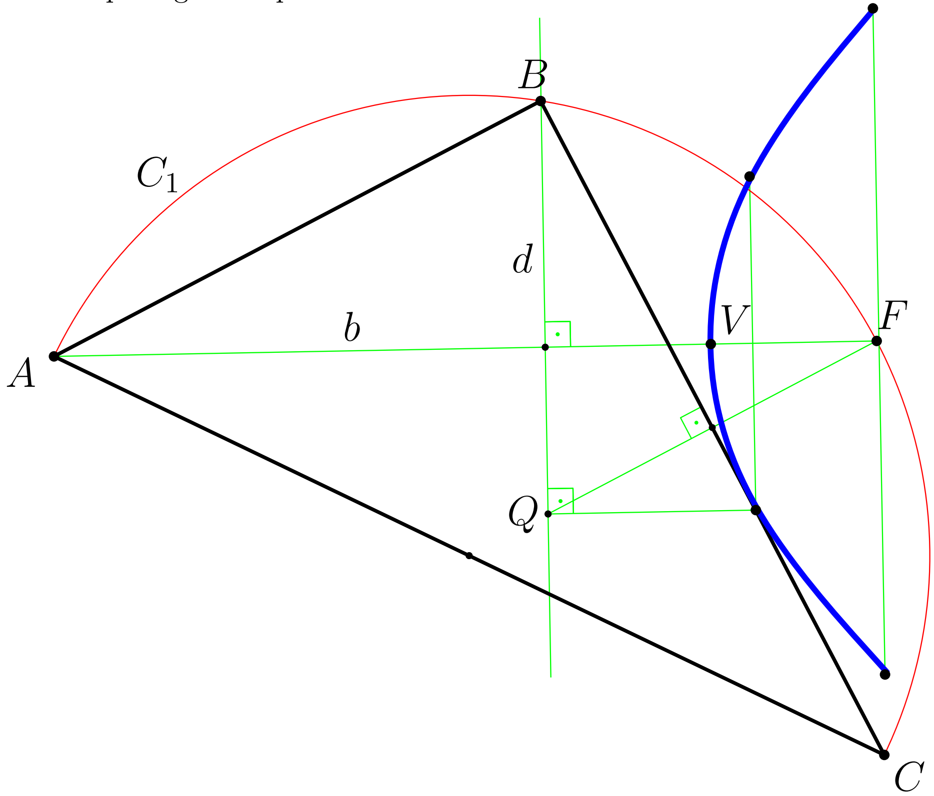
$$\left\{\begin{array}{l} FF' = 2c = 8 \text{ cm} \\ F_1F' = 2a = 10 \text{ cm} \end{array}\right. .$$

Os demais pontos podem ser determinados a partir do centro O da elipse, médio de FF', usando as medidas a e b determinadas acima.
(b) Como Δ é mediatriz de FF_1, tem-se que

$$2a = F'F_1 = F'T + TF_1 = F'T + TF.$$

Assim, T pertence à elipse, sendo de fato o ponto de contato da tangente Δ, caso-limite das secantes de mesma direção. Neste limite, T pode ser visto como o *ponto médio* das interseções de Δ com a elipse. Traçando pelo centro O uma secante paralela à Δ, o ponto médio das interseções desta secante com a elipse, por simetria, é o próprio centro O. Assim, T e O determinam a direção dos diâmetros conjugados à direção Δ.
(c) A corda focal tem comprimento $FM = \frac{b^2}{a}$, sendo perpendicular a FF'. A tangente t em M é a mediatriz de $M'F$, onde M' é a interseção do prolongamento de $F'M$ com o círculo diretor $C_3 \equiv (F', 2a)$. Para que a cirunferência desejada seja tangente à elipse em M (extremo superior da corda focal), seu centro O' deve estar na perpendicular à tangente t. Igualando as áreas, tem-se que o raio da circunferência desejada é dado por $r = \sqrt{ab}$.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 5 [valor 1,0]: O triângulo ABC, retângulo em B, é formado por três tangentes a uma parábola. O foco da parábola é um ponto da bissetriz interna do ângulo A. Pede-se determinar 5 pontos de passagem da parábola.



