PROBLEMAS SELECIONADOS
DE DESENHO GEOMÉTRICO
Parte II: Polígonos e Círculos

Sergio Lima Netto

sergioℓn@ℓps.ufrj.br

versão 2

julho de 2008

Prólogo

Foi feito um grande esforço para reproduzir os desenhos que acompanham as questões da forma mais fiel possível, tanto para efeito de registro quanto para se determinar a resposta na escala desejada. Tenho que confessar que em alguns casos foi necessário um pequeno ajuste (em geral, não mais do que 1% da escala) para gerar o resultado desejado.

Em relação às provas do ITA, minhas fontes incluem cópias das provas (79–88), na escala original, distribuídas pelo Colégio Princesa Isabel, gentilmente fornecidas pelo amigo Alessandro J. S. Dutra; cópias dos gabaritos (de 79, 80, 82–88, 93) fora da escala, disponibilizados pelo Curso Etapa através do site www.rumoaoita.com; originais das provas de 83 e 84.

Em relação às provas do IME, minha principal fonte das questões mais antigas foi uma pesquisa nos arquivos da própria instituição, no que fui auxiliado pelo Sub-Tenente Petrenko e sua equipe, a quem devo muitos agradecimentos.

Como na Parte I, procurei acompanhar cada solução de uma breve análise do problema e de uma figura adequada, onde usei a seguinte legenda de cores:

- preto: dados do problema;
- verde: contruções auxiliares básicas;
- vermelho: elemento-chave para minha solução;
- azul: elemento desejado pelo problema.

Como antes, a notação $\mathcal{C}(O, r)$ indica um círculo de centro O e raio r.

Nesta versão 2, foi incluída a solução para ITA 1993, Questão 22, e IME 1969/1970, Questão 1, Item 2. Com isto, todas as questões possuem pelo menos uma solução.

Rio, julho de 2008

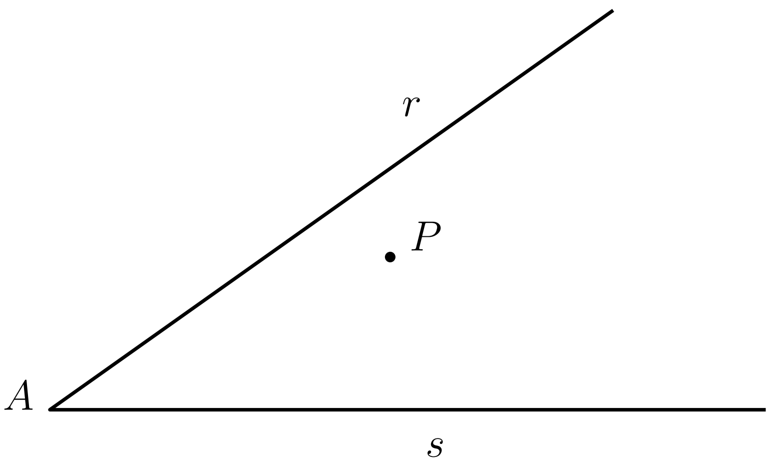
Sergio L. Netto
sergioℓn@ℓps.ufrj.br

1 Questões da FUVEST

FUVEST 1996, Questão 10: Na figura abaixo são dadas duas semi-retas r e s de mesma origem A e um ponto P.

a) Utilize essa figura para construir, usando régua e compasso, os pontos B em r e C em s de tal forma que o ponto P pertença ao segmento BC e que AB seja igual a AC.

b) Descreva e justifique o processo utilizado na construção.



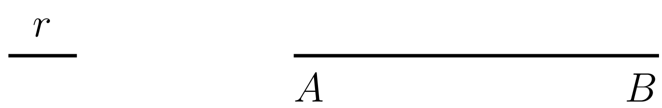
FUVEST 1996, Questão 10.

FUVEST 1997, Questão 10:

a) Dados AB e um segmento de medida r, construa, usando régua e compasso, um triângulo isósceles sabendo que sua base é AB e o raio da circunferência inscrita nesse triângulo é r.

b) Descreva as construções feitas.

c) Justifique o porquê de cada construção.

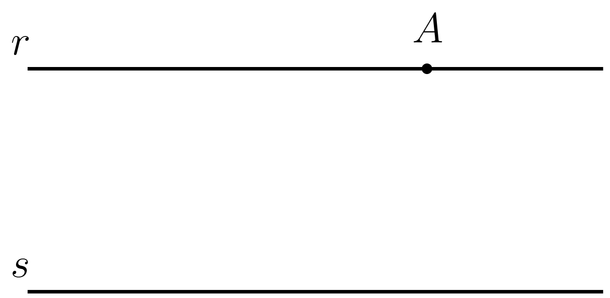


FUVEST 1997, Questão 10.

FUVEST 1998, Questão 10:

a) Dadas as retas paralelas r e s e um ponto A em r, construa um triângulo equilátero com um vértice em A, outro vértice em r e o terceiro vértice em s.

b) Descreva e justifique as construções feitas.

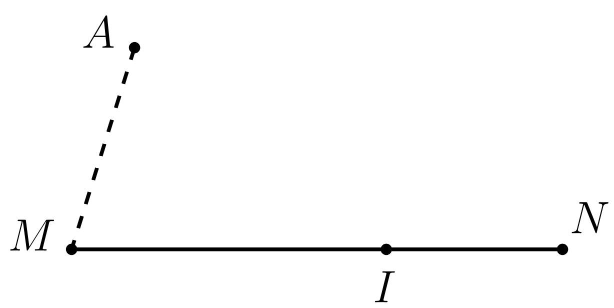


FUVEST 1998, Questão 10.

FUVEST 1999, Questão 10:

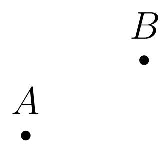
a) Construa com régua e compasso, um trapézio $ABCD$, onde AB seja paralelo a CD, conhecendo-se os pontos A, M, N e I, que satisfazem as seguintes condições: M é o ponto médio do lado AD, N é o ponto médio de BC e I é o ponto de intersecção do segmento MN com a reta que passa por B e é paralela a AD.

b) Descreva e justifique a construção feita.



FUVEST 1999, Questão 10.

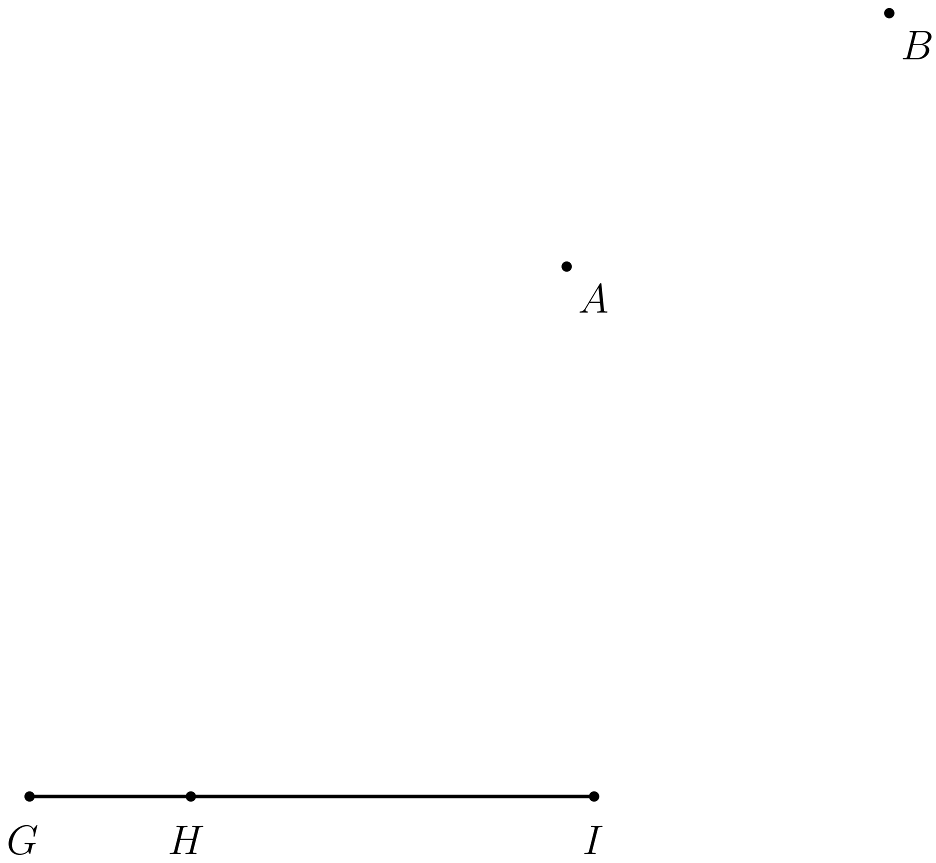
FUVEST 2000, Questão 10: São dados os pontos A e B. Usando uma régua e compasso, construa a circunferência circunscrita a um polígono regular de 12 lados, que tem o segmento AB como um de seus lados. Descreva e justifique as construções utilizadas.



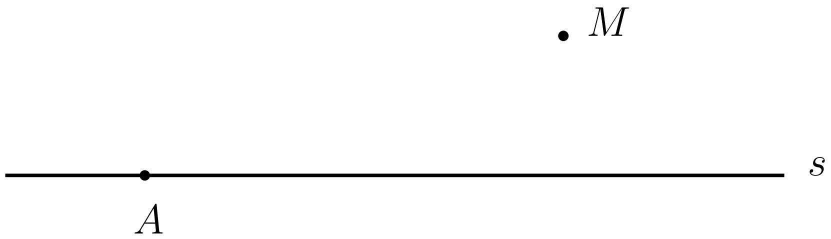
FUVEST 2000, Questão 10.

FUVEST 2001, Questão 10: São dados os pontos A e B e um segmento contendo os pontos G, H e I. Sabe-se que A e B pertencem, respectivamente, às diagonais CE e DF de um quadrado $CDEF$, cujo centro é O. A distância de A a O é igual a GH e a medida do lado do quadrado é igual a GI. Construa, usando régua e compasso, um quadrado $CDEF$, satisfazendo as condições acima. Descreva e justifique as construções utilizadas.

FUVEST 2002, Questão 10: São dados os pontos A e M e a reta s. Sabe-se que o ponto A é vértice de um paralelogramo $ABCD$; o lado AB está na reta s; M é o ponto médio do lado BC e o ângulo $C\hat{A}B$ tem medida 30^o. Usando régua e compasso, construa esse paralelogramo. Descreva e justifique sua construção.



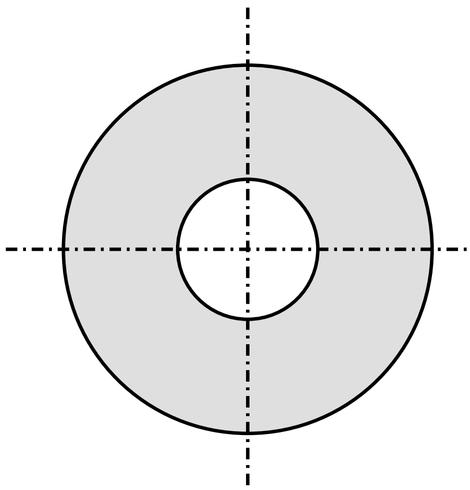
FUVEST 2001, Questão 10.



FUVEST 2002, Questão 10.

2 Questões do ITA

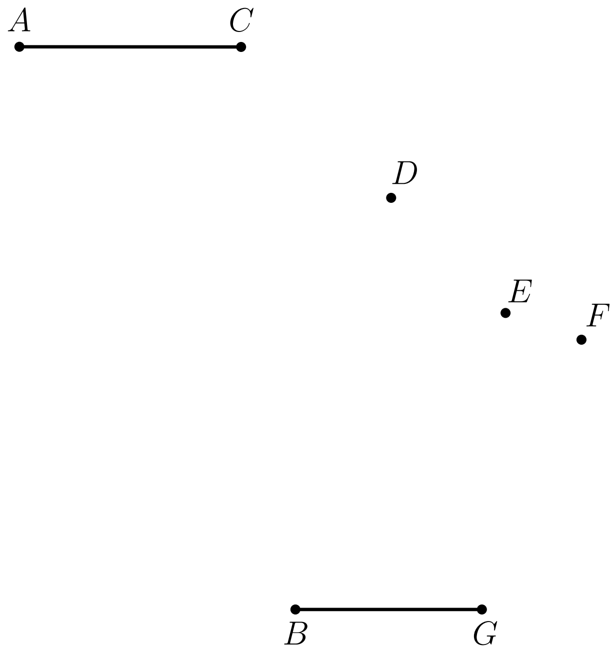
ITA 1979, Questão 11: Determinar, por construção geométrica, o comprimento da diagonal de um quadrado de área equivalente à da coroa da figura representada a seguir.
(A) 47 mm (B) 57 mm (C) 45 mm (D) 50 mm (E) 62 mm



ITA 1979, Questão 11.

ITA 1979, Questão 14: Os segmentos AC e BG são partes de um duto, representado por seu eixo e que, do ponto C ao ponto G, é encurvado em quatro arcos de circunferência que concordam nos pontos C, D, E, F e G, conforme a figura a seguir. Pede-se o comprimento do duto, no desenho na escala 1:2,5.