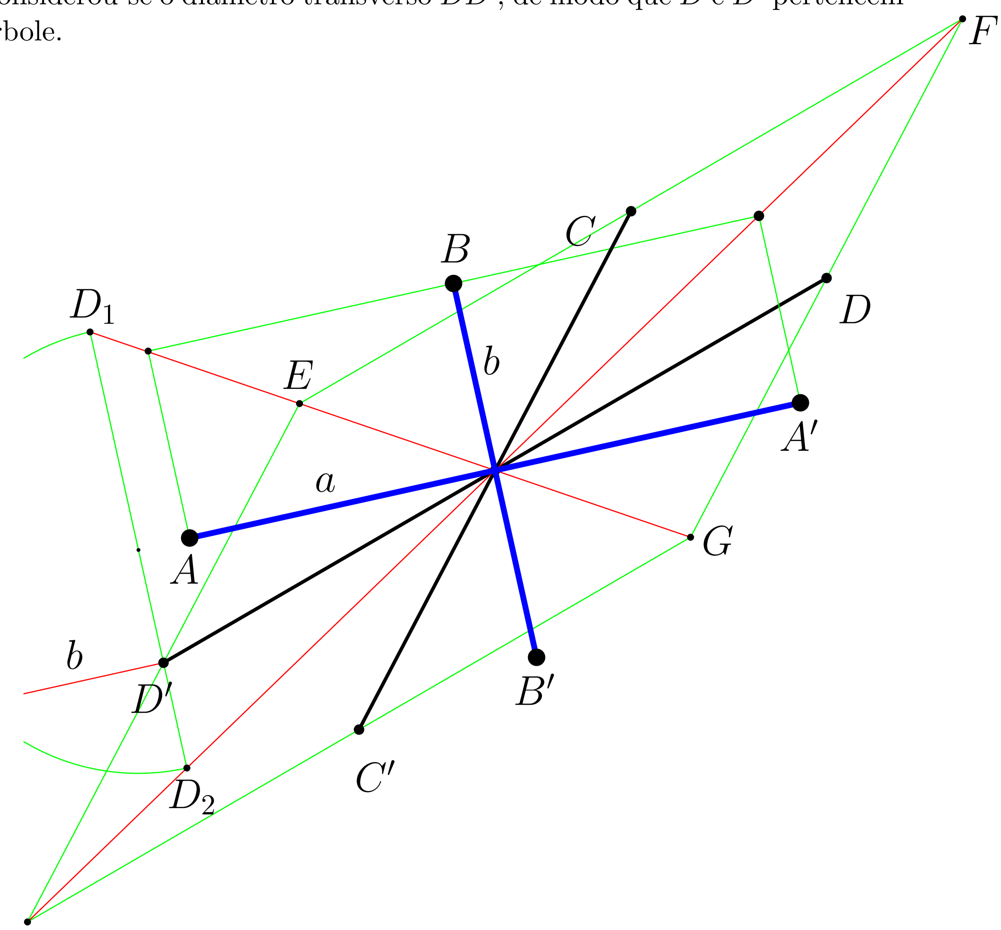
IME 1967/1968, Questão 1, Item 5: Solução.

Construção: (i) Trace o círculo C_1 circunscrito ao triângulo ΔABC; (ii) Trace a bissetriz b de $B\hat{A}C$, cuja interseção com C_1 é o foco F da parábola; (iii) Trace pelo vértice B uma perpendicular a b, determinando a diretriz d da parábola; (iv) Trace perpendiculares à diretriz por pontos Q quaisquer de d e determine as interseções destas perpendiculares com as respectivas mediatrizes de QF, obtendo os pontos desejados da parábola.

Justificativa: O foco F pertence ao círculo circunscrito ao triângulo formado pelas interseções das tangentes duas a duas ([1], Teorema 9, Parábola). Como F pertence à bissetriz b de $B\hat{A}C$, lugar geométrico dos pontos equidistantes às retas suportes de AB e AC, tangentes à parábola, então b é o próprio eixo de simetria da parábola. A diretriz d é a perpendicular a b passando pelo vértice B, encontro de duas tangentes perpendiculares ([1], Teorema 7, Parábola). Conhecendo-se d e F, os pontos da parábola são facilmente determinados.

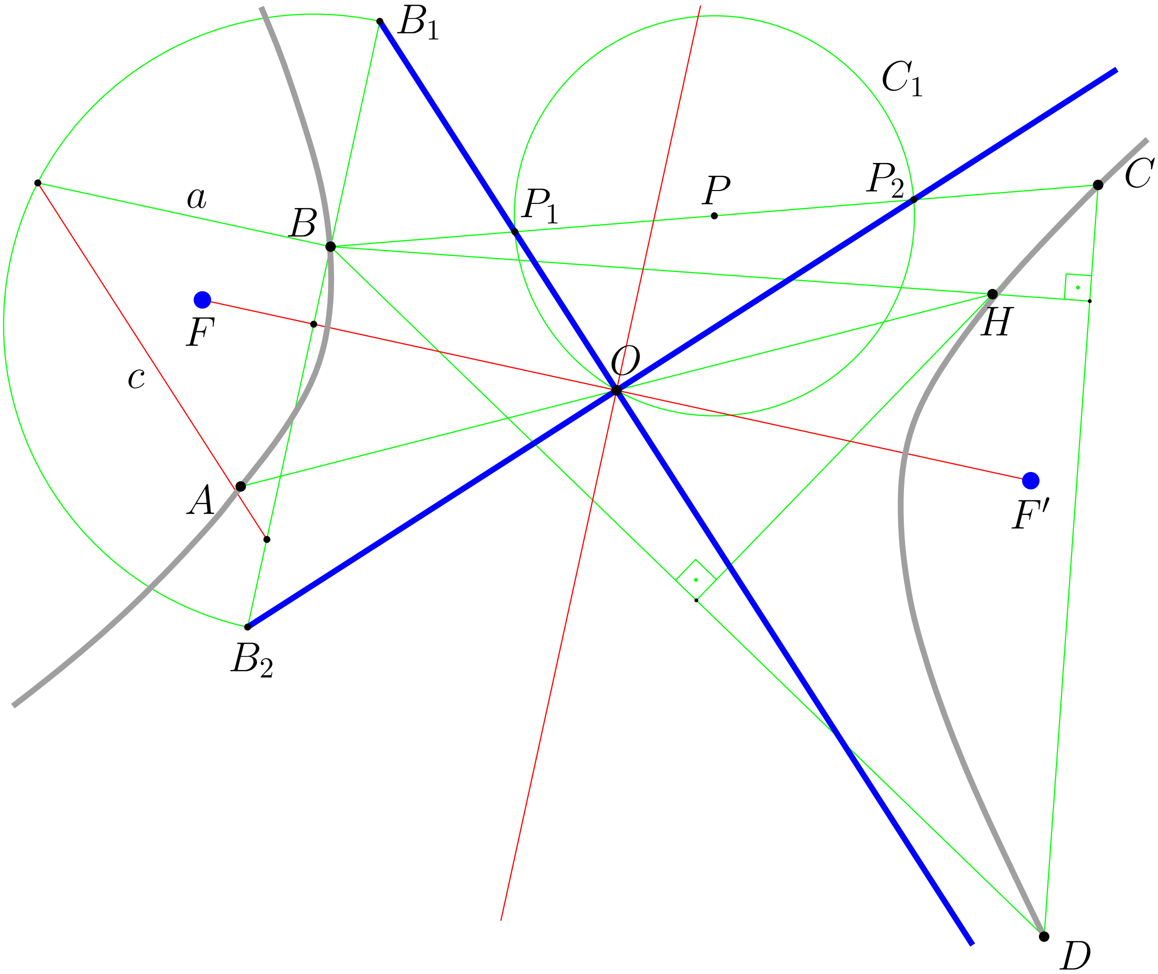
IME 1968/1969, Questão 1, Item 4 [valor 0,5]: Determinar a direção e tamanho dos eixos de uma hipérbole de diâmetros conjugados CC' e DD'.

Construção: (i) Trace por C e C' paralelas a DD' e por D e D' paralelas a CC', determinando o paralelogramo $EFGH$, cujas diagonais EG e FH são as assíntotas da hipérbole; (ii) Trace as bissetrizes dos ângulos formados por EG e FH, determinando as direções dos eixos da hipérbole; (iii) Trace por D' uma paralela ao eixo não transverso, cujas interseções com as assíntotas D_1 e D_2 permitem determinar o comprimento deste semi-eixo $\frac{BB'}{2} = b = \sqrt{DD_1 \times DD_2}$; (iv) Trace por B uma paralela ao eixo transverso, cujas interseções com as assíntotas, quando projetadas no eixo transverso, são os extremos deste eixo.
Justificativa: Ver [2], Hipérbole, Problema 13.
sln: Considerou-se o diâmetro transverso DD', de modo que D e D' pertencem à hipérbole.



IME 1968/1969, Questão 1, Item 4.