(A) 430 mm (B) 380 mm (C) 530 mm (D) 330 mm (E) 480 mm



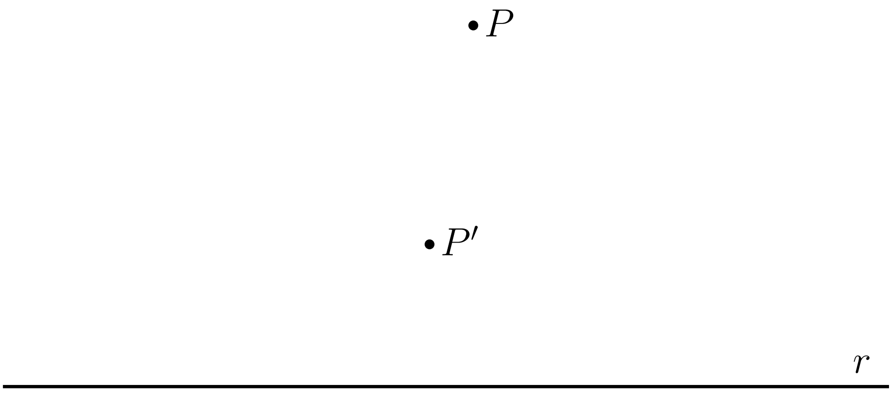
ITA 1979, Questão 14.

ITA 1979, Questão 15: Determinar a soma dos raios de duas circunferências inscritas num triângulo ABC, tangentes aos lados deste e entre elas, sendo dado o ângulo $\hat{A} = 35^o$, a mediana relativa ao lado BC, igual a 96 mm, e a mediana relativa ao lado AC, igual a 60 mm.

(A) 45 mm (B) 39 mm (C) 28 mm (D) 34 mm (E) 40 mm

ITA 1980, Questão 16: São dados dois pontos P e P' e uma reta r. Determinar a soma dos raios das circunferências que contêm os pontos e são tangentes à reta.

(A) 60 mm (B) 65 mm (C) 81 mm (D) 74 mm (E) 69 mm



ITA 1980, Questão 16.

ITA 1980, Questão 17: Um compressor centrífugo é acionado por um motor elétrico, sendo usada uma correia chata, suposta inteiramente tensa e de espessura desprezível. Sabendo-se que:

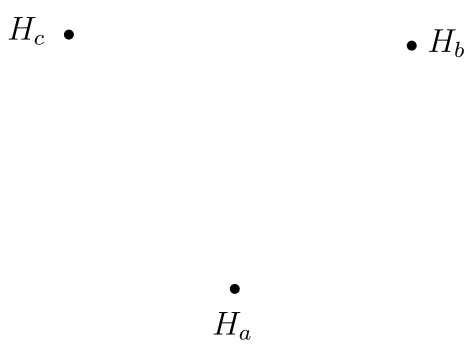
- A polia do motor é de raio r_1 e de centro C_1.
- A polia do compressor é de raio r_2 e de centro C_2.
- $r_1 = 200$ mm, $r_2 = 400$ mm, $C_1C_2 = 1000$ mm.

Pede-se determinar o comprimento real da correia, sendo a escala 1:10.

(A) 3820 mm (B) 4020 mm (C) 3940 mm (D) 3860 mm (E) 4000 mm

ITA 1980, Questão 18: Determinar o comprimento da mediana em relação ao vértice B de um triângulo ABC, do qual conhecemos os pés das alturas H_a, H_b e H_c, sabendo-se que o ângulo $\hat{A}$ é obtuso.

(A) 56 mm (B) 61 mm (C) 72 mm (D) 75 mm (E) 80 mm



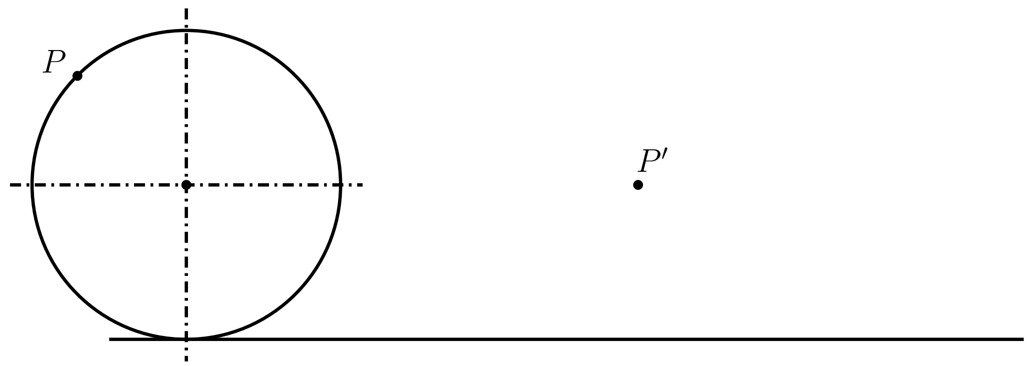
ITA 1980, Questão 18.

ITA 1980, Questão 19: Os lados e a base de um triângulo isósceles são os segmentos áureos da média proporcional de dois segmentos que medem, respectivamente, 60 e 90 mm. Determinar o semi-perímetro deste triângulo, considerando o menor segmento como a base.

(A) 50 mm (B) 55 mm (C) 70 mm (D) 64 mm (E) 59 mm

ITA 1981, Questão 16: São dados uma circunferência de raio igual a 20 mm, um ponto P na mesma, um ponto P' distante de seu centro e uma reta r, como mostra a figura abaixo. Rolando a circunferência sem escorregar sobre a reta, partindo do ponto P, desenvolver 315º no sentido horário. Determinar a distância do centro da circunferência até o ponto P', quando a mesma completar o ângulo dado.

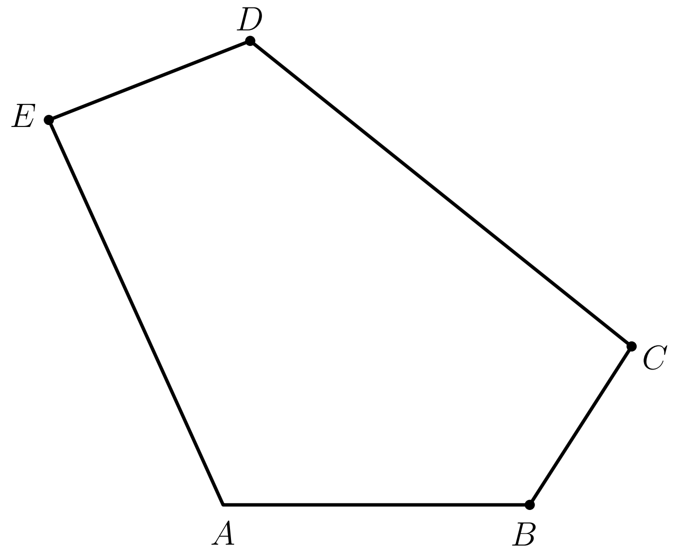
(A) 28 mm (B) 22 mm (C) 50 mm (D) 41 mm (E) 33 mm



ITA 1981, Questão 16.

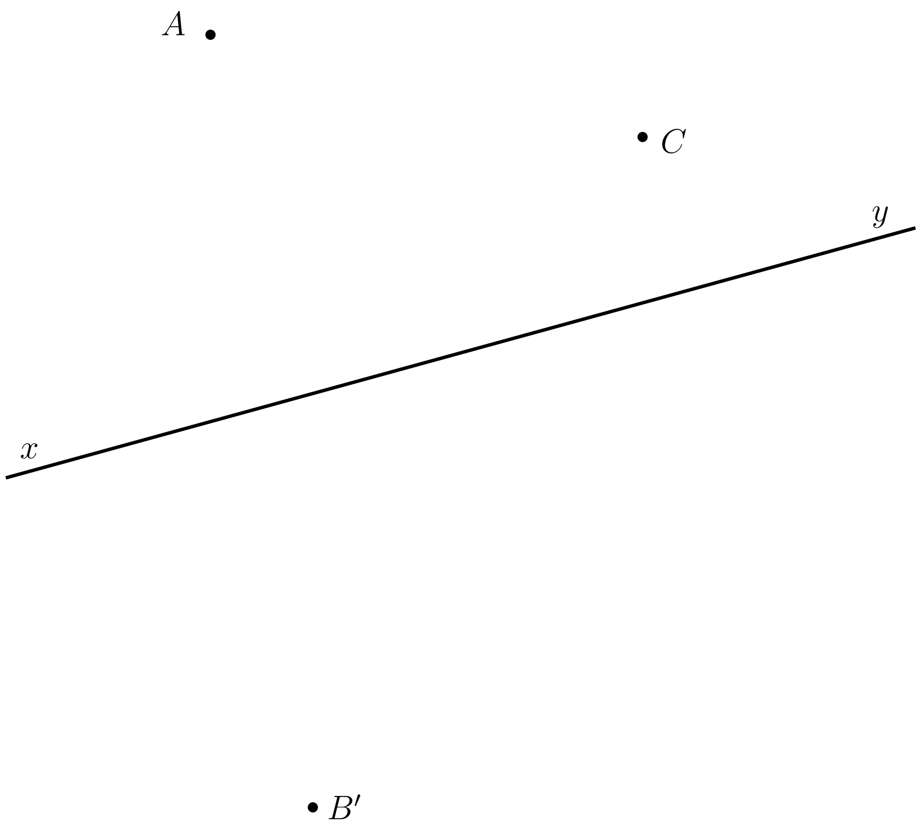
ITA 1981, Questão 19: Determinar o perímetro do trapézio de bases AB e EF equivalente ao pentágono $ABCDE$.

(A) 215 mm (B) 210 mm (C) 244 mm (D) 225 mm (E) 220 mm



ITA 1981, Questão 19.

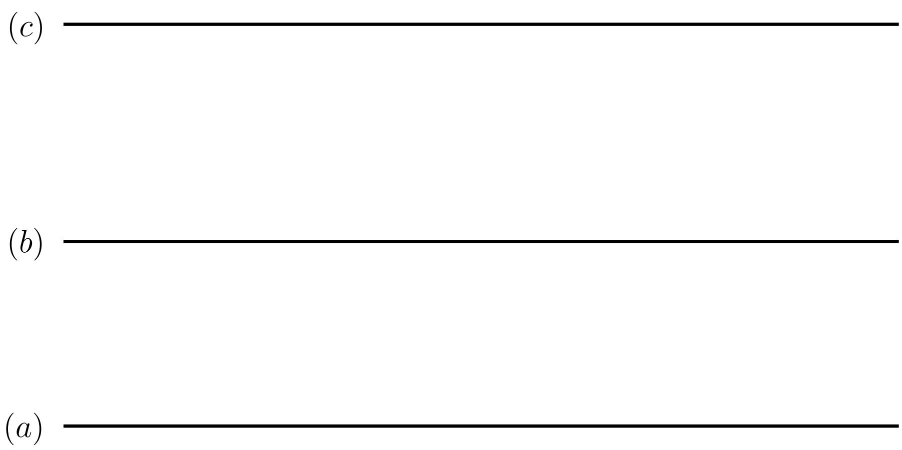
ITA 1981, Questão 20: Achar a área, em milímetros quadrados, da figura afim do quadrado $ABCD$ (sentido horário), do qual conhecemos sua diagonal AC e o ponto B', afim do vértice B. A reta xy é o eixo de afinidade.
(A) 1220 mm^2 (B) 1678 mm^2 (C) 1125 mm^2 (D) 1530 mm^2 (E) 1350 mm^2



ITA 1981, Questão 20.

ITA 1982, Questão 16: As retas a, b e c são lugares geométricos de três pontos, respectivamente, A, B e C, que pertencem a uma circunferência. Sabendo-se que nesta circunferência o arco AB mede 120° e o arco BC mede 60°, pergunta-se qual o valor de seu raio.

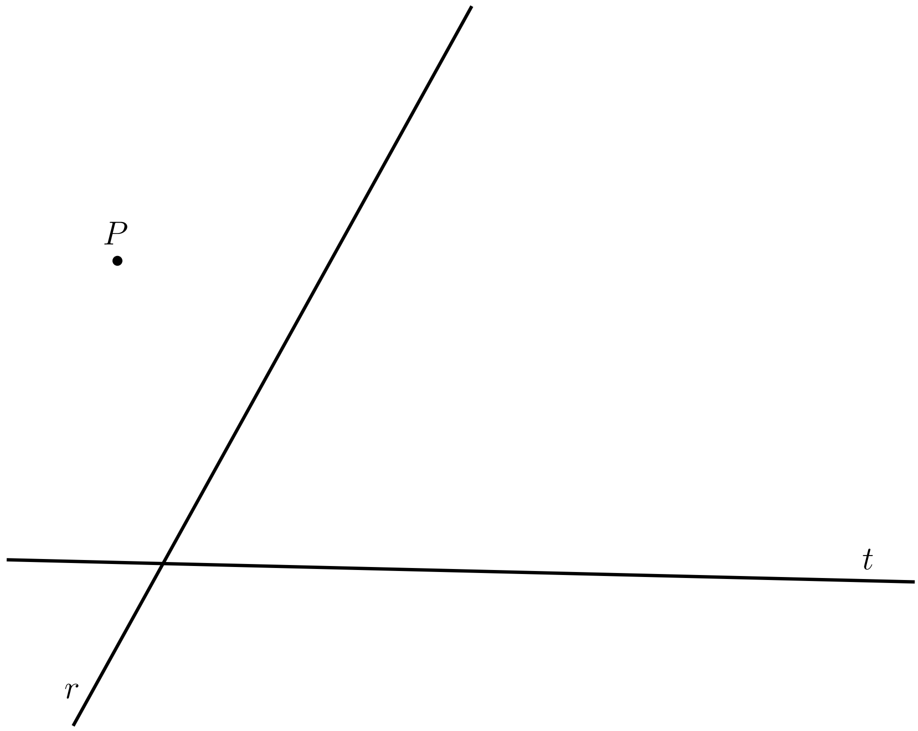
(A) 32 mm (B) 37 mm (C) 52 mm (D) 47 mm (E) 42 mm



ITA 1982, Questão 16.