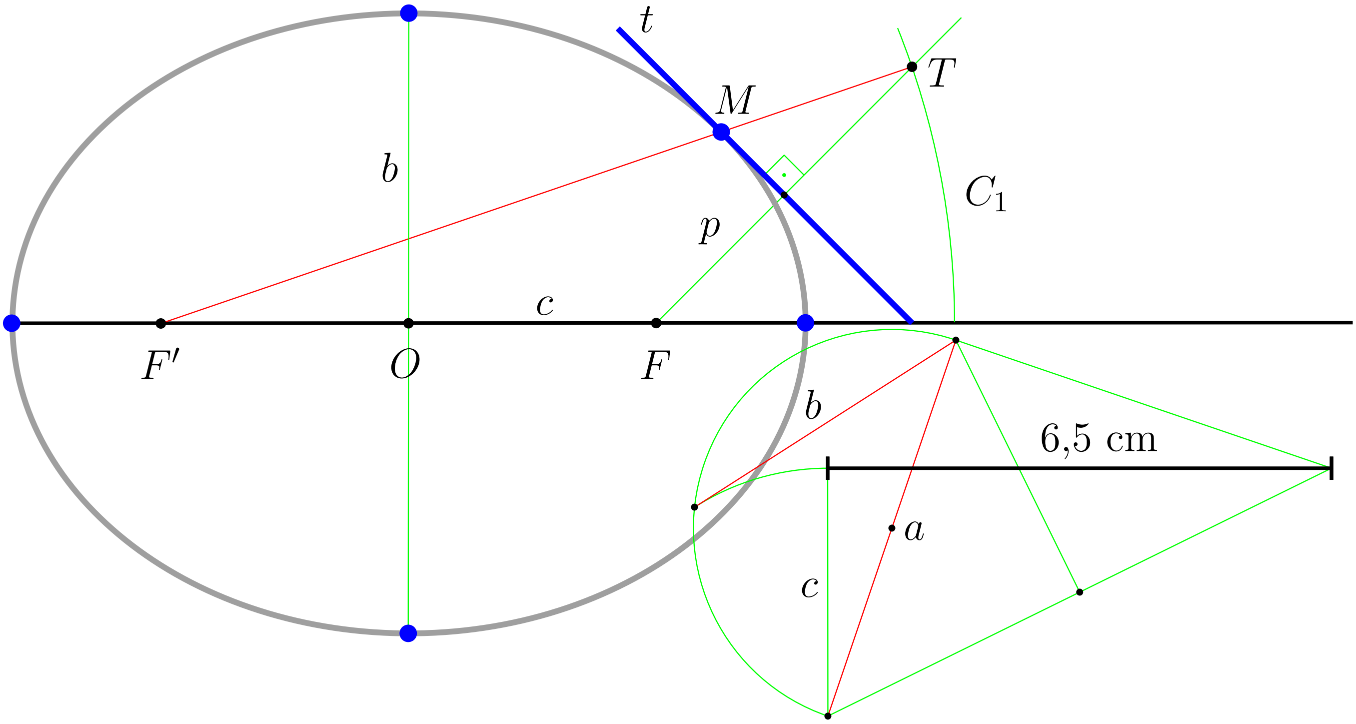
IME 1969/1970, Questão 1, Item 1 [valor 1,5]: O quadrilátero $ABCD$ inscritível tem os vértices A e B num dos ramos de uma hipérbole equilátera e os vértices C e D no outro ramo da hipérbole. Ache as assíntotas e focos da hipérbole.



IME 1969/1970, Questão 1, Item 1.

Construção (fornecida por Nikolaos e Bernard Gilbert, via Luís Lopes): (i) Determine o ortocentro H do triângulo ΔBCD; (ii) Determine o ponto médio O de HA, centro da hipérbole desejada; (iii) Sendo P o ponto médio de BC, trace $C_1 \equiv (P, PO)$, cujas interseções com BC são os pontos P_1 e P_2 tais que OP_1 e OP_2 são as assíntotas, cujas bissetrizes são os eixos da hipérbole; (iv) Trace uma perpendicular ao eixo transverso por B, determinando B_1 e B_2 sobre as assíntotas, de modo que $c = a\sqrt{2} = \sqrt{2(BB_1 \times BB_2)} = OF = OF'$, o que permite determinar os focos F e F'.

IME 1971/1972, Questão 8 [valor 1,0]: Dão-se o centro O e o foco F de uma elipse. Sabe-se que de um ponto P distante 6,5 cm do ponto O podem ser traçadas duas tangentes à elipse, perpendiculares entre si. Pedem-se: (a) Determinar, graficamente, com os dados acima, os vértices da elipse; (b) Construir uma tangente à elipse inclinada de 45º com seus eixos; (c) Achar o ponto de contato M desta mesma tangente.