ITA 1982, Questão 17: São dadas duas retas r e t e um ponto P. Determinar o raio da circunferência que passa por P, é tangente à reta t, sendo a reta r o lugar geométrico do centro O.

(A) 32 mm (B) 19 mm (C) 41 mm (D) 25 mm (E) 38 mm



ITA 1982, Questão 17.

ITA 1982, Questão 18: M_b e M_c são, respectivamente, os pontos médios dos lados b e c de um triângulo ABC. Sabendo-se que o ângulo do vértice A é igual a 60° e que a altura conduzida deste mesmo vértice A mede 42 mm, pergunta-se o valor do perímetro do triângulo.

(A) 115 mm (B) 250 mm (C) 126 mm (D) 203 mm (E) 227 mm

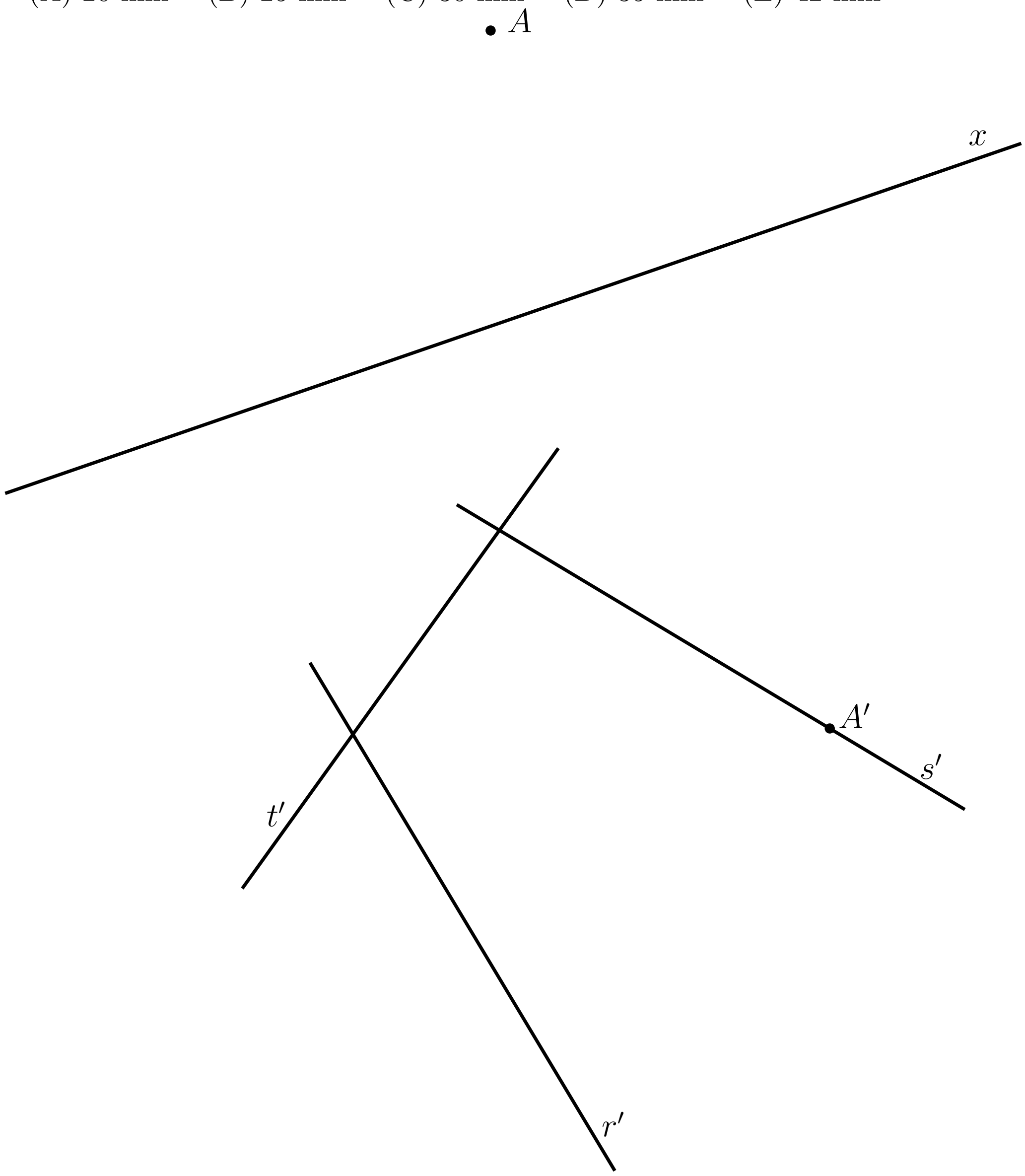
ITA 1982, Questão 18.

ITA 1982, Questão 20: A um ajustador mecânico é fornecida uma chapa de aço, retangular. Pede-se o apótema do maior pentágono que pode ser riscado nesta chapa, sabendo-se que as dimensões desta são, respectivamente, a 3ª proporcional e a média proporcional dos valores 150 mm e 125 mm. A resposta deverá ser indicada na escala 1:2,5.

(A) 35 mm (B) 43 mm (C) 25 mm (D) 17 mm (E) 14 mm

ITA 1983, Questão 16: As retas r', s' e t' são figuras afins das retas r, s e t. Determinar o raio da circunferência tangente às retas r, s e t, sabendo-se que os pontos A e A' são pontos afins e x é o eixo de afinidade.

(A) 20 mm (B) 25 mm (C) 30 mm (D) 35 mm (E) 42 mm



ITA 1983, Questão 16.

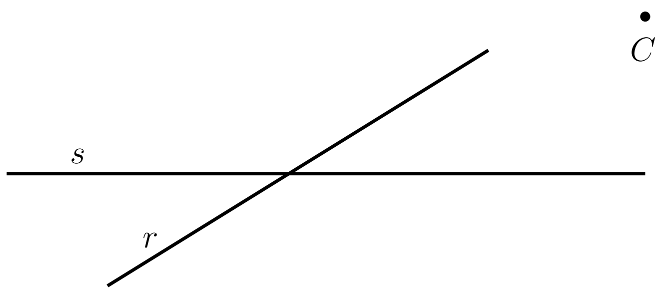
ITA 1983, Questão 17: Determinar o comprimento aproximado do lado oposto ao vértice A de um triângulo qualquer, sendo dados os lados ℓ_1 e ℓ_2 que definem o vértice A. É conhecido também o comprimento da bissetriz b_A, de origem em A.

- $\ell_1 = 50$ mm $\quad \ell_2 = 33$ mm $\quad b_A = 22$ mm

(A) 55 mm (B) 70 mm (C) 60 mm (D) 45 mm (E) 78 mm

ITA 1983, Questão 18: São dadas as retas r e s e um ponto C. Construir um hexágono regular, tal que tenha o ponto C como centro da circunferência circunscrita e dois vértices opostos do hexágono estão um sobre a reta r e outro sobre a reta s. Determinar graficamente o lado do quadrado de área equivalente à do hexágono.

(A) 60 mm (B) 45 mm (C) 35 mm (D) 40 mm (E) 50 mm



ITA 1983, Questão 18.

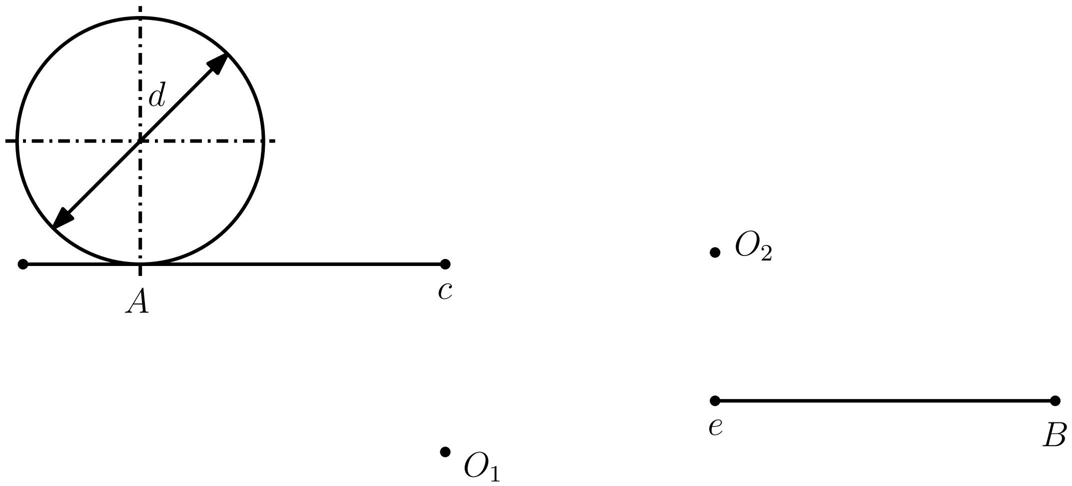
ITA 1983, Questão 19: Determinar graficamente a altura do trapézio $ABCD$, conhecendo-se:

- Base $AB = 92$ mm; Base $CD = 55$ mm.
- A diagonal BD é média proporcional dos segmentos AB e CD.
- O ponto E é o ponto de concurso das retas suportes dos lados AD e BC e o ângulo $A\hat{E}B = 30^o$.
- Identificação dos pontos A, B, C e D no sentido anti-horário.

(A) 21 mm (B) 26 mm (C) 35 mm (D) 56 mm (E) 46 mm

ITA 1983, Questão 20: Uma roda de diâmetro d está em repouso, apoiada sobre a semi-reta de origem c, no ponto A. Em dado instante é posta em movimento, girando, sem deslizar, até atingir o ponto B, onde pára. Sabendo-se que os pontos c e e são ligados por dois arcos de circunferência, de centros O_1 e O_2, e considerando que a roda, para completar o trajeto, deu duas voltas completas, determinar o valor aproximado de seu diâmetro. A solução terá que ser inteiramente gráfica.

(A) 30 mm (B) 15 mm (C) 20 mm (D) 35 mm (E) 40 mm



ITA 1983, Questão 20.

ITA 1984, Questão 16: Um topógrafo pretende medir a altura de uma torre. Para tanto localiza o teodolito num ponto A conveniente e faz uma visada horizontal para o ponto B localizado a 100 m de distância. Em seguida visa o topo da torre (ponto C) verificando ser de 40º o ângulo que o teodolito forma com a horizontal. Determinar a altura da torre, sabendo-se ser esta a média proporcional da distância AB. O visor do teodolito está a 1,50 m do solo. Escala: 1:10^3

(A) 71,50 mm (B) 62,0 mm (C) 55,5 mm (D) 66,0 mm (E) 50,5 mm

ITA 1984, Questão 17: Determinar, graficamente, o comprimento desenvolvido de um anel de diâmetro externo D (75 mm) e diâmetro interno d (25 mm) usando equivalência de áreas.

(A) 157 mm (B) 161 mm (C) 150 mm (D) 175 mm (E) 166 mm

ITA 1984, Questão 18: Determinar, graficamente, a altura referida ao lado AB de um triângulo ABC, conhecendo-se o valor das medianas M_B e M_C, bem como o comprimento do lado BC.

- $M_B = 90$ mm; $M_C = 60$ mm; $BC = 63$ mm.

(A) 60 mm (B) 45 mm (C) 64 mm (D) 72 mm (E) 51 mm

ITA 1984, Questão 19: Construir um quadrilátero $ABCD$ que seja inscritível e tal que nele seja inscrita uma circunferência de centro O e raio r (25 mm). Determinar o raio da circunferência que circunscreve o quadrilátero, sabendo-se que seu lado AB mede 90 mm.

(A) 42 mm (B) 47 mm (C) 52 mm (D) 57 mm (E) 61 mm

ITA 1984, Questão 19.

ITA 1985, Questão 16: Determinar, aproximadamente, o perímetro de um triângulo ABC (assinalado no sentido horário), sendo dado um dos lados AB, igual a 75 mm. O ângulo do vértice A é igual a 135º e a altura conduzida do vértice C ao lado AB é igual ao segmento áureo desse lado.