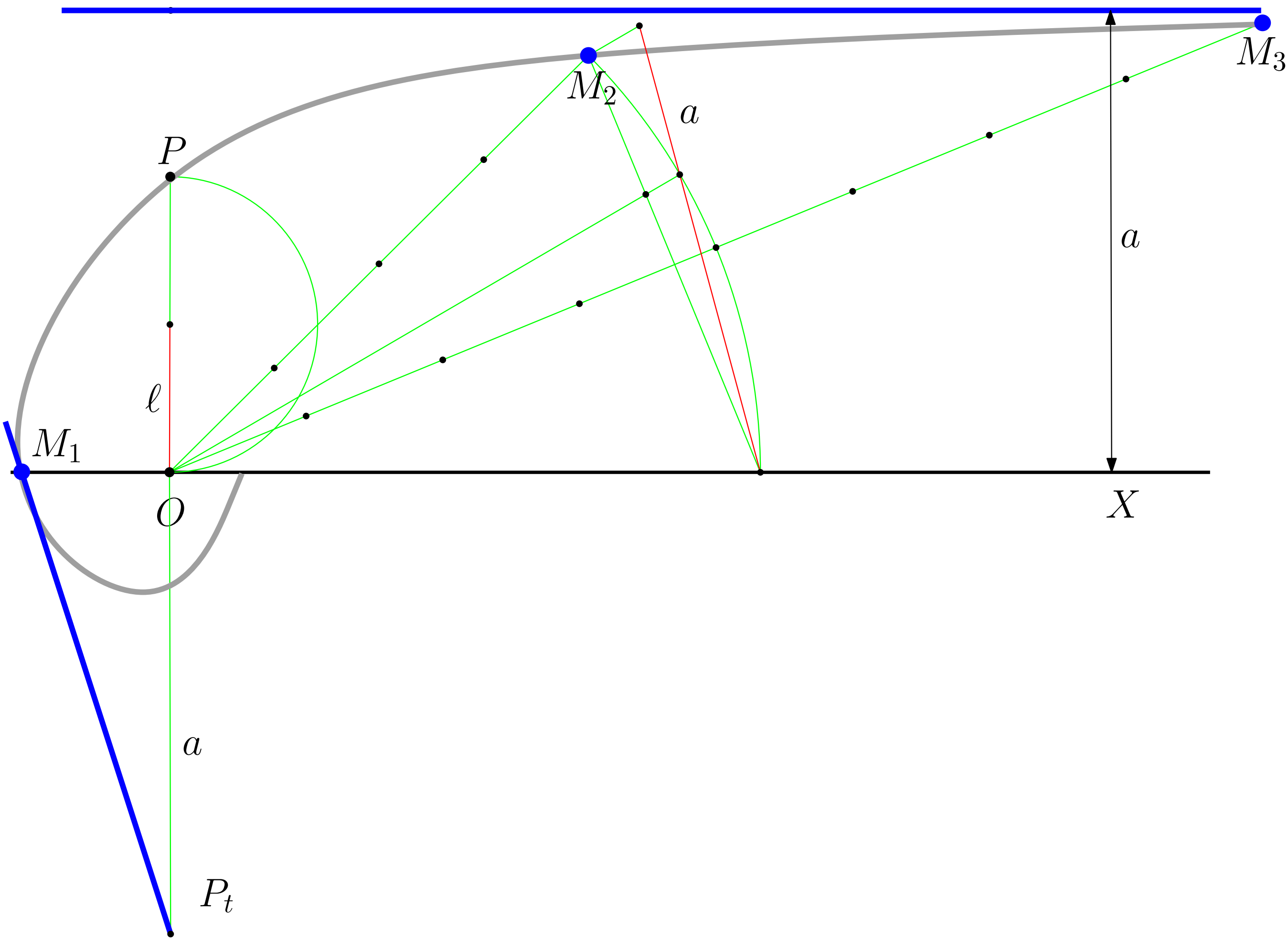


IME 1971/1972, Questão 8: Solução.

Construção: (i) Marque F' tal que O seja médio de FF'; (ii) Determine $a = \sqrt{\frac{OF^2+OP^2}{2}}$ e $b = \sqrt{a^2 - OF^2}$ e marque os vértices da elipse $OA = OA' = a$, com A e A' sobre a reta suporte de FF', e $OB = OB' = b$, com B e B' sobre a perpendicular a FF' por O; (iii) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F', 2a)$; (iv) Trace por F uma perpendicular p à direção da tangente desejada t, cuja interseção com C_1 é o ponto T; (v) Trace a mediatriz de TF, determinando t, cuja interseção com $F'T$ é o ponto de tangência M.