(A) 250 mm (B) 225 mm (C) 312 mm (D) 270 mm (E) 306 mm

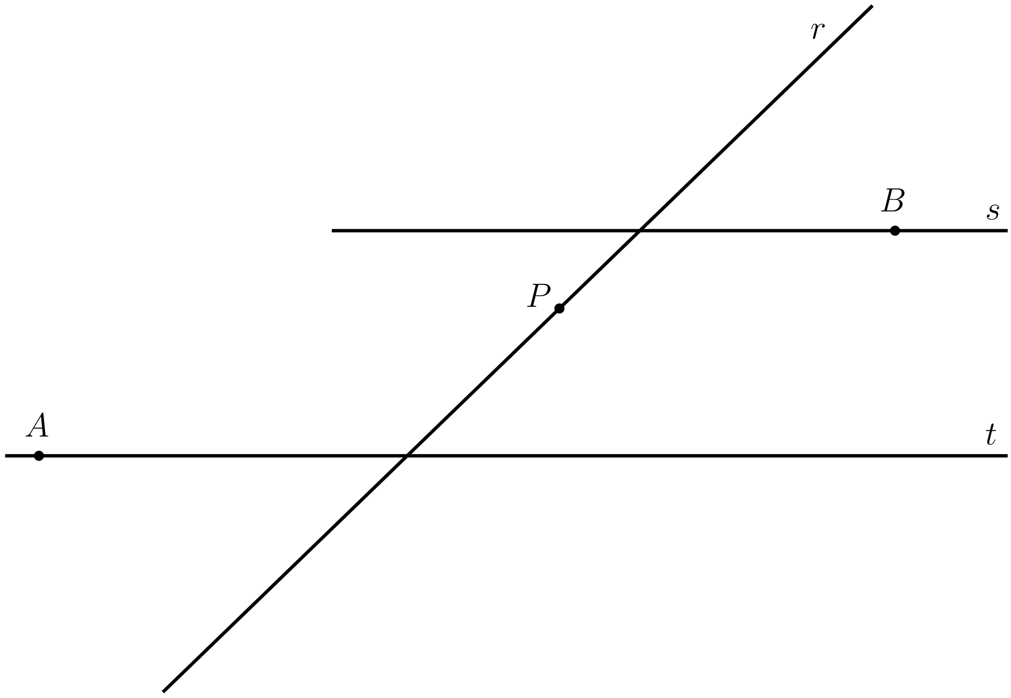
ITA 1985, Questão 16.

ITA 1985, Questão 17: São dados do problema: uma circunferência de raio r, um ponto P que lhe pertence, uma reta t a ela tangente e um ponto Q dessa reta. Girando-se a circunferência de 135º sobre a reta, sem deslizar, determinar a distância do ponto P ao ponto Q.

(A) 76 mm (B) 50 mm (C) 70 mm (D) 63 mm (E) 55 mm

ITA 1985, Questão 17.

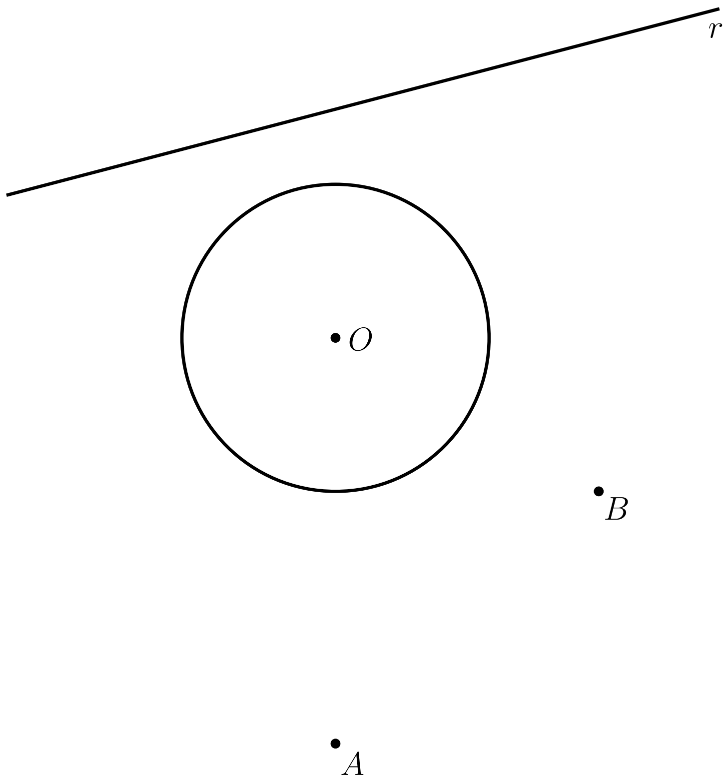
ITA 1985, Questão 19: As retas s e t são os eixos de um duto que descreve uma curva definida por dois arcos de circunferência concordantes. Determinar graficamente o comprimento do duto entre os pontos A e B, sabendo-se que ambos os arcos de concordância são tangentes à reta r no ponto P. Escala do desenho: 1:10.
(A) 1180 mm (B) 1280 mm (C) 1110 mm (D) 990 mm (E) 1220 mm



ITA 1985, Questão 19.

ITA 1986, Questão 16: Dados: Uma circunferência de centro O; uma reta; dois pontos A e B. Pede-se: O raio da circunferência que passa pelos dois pontos e é secante à circunferência dada e determina nela uma secante paralela à reta r.

(A) 23 mm (B) 20 mm (C) 29 mm (D) 37 mm (E) 42 mm

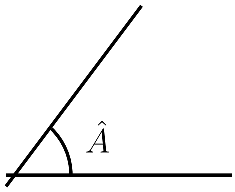


ITA 1986, Questão 16.

ITA 1986, Questão 18: De um triângulo ABC conhecemos: Um lado, uma mediana e o ângulo oposto ao lado dado. Pede-se o valor dos outros dois lados.

- $a = 65$ mm; $m_b = 63$ mm.

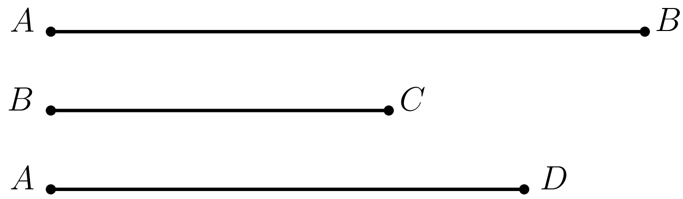
(A) 60 e 80 mm (B) 50 e 57 mm (C) 55 e 65 mm
(D) 60 e 70 mm (E) 68 e 77 mm



ITA 1986, Questão 18.

ITA 1986, Questão 19: Os segmentos AB e BC são os lados de um triângulo ABC. Determinar o ângulo do vértice A, sabendo-se que o lado AC é a quarta proporcional dos segmentos AB, BC e AD.

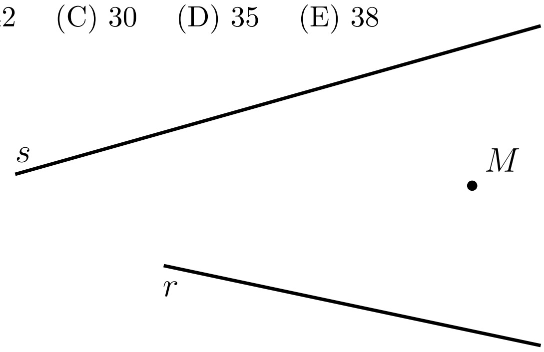
(A) 25º (B) 30º (C) 22º (D) 16º (E) 20º



ITA 1986, Questão 19.

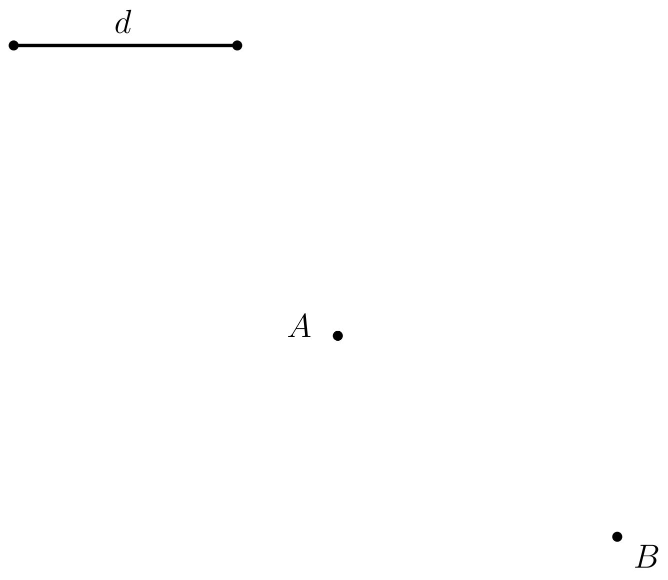
ITA 1987, Questão 1: Dadas duas retas r e s e um ponto M entre elas, pede-se determinar dois pontos R e S nas retas dadas, sendo $MR = MS$. O valor do segmento RS é:

(A) 22 (B) 42 (C) 30 (D) 35 (E) 38



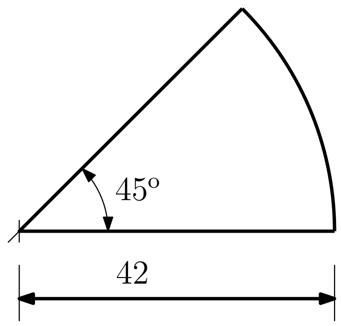
ITA 1987, Questão 1.

ITA 1987, Questão 2: Passar, pelos pontos dados, retas a e b paralelas e separadas pelo segmento d também dado. O segmento perpendicular pelo ponto B, até a reta que passa pelo ponto A, mede:
(A) 45 (B) 36 (C) 40 (D) 30 (E) 43



ITA 1987, Questão 2.

ITA 1987, Questão 4: Construir um triângulo isósceles equivalente ao setor circular conhecido. A base desse triângulo mede aproximadamente:
(A) 33 (B) 29 (C) 36 (D) 27 (E) 38



ITA 1987, Questão 4.

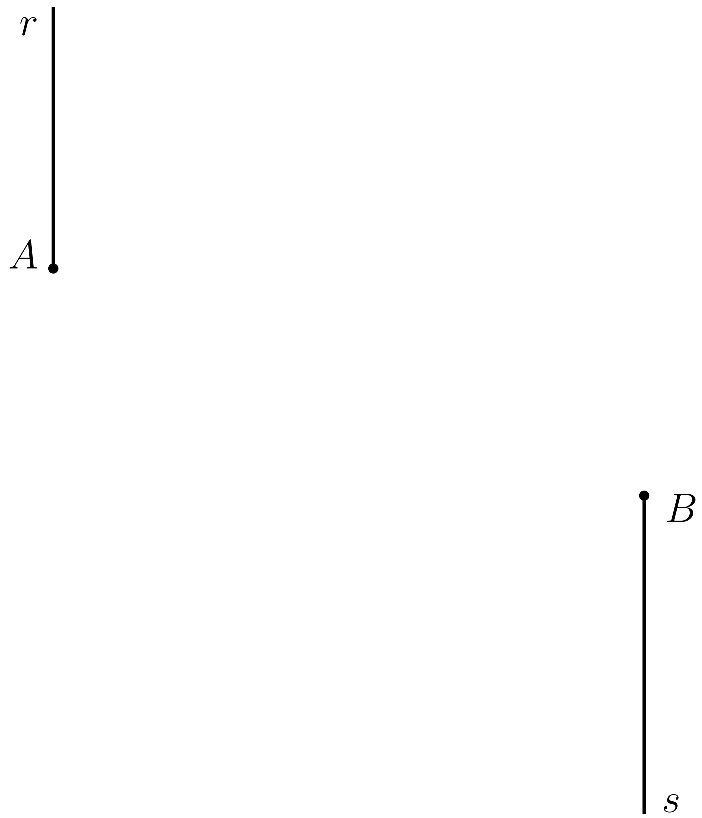
ITA 1987, Questão 5: O segmento CE dado é o lado de um pentágono inscrito em um círculo. Construa um triângulo retângulo, sabendo-se que sua hipotenusa é igual ao segmento CE e que os catetos são lados de polígonos inscritos no mesmo círculo. Pergunta: Qual é o perímetro do triângulo?

(A) 62 mm (B) 75 mm (C) 90 mm (D) 83 mm (E) 68 mm

ITA 1987, Questão 5.

ITA 1987, Questão 6: Dadas as retas r e s paralelas, concordá-las nos pontos A e B por uma curva plana composta de dois arcos, sabendo-se que o raio de um deles é o triplo do outro. Quanto mede a diferença entre os comprimentos dos arcos concordantes?

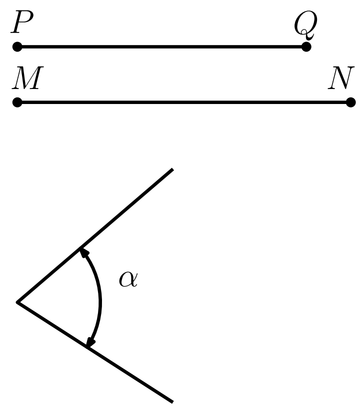
(A) 40 mm (B) 55 mm (C) 65 mm (D) 72 mm (E) 80 mm



ITA 1987, Questão 6.

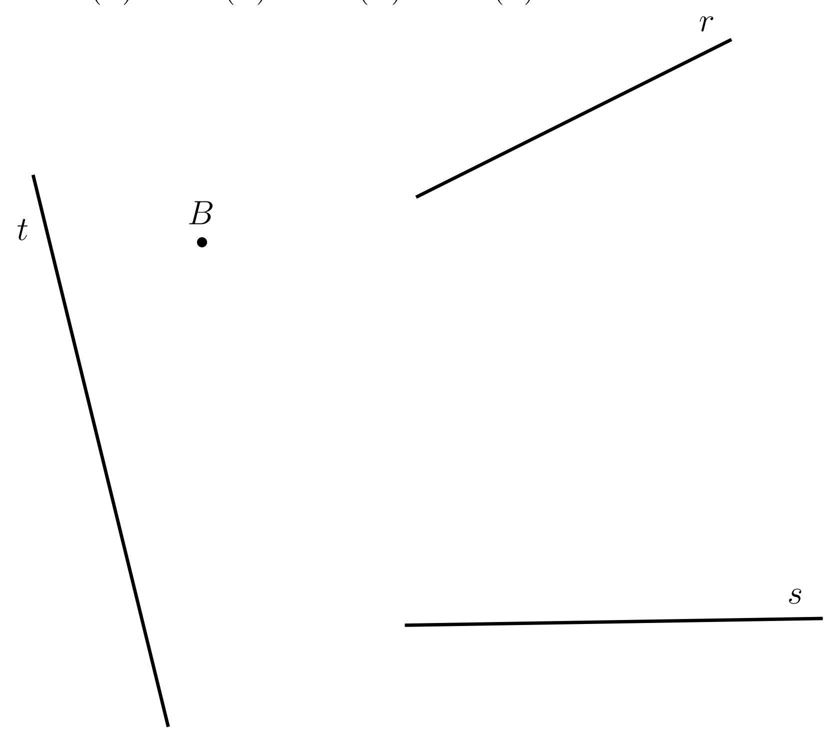
ITA 1987, Questão 7: O segmento PQ é um dos lados não paralelos de um trapézio. O segmento MN é o que une os pontos médios dos lados não paralelos. O segmento PQ forma com a base maior um ângulo igual a α. Sabe-se que a base maior é o dobro da base menor. Quanto mede o lado não paralelo a PQ?

(A) 45 mm (B) 41 mm (C) 35 mm (D) 48 mm (E) 37 mm



ITA 1987, Questão 7.

ITA 1987, Questão 8: São dadas as retas r, s e t, assim como o ponto B. Trace a bissetriz do ângulo formado por r e s e determine sobre a mesma um ponto A, distante 20 mm à direita da reta t. Trace o menor caminho entre os pontos A e B, com um ponto em t. Pergunta: Qual é a medida do ângulo formado pelos segmentos que determinam este menor caminho?
Obs: t é perpendicular à bissetriz do ângulo formado por r e s.
(A) 45º (B) 90º (C) 60º (D) 75º (E) 65º



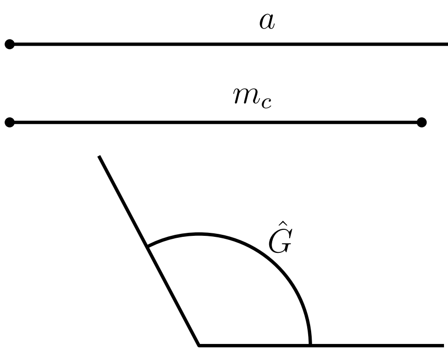
ITA 1987, Questão 8.

ITA 1988, Questão 1: O segmento AB dado é o semi-perímetro de um hexágono regular. Sem construir esse hexágono, pede-se traçar um quadrado de área equivalente. Pergunta: Quanto mede o lado do quadrado?
Obs: Mostrar todas as construções geométricas.
(A) 36 mm (B) 43 mm (C) 48 mm (D) 53 mm (E) 57 mm

ITA 1988, Questão 1.

ITA 1988, Questão 2: Construir um triângulo sendo conhecidos: o lado a, a mediana m_c e o ângulo $\hat{G}$, formado pelas medianas m_c e m_b. A mediana m_a mede?

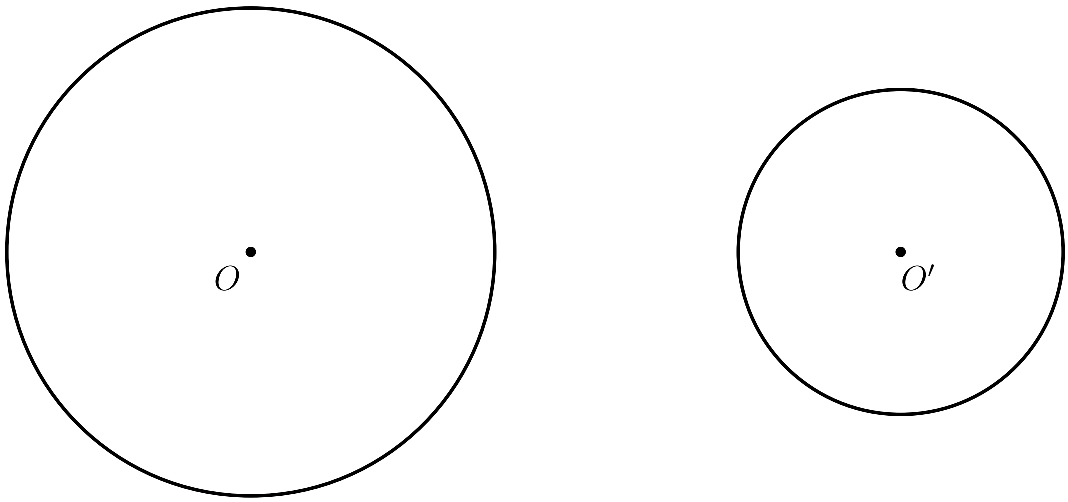
(A) 57 mm (B) 70 mm (C) 65 mm (D) 60 mm (E) 74 mm



ITA 1988, Questão 2.

ITA 1988, Questão 4: Determinar dois pontos fixos P e Q por onde passam todas as circunferências ortogonais às circunferências de centros O e O'. Pergunta: Quanto mede a distância PQ?

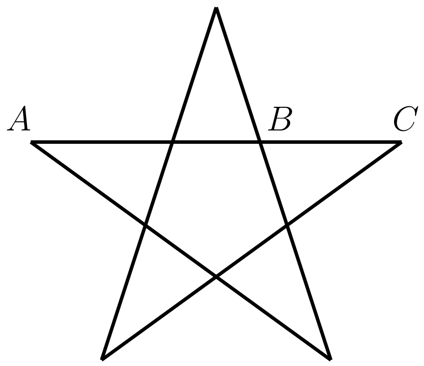
(A) 45 mm (B) 52 mm (C) 58 mm (D) 67 mm (E) 76 mm



ITA 1988, Questão 4.

ITA 1988, Questão 5: O segmento AB pertence a um pentágono estrelado. Quanto mede o segmento AC? Escala: 1:25.
Obs: O desenho do pentágono estrelado abaixo é apenas uma demonstração do que se pede, não possuindo valor numérico.

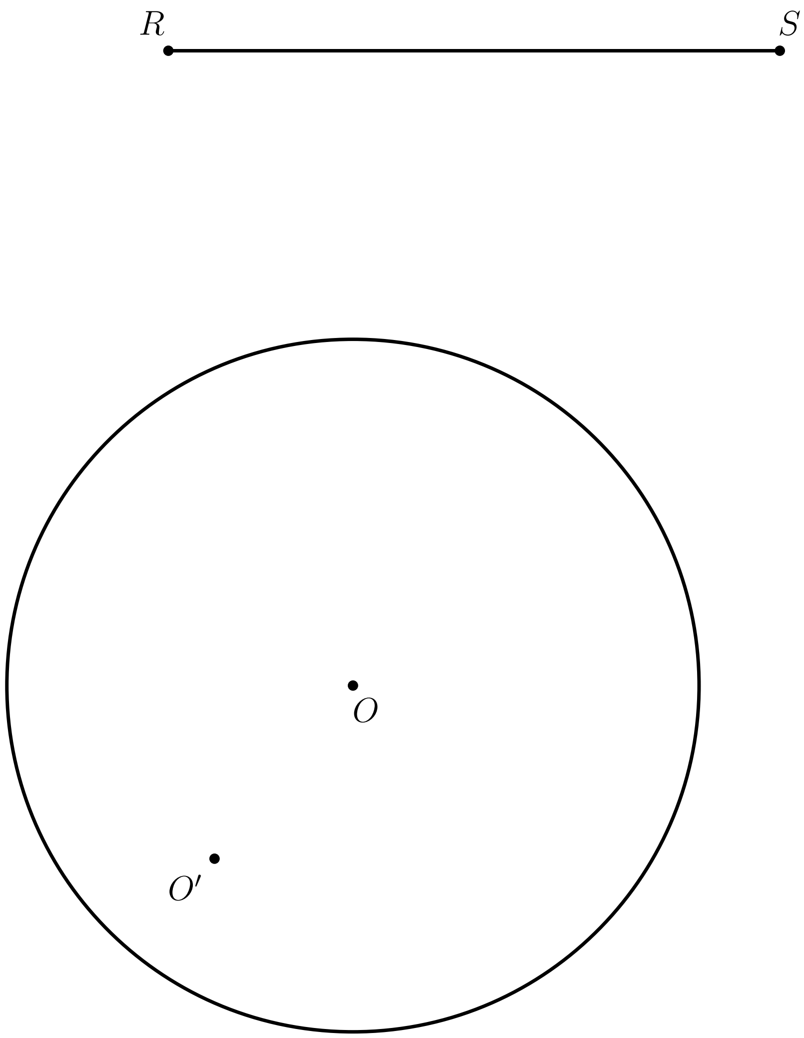
(A) 256,25 cm (B) 270,75 cm (C) 287,50 cm
(D) 293,25 cm (E) 300,50 cm



ITA 1988, Questão 5.

ITA 1988, Questão 8: São dados: A circunferência de centro O, o ponto O' e o segmento RS, que é o perímetro de uma circunferência cujo centro é O'. Trace a circunferência de centro O' e determine os centros de homotetia das duas circunferências. Pergunta: Quanto mede a distância entre os centros de homotetias direta e inversa das duas circunferências?

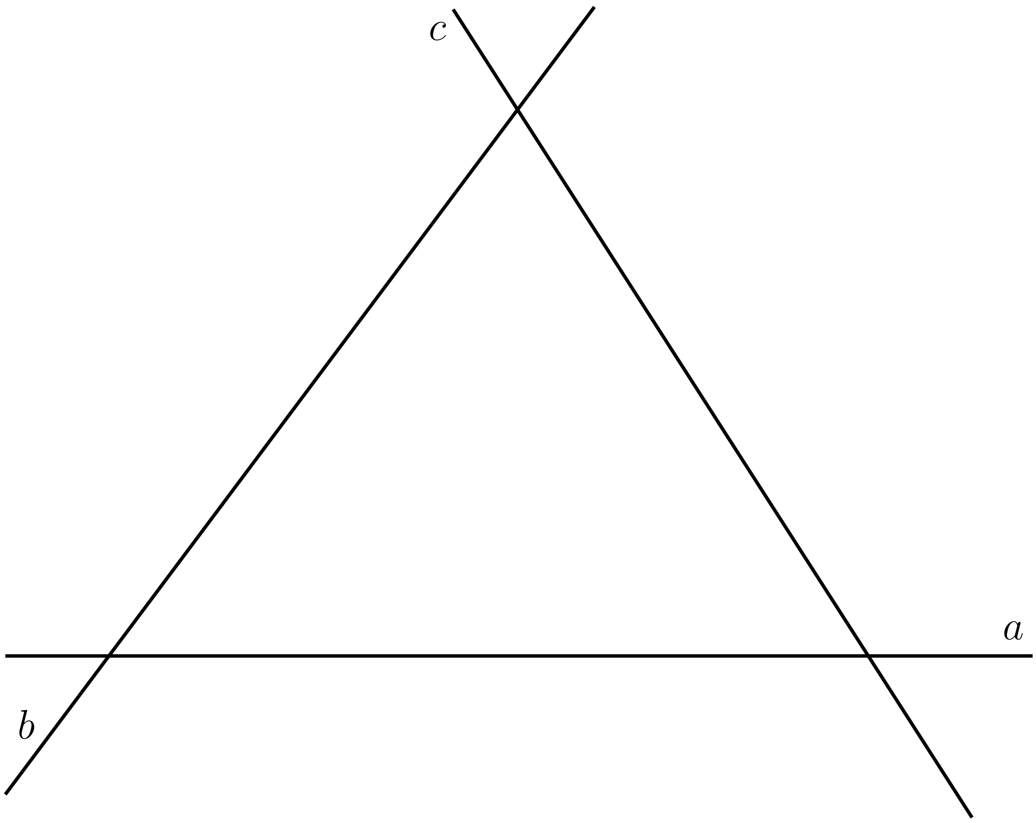
(A) 8 mm (B) 11 mm (C) 14 mm (D) 18 mm (E) 23 mm



ITA 1988, Questão 8.

ITA 1993, Questão 22: Dadas as retas a, b e c, traçar uma circunferência que seja interceptada por estas retas, segundo arcos de amplitudes respectivamente iguais a 90^o, 135^o e 75^o. Pergunta: Qual a diferença entre a soma das cordas definidas pelas retas nos arcos de amplitudes 90^o e 75^o e a corda correspondente ao arco de 135^o.