Justificativa: A interseção de duas tangentes perpendiculares pertence ao círculo de Monge da elipse, cujo raio é $OP = \sqrt{a^2 + b^2}$. Assim, $a = \sqrt{\frac{c^2+OP^2}{2}}$ e, conseqüentemente, $b = \sqrt{a^2 - OF^2}$, determinando os vértices da elipse e o círculo diretor $C_1 \equiv (F', 2a)$. A tangente desejada t é mediatriz de FT, com T pertencendo a C_1. Logo, FT é perpendicular a t, o que permite determinar T.

IME 1971/1972, Questão 9 [valor 1,0]: Em uma espiral hiperbólica são dados: (i) O ponto assintótico O; (ii) A direção assintótica orientada OX no sentido do ramo infinito da espiral; (iii) A distância de O ao ponto P, sendo P o ponto mais afastado da espiral sobre a perpendicular à assíntota: $OP = 4$ cm. Pedem-se: (a) Construir os pontos M_1, M_2 e M_3 da curva, mais afastados de O e tais que $M_1\hat{O}X = \pi$, $M_2\hat{O}X = \frac{\pi}{4}$, $M_3\hat{O}X = \frac{\pi}{8}$. (b) Construir a assíntota da espiral; (c) Construir a tangente no ponto M_1.



IME 1971/1972, Questão 9: Solução.

Construção: (i) Determine $\ell = \frac{OP}{2} = 2$ cm e marque as distâncias ℓ, 4ℓ e 8ℓ em ângulos π, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{8}$, respectivamente, em relação a OX, determinando os pontos M_1, M_2 e M_3; (ii) Retifique o arco do círculo (O, OM_3), entre OX e OM_3, determinando a distância a entre OX e a assíntota; (iii) Determine o ponto P_t, sobre a perpendicular a OM_1 por O, tal que $OP_t = a$, e trace a tangente desejada P_tM_1.
Justificativa: Na espiral hiperbólica, o raio vetor é inversamente proporcional ao ângulo deste com o eixo polar OX. Com isto, a medida a do arco associada ao raio vetor é constante e a assíntota é a paralela a uma distância a do eixo. Além disto, a sub-tangente por um ponto da espiral é constante e igual a a também (ver [5], pp. 263–265, ou ITA 1988, Questão 7).

IME 1971/1972, Questão 10 [valor 1,0]: Uma hipérbole equilátera H tem a diretriz distante 4 cm do seu centro O. (a) Determinar graficamente, com os dados acima, os focos e as extremidades dos eixos de H. (b) Sabendo-se que: (i) Uma diretriz da hipérbole H e seu foco são a diretriz e o foco de uma parábola P_1; (ii) A mesma diretriz, acima citada, da hipérbole H e um vértice do seu eixo não transverso, são a diretriz e o foco de uma parábola P_2. Pede-se construir as tangentes comuns às parábolas P_1 e P_2.

Construção: (i) Marque sobre o eixo transverso os focos F e F', tais que $F'O = OF = c = 8$ cm, e os vértices A e A', tais que $A'O = OA = a = 4\sqrt{2}$ cm, e sobre o eixo não transverso os vértices B e B', tais que $BO = OB' = b = 4\sqrt{2}$ cm; (ii) Trace a bissetriz b_B de $O\hat{B}F$, direção da tangente comum; (iii) Trace uma perpendicular a b_B por F, cuja interseção com d é o ponto T; (iv) Trace a mediatriz de FT, determinando a tangente comum t_1; (v) Trace a perpendicular a t_1 pelo ponto médio de BF, determinando a outra tangente comum t_2.

Justificativa: (a) Dos dados do problema, têm-se

$$\begin{cases} \frac{a^2}{c} = 4 \text{ cm} \\ c = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow c = 8 \text{ cm} \;\; \text{e} \;\; a = b = 4\sqrt{2} \text{ cm},$$

o que permite determinar os focos e os vértices de H.
(b) (Justificativa geométrica): Como t_1 é mediatriz de TF, pelo conceito de base média no triângulo ΔBTF, a interseção de t_1 com BF é o ponto M médio deste segmento. Pela simetria de B e F, o ponto M pertence a d. Logo, $BM = MF$ e $MT = MF$, de forma que $BM = MT$, indicando que o triângulo ΔBMT é isósceles com base BT. Uma análise angular simples indica que $O\hat{B}T = O\hat{F}T = B\hat{T}M = M\hat{B}T$, de forma que BT é a bissetriz de $O\hat{B}F$.
(b) (Justificativa algébrica): Considerando eixos coordenados com origem em O, com o eixo das abscissas ao longo de OF, as parábolas são descritas por

$$\begin{cases} P1 : cx + (y-b)^2 = \frac{c^2}{4} \\ P2 : cx - y^2 = \frac{3c^2}{4} \end{cases},$$

onde $P1$ e $P2$ têm focos B e F, respectivamente, e diretriz d. Assim, as tangentes genéricas de cada parábola pelos respectivos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são descritas por

$$\begin{cases} T1 : 2(y_1 - b)y = -cx + +(y_1^2 - b^2 + \frac{c^2}{4}) \\ T2 : 2y_2y = cx + (y_2^2 - \frac{3c^2}{4}) \end{cases}.$$

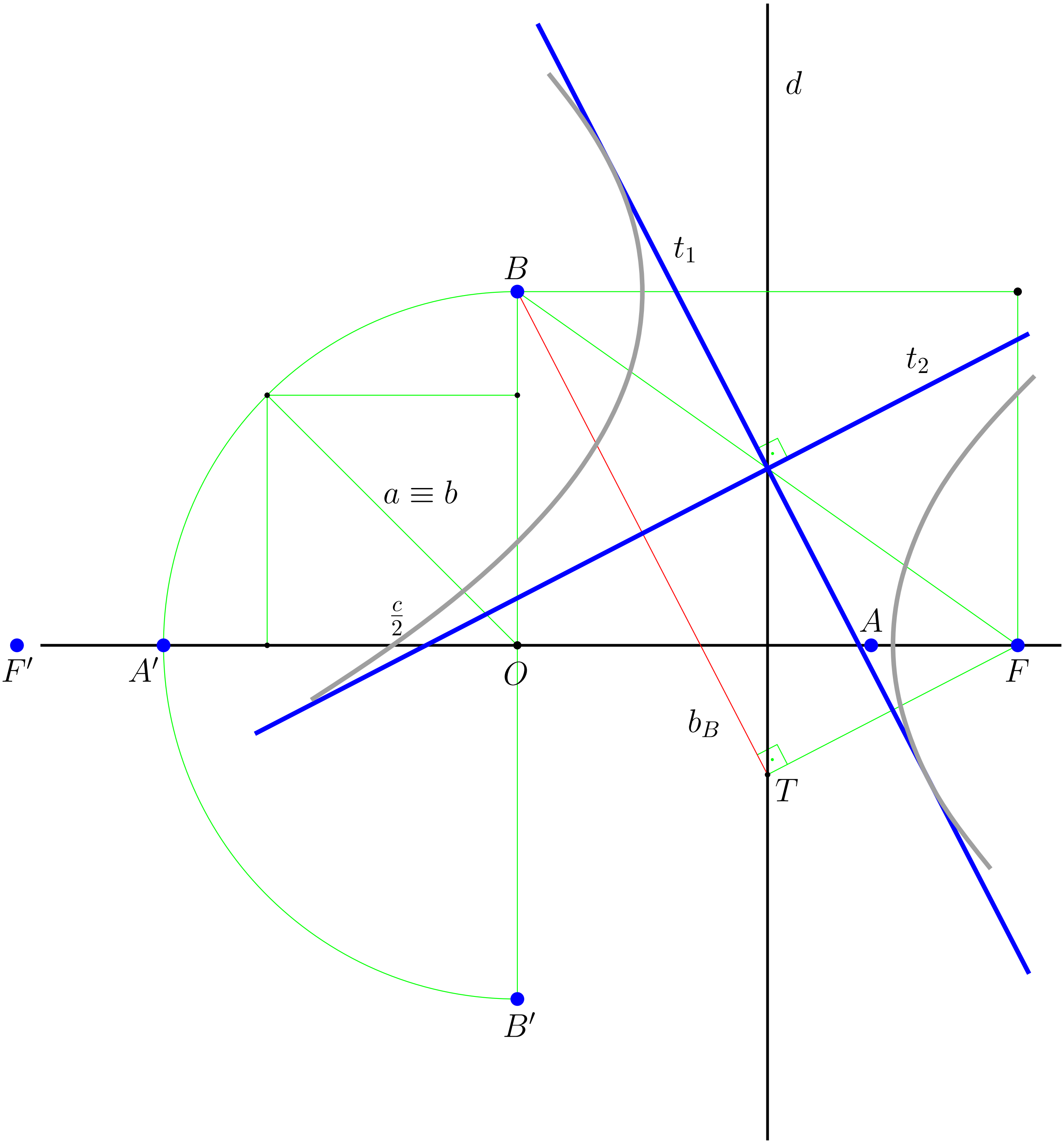
Igualando estas equações, tem-se

$$\begin{cases} y_2 = b - y_1 \\ y_1^2 - b^2 + \frac{c^2}{4} = -y_2^2 + \frac{3c^2}{4} \end{cases} \Rightarrow y_1^2 - by_1 - \frac{c^2}{4} = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + c^2}}{2}.$$