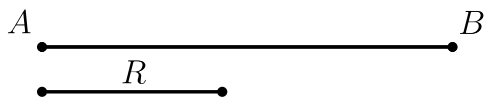
(A) 33 mm (B) 25 mm (C) 40 mm (D) 47 mm (E) 18 mm



ITA 1993, Questão 22.

ITA 1993, Questão 23: O segmento AB corresponde à soma de um lado de um quadrado com um lado de outro. A soma das áreas dos quadrados é equivalente à área de um círculo de raio R dado. Pergunta: Quanto medem aproximadamente os lados dos quadrados?

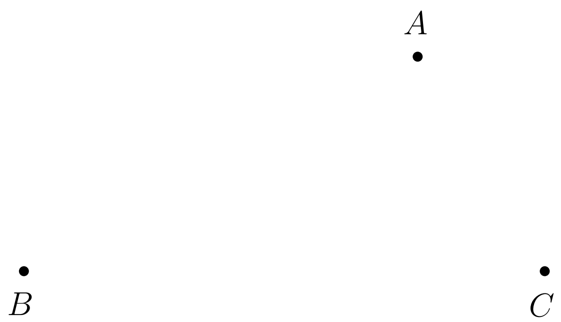
(A) 32 e 23 mm (B) 25 e 30 mm (C) 18 e 37 mm
(D) 40 e 15 mm (E) 46 e 9 mm



ITA 1993, Questão 23.

ITA 1993, Questão 24: Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo ABC. Determinar dois segmentos de tal forma que o produto destes segmentos seja igual ao produto dos lados b e c. Um dos segmentos é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo no vértice A. Pergunta: Quanto mede a soma dos segmentos pedidos, considerando os dados na escala 1 : 50?

(A) 5,80 m (B) 5,35 m (C) 4,55 m (D) 3,90 m (E) 6,40 m



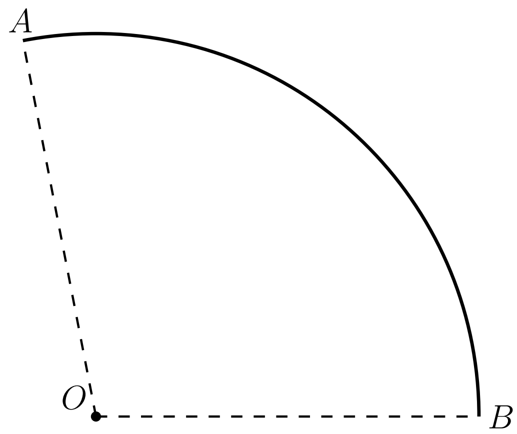
ITA 1993, Questão 24.

3 Questões do IME

IME 1964/1965, Questão 1, Item 1 [valor 1,0]: Dada uma circunferência de 5 cm de raio, traçar 5 outras circunferências internas tangentes à ela e tangentes entre si, duas a duas.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (a): Construir um triângulo retângulo sendo dados a hipotenusa = 9 cm e a soma dos catetos = 12 cm.

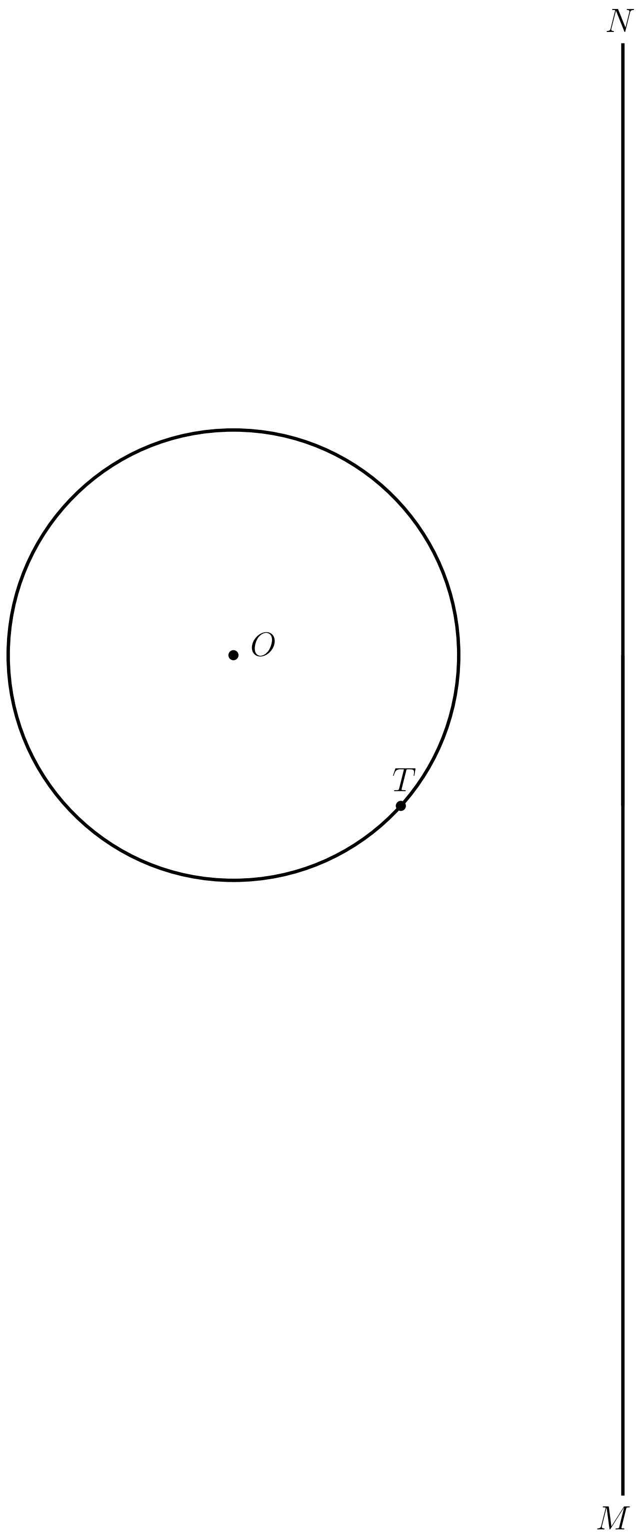
IME 1965/1966, Questão 1, Item (c): Retificar a terça parte do arco AB dado.



IME 1965/1966, Questão 1, Item (c).

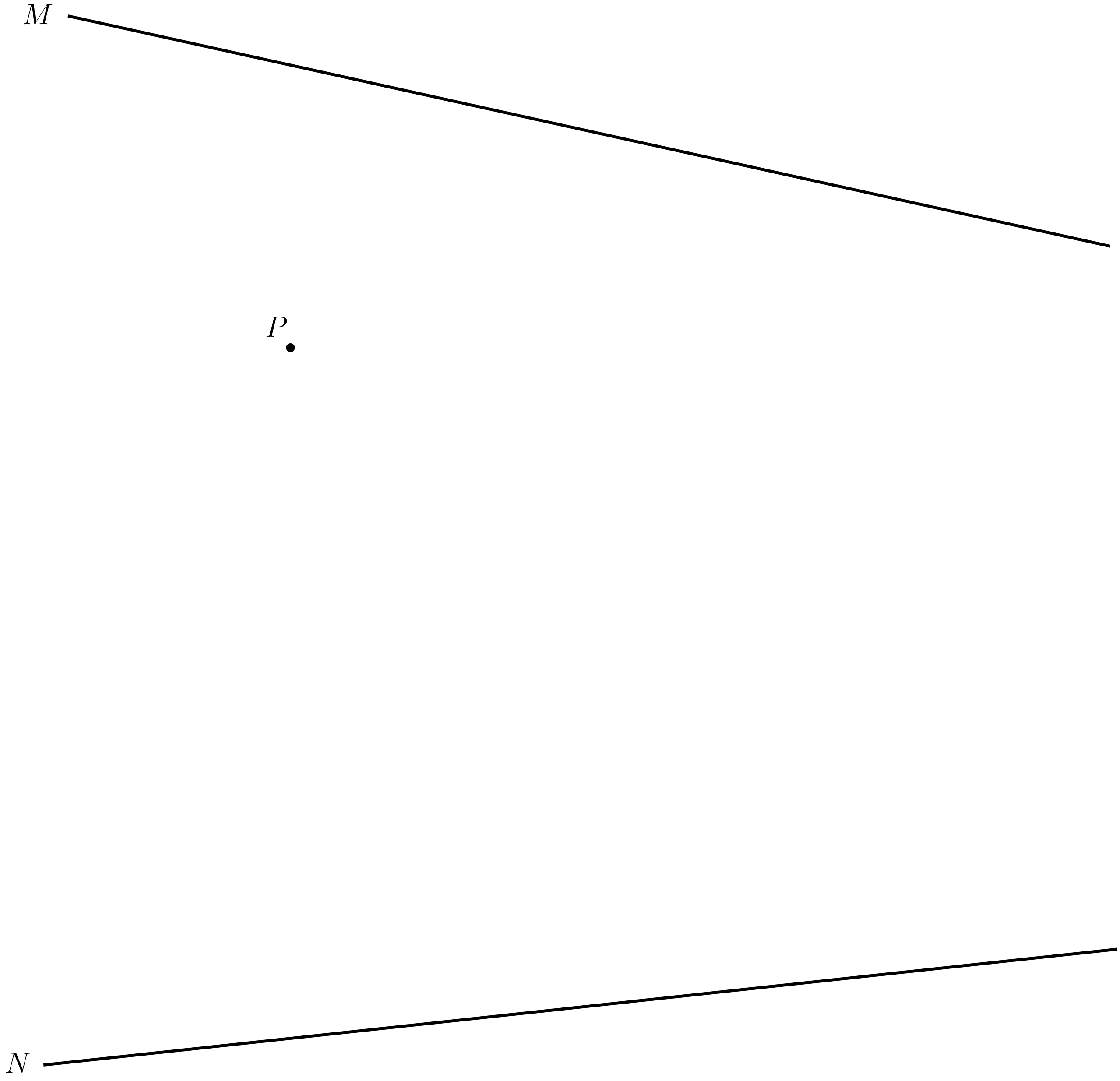
IME 1965/1966, Questão 1, Item (d): Traçar as circunferências tangentes à reta MN dada e tangentes à circunferência O, num ponto T dado sobre esta.

IME 1965/1966, Questão 2, Item A: Os vértices de um trapézio são os pontos de contatos das tangentes comuns exteriores a duas circunferências tangentes entre si, cujos centros estão afastados de 7 cm, sendo 9 cm o diâmetro de uma delas. Pedem-se:
(a) Desenhar o trapézio.
(b) Determinar o hexágono regular cuja área seja equivalente à do trapézio.



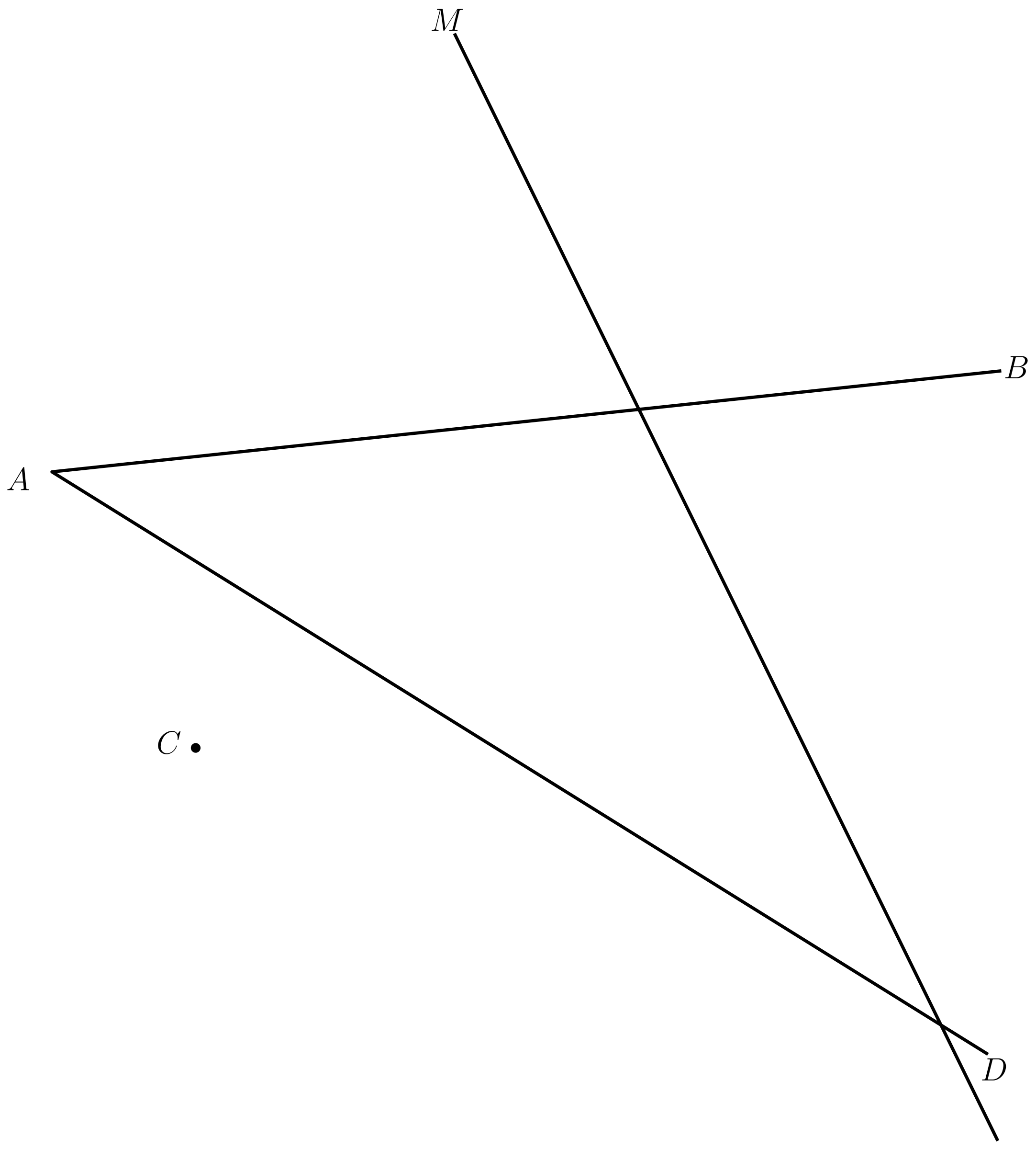
IME 1965/1966, Questão 1, Item (d).

IME 1967/1968, Questão 1, Item 1 [valor 0,5]: Pelo ponto P, traçar uma reta que passe pelo ponto de concorrência das retas M e N que não podem ser prolongadas.



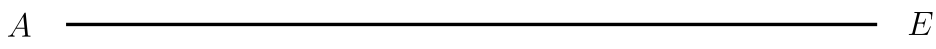
IME 1967/1968, Questão 1, Item 1.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 2 [valor 0,5]: Do ponto C como centro, traçar uma circunferência que corte os lados do ângulo BAD, de modo que a corda obtida seja paralela à reta M.



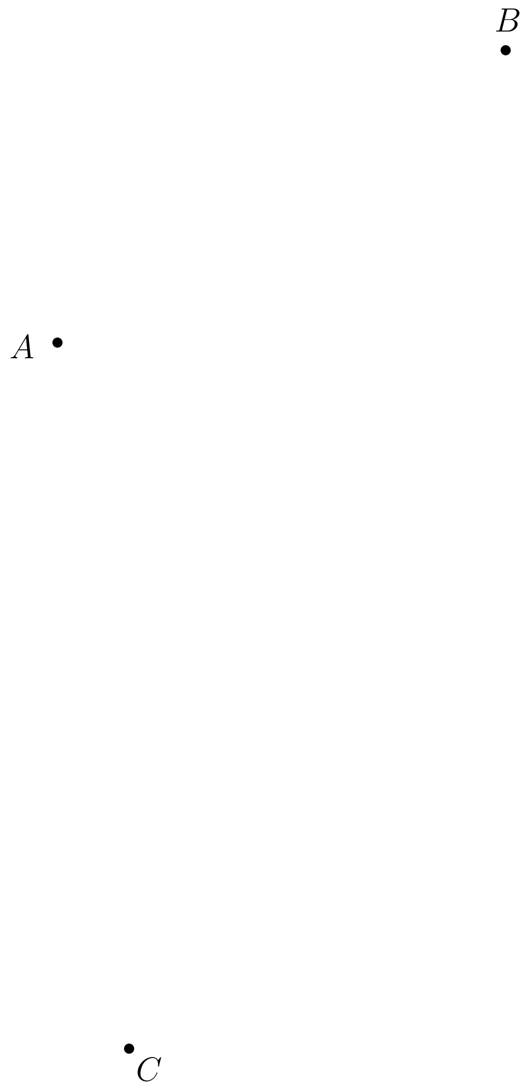
IME 1967/1968, Questão 1, Item 2.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: O segmento de reta AE representa a soma da diagonal e do lado de um quadrado. Pede-se construir o quadrado.



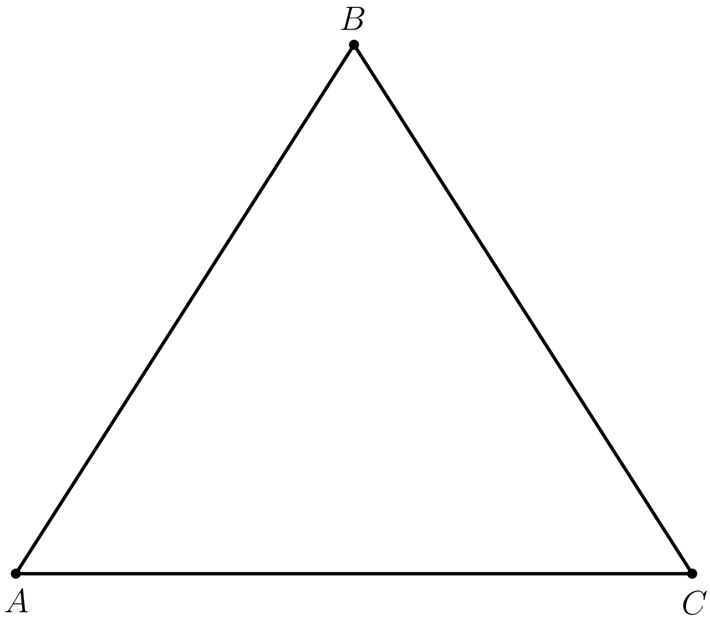
IME 1967/1968, Questão 1, Item 3.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 4 [valor 1,0]: Construir um quadrado, equivalente a um círculo cuja área é a soma das áreas de dois círculos de raios 3 e 2 cm.
IME 1968/1969, Questão 1, Item 1 [valor 1,0]: Dados os três pontos A, B e C, passar por A e B uma circunferência tal que a tangente tirada por C tenha um comprimento de 5 cm.



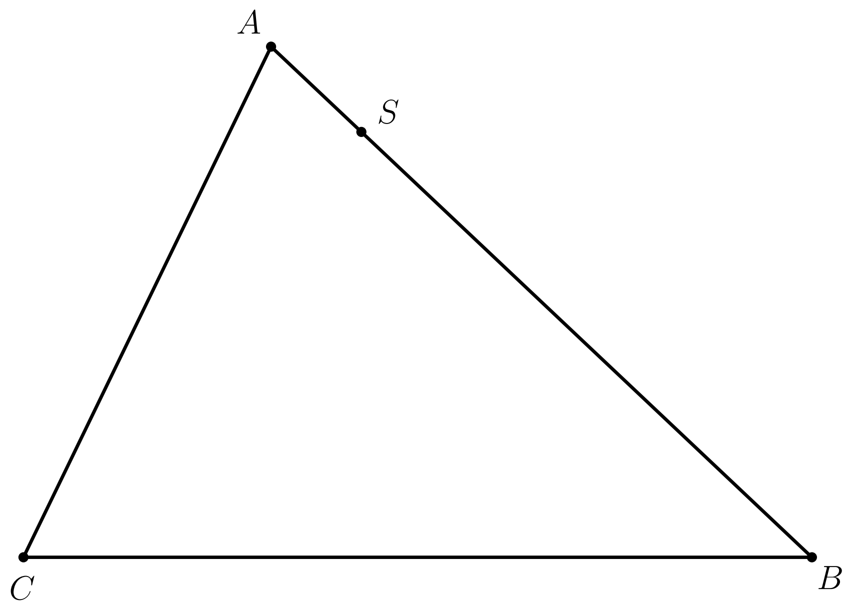
IME 1968/1969, Questão 1, Item 1.

IME 1968/1969, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: No triângulo isósceles ABC, inscrever um retângulo cujo perímetro seja duplo do perímetro do triângulo isósceles que fica na parte superior do retângulo.



IME 1968/1969, Questão 1, Item 2.

IME 1968/1969, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: Pelo ponto comum S dividir o triângulo ABC em três áreas iguais.

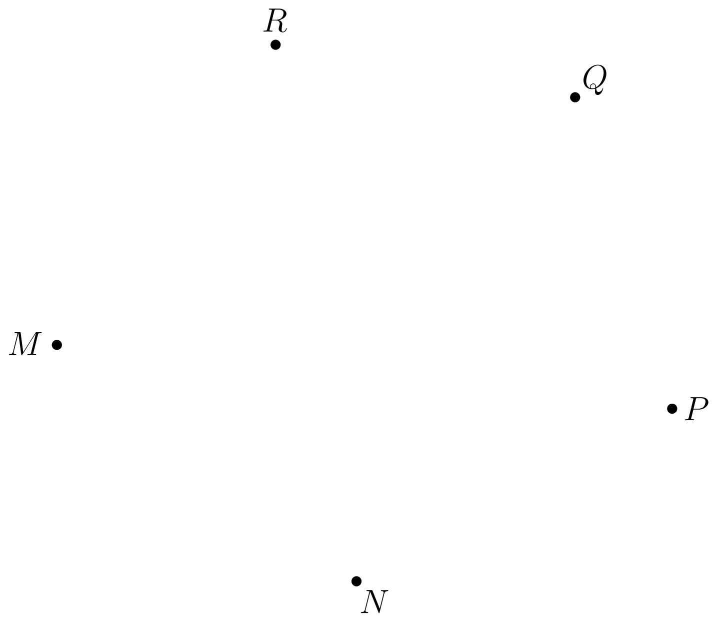


IME 1968/1969, Questão 1, Item 3.

IME 1969/1970, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: Os pontos O_1 e O_2 são os centros de duas circunferências de raios 2 cm e 1 cm respectivamente. Ache um ponto tal que as tangentes mais inclinadas, traçadas às circunferências, sejam iguais e formem um ângulo de 100°.

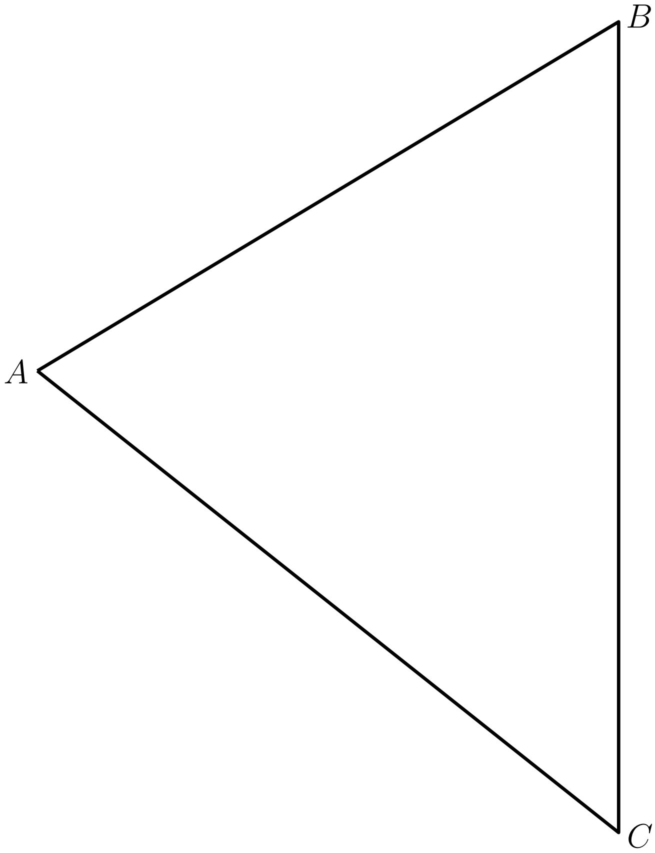
IME 1969/1970, Questão 1, Item 2.

IME 1969/1970, Questão 1, Item 3 [valor 0,5]: Os pontos M, N, P, Q e R são os pontos médios dos lados de um pentágono qualquer. Ache o pentágono.