Substituindo as soluções para y_1 na equação de $T1$ e considerando $c = b\sqrt{2}$, tem-se a equação geral das tangentes comuns:

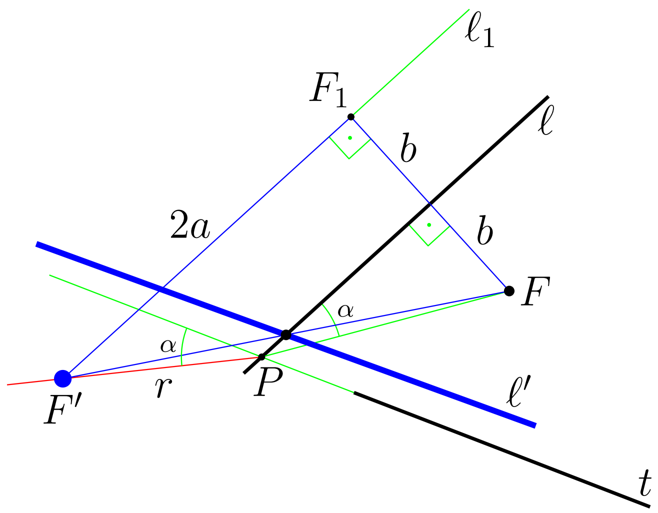
$$T : y = -(1 \pm \sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2}x + (2 \pm \sqrt{3})\frac{b}{2}.$$

Multiplicando os coeficientes angulares das duas tangentes, obtém-se o produto -1, indicando que as duas tangentes são perpendiculares. Além disto, usando $x = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$, tem-se $y = \frac{b}{2}$ para as duas tangentes, indicando que ambas passam pelo ponto médio de BF.



IME 1971/1972, Questão 10: Solução.

IME 1983/1984, Questão 7, Item B: Em uma hipérbole (h) são dados: um foco F, uma assíntota (ℓ) e uma tangente (t). Pede-se determinar graficamente o outro foco, a outra assíntota e os comprimentos dos eixos, justificando a construção executada.



IME 1983/1984, Questão 7, Item B: Solução.

Construção: (i) Determine o simétrico F_1 de F em relação a ℓ e trace por F_1 uma paralela ℓ_1 a ℓ; (ii) Determine o ângulo α entre as retas ℓ e PF, onde P é a interseção de ℓ e t; (iii) Por P, entre os prolongamentos de ℓ e t, trace uma reta r fazendo um ângulo α com t, determinando o foco desejado F', interseção de ℓ_1 e r; (iv) A outra assíntota ℓ' é a reta simétrica de ℓ em relação a FF'; (v) As distâncias desejadas são $2a = F'F_1$, $2b = FF_1$ e $2c = FF'$.
Justificativa: O outro foco F' é simétrico de F em relação à assíntota dada. Logo, F' pertence a ℓ_1. Considerando que uma assíntota é, no limite, uma tangente, então, pelo teorema de Poncelet, F' também pertence a r, já que esta reta faz o mesmo ângulo α com a tangente t que PF faz com ℓ. Isto permite determinar F', e, em seguida, por simetria, a outra assíntota ℓ'.

Esta mesma simetria usada para determinar ℓ' torna FF' bissetriz do ângulo formado por ℓ e ℓ'. Como ℓ_1 é paralelo a ℓ e $FF' = 2c$, o triângulo $\Delta FF_1F'$, retângulo em F_1, permite determinar as medidas dos eixos da hipérbole.

Referências

[1] C. da C. P. Brandão, *Desenho*, vol. 2, Sistema Impacto de Ensino.

[2] A. Ribeiro, *Desenho Geométrico*, vol. MG-7, Colégio Dom Bosco.

[3] E. Wagner (com J. P. Q. Carneiro), *Construções Geométricas*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 5ª ed., 2000.

[4] S. L. Netto, *Problemas Selecionados de Desenho Geométrico*, www.lps.ufrj.br/profs/sergioln/geometria.html, vol. 1, versão 3, Out. 2007.

[5] B. de A. Carvalho, *Desenho Geométrico*, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 3ª ed., 1982.