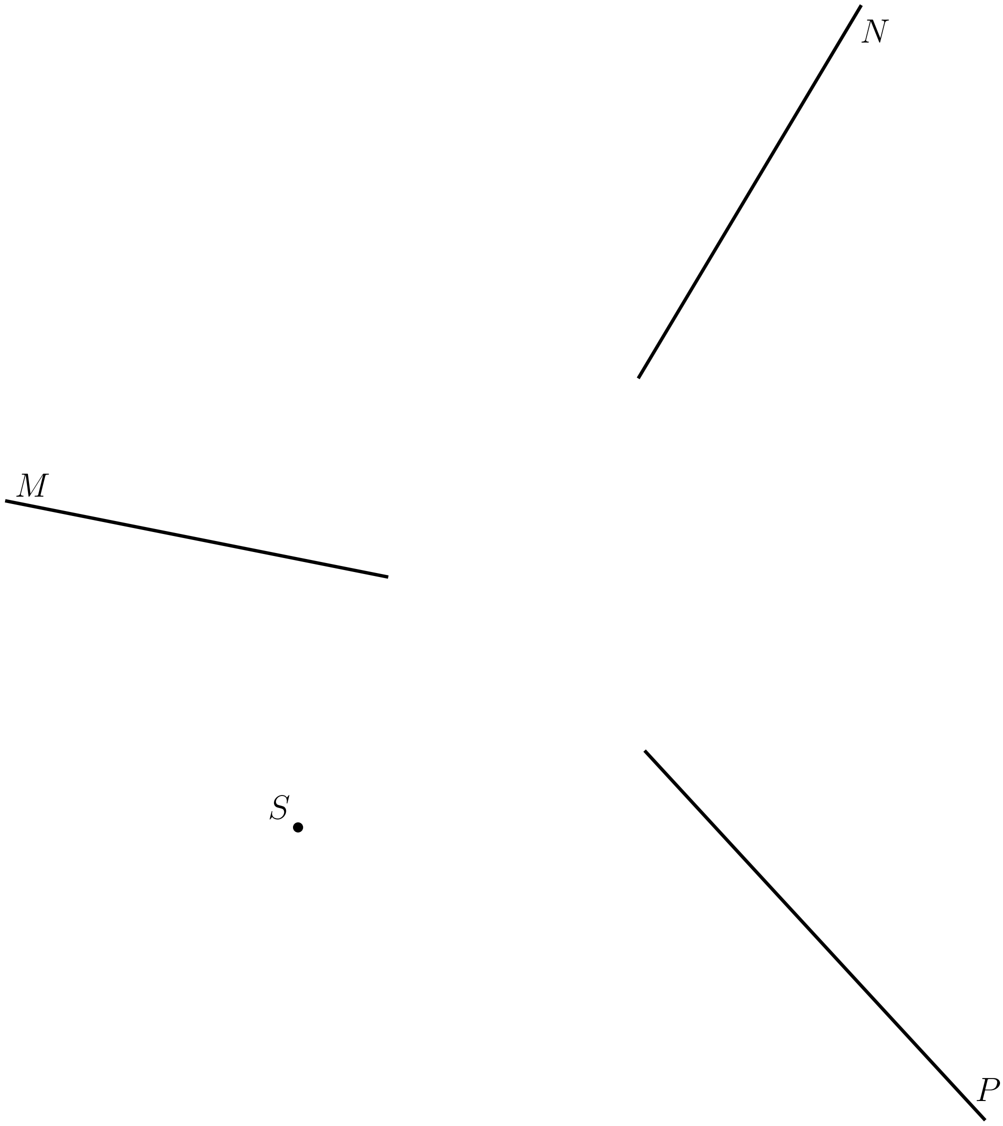
IME 1969/1970, Questão 1, Item 3.

IME 1970/1971, Questão 1, Item 1 [valor 0,5]: Dado o triângulo ABC, ache no seu interior um ponto tal que a soma das distâncias aos três vértices seja mínima.



IME 1970/1971, Questão 1, Item 1.

IME 1970/1971, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: As retas M, N e P são as mediatrizes de um triângulo. O ponto S está sobre um dos lados. Construa o triângulo.

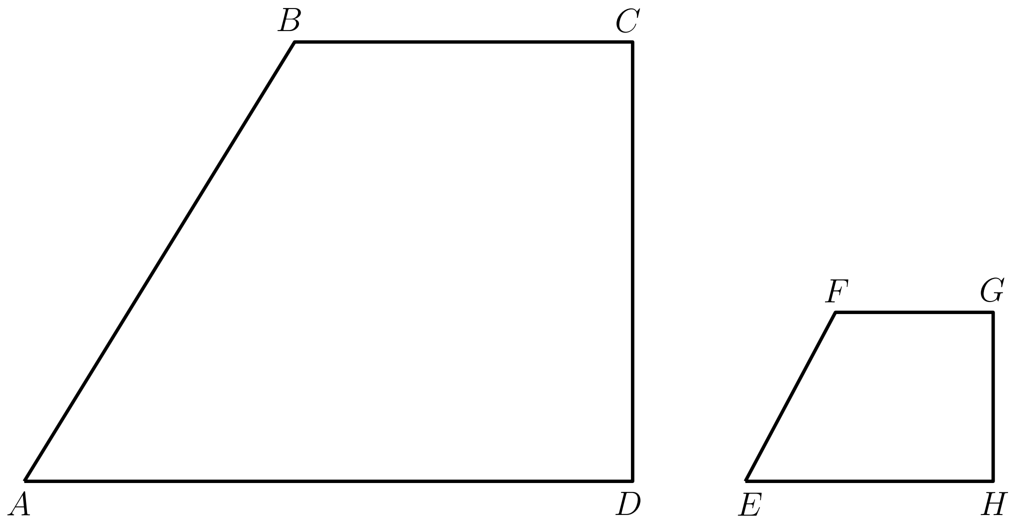


IME 1970/1971, Questão 1, Item 2.

IME 1970/1971, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: Construa um trapézio retângulo que satisfaça as seguintes condições:

(i) Altura igual à diferença das alturas dos trapézios $ABCD$ e $EFGH$.

(ii) Área igual à diferença das áreas dos trapézios $ABCD$ e $EFGH$.

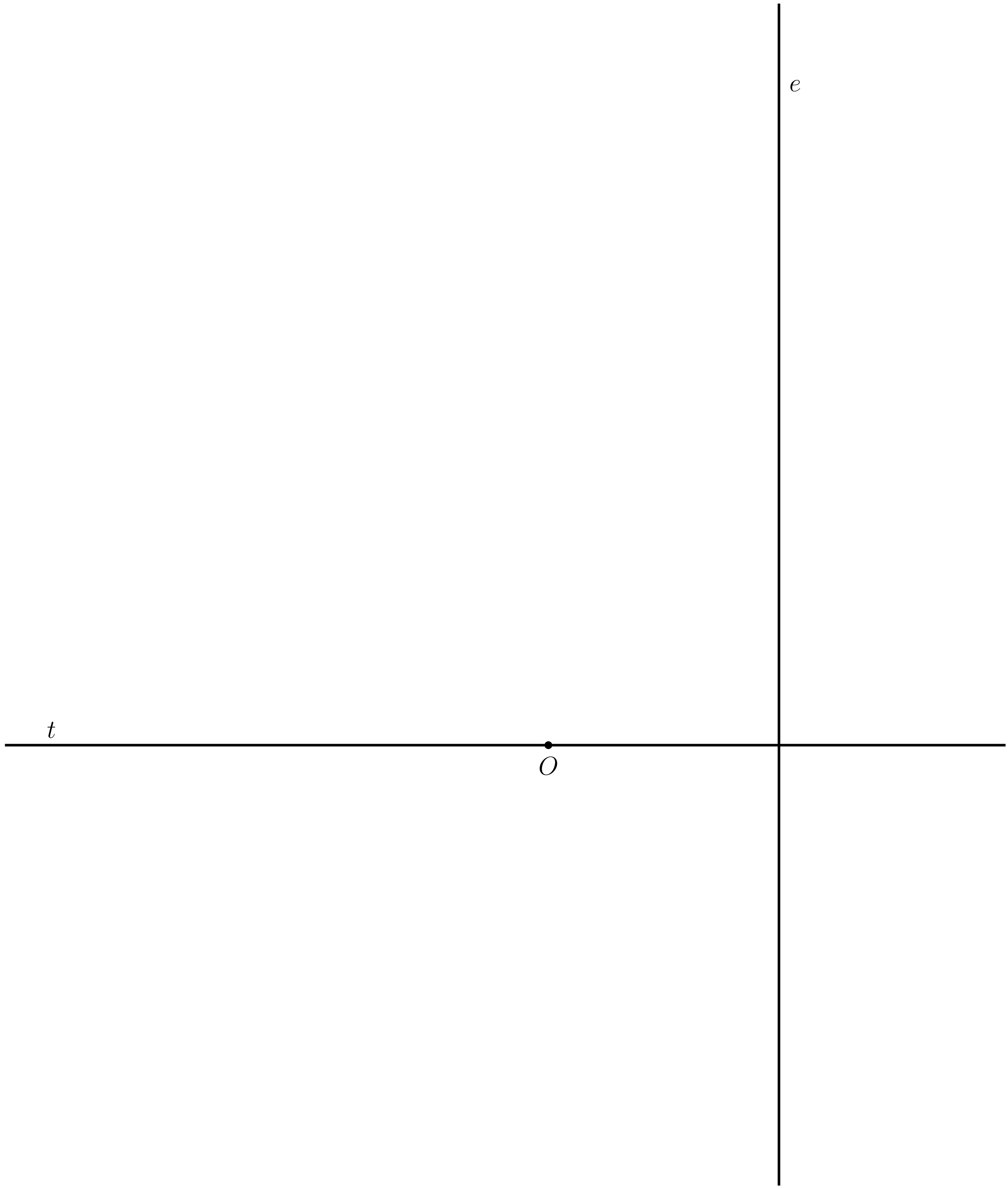


IME 1970/1971, Questão 1, Item 3.

IME 1971/1972, Questão 6 [valor 1,0]: Um feixe de círculos F é dado por: um círculo de centro O, com dois centímetros de raio; eixo radical e, distante quatro centímetros de O e comum a todos os círculos de F. Pedem-se:

(a) Construir o menor círculo que seja ortogonal a todos os círculos de F.

(b) Construir um círculo de F tangente a uma reta r perpendicular ao eixo radical e e distante seis centímetros de O.

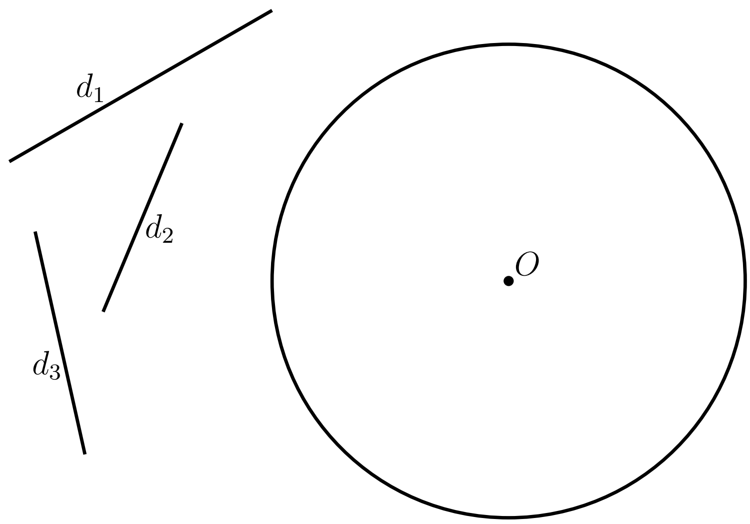


IME 1971/1972, Questão 6.

IME 1971/1972, Questão 7 [valor 1,0]: Construir um quadrilátero inscritível convexo cujos lados medem $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 5$ cm e $DA = 8$ cm.

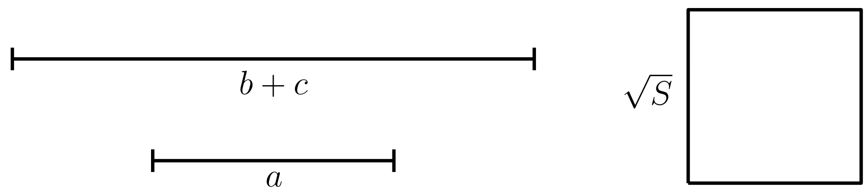
IME 1982/1983, Questão 4, Item (a) [valor 0,8]: Em um triângulo ABC dão-se o ângulo $\hat{A}$, o raio do círculo ex-inscrito r_a (relativo ao ângulo $\hat{A}$) e a altura h_a (relativa ao lado a). Indique a construção do triângulo ABC e conclua daí a condição que deve haver entre os elementos dados para que a construção seja possível, isto é, para que exista o triângulo ABC, escaleno.

IME 1983/1984, Questão 5 [valor 0,6]: Dão-se um círculo c, de centro O, e três direções d_1, d_2 e d_3. Inscreva em c os triângulos cujos lados AB, BC e CA têm, respectivamente, as direções d_1, d_2 e d_3 e cujos vértices A, B e C se sucedem no círculo c, no sentido do movimento dos ponteiros do relógio.



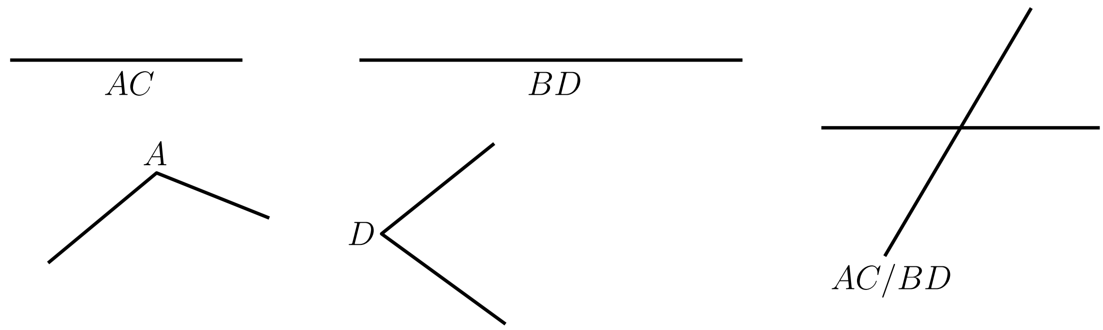
IME 1983/1984, Questão 5.

IME 1984/1985, Questão 2, Item (a) [valor 0,5]: Em um triângulo ABC são dados o lado a, a soma dos outros dois lados, $b+c=\ell$, e a área S. Construa o triângulo com régua e compasso.



IME 1984/1985, Questão 2, Item (a).

IME 1984/1985, Questão 8, Item (a) [valor 0,5]: Construa um quadrilátero convexo $ABCD$, dados: os comprimentos das diagonais AC e BD; o ângulo de AC com BD; os ângulos adjacentes A e D.



IME 1984/1985, Questão 8, Item (a).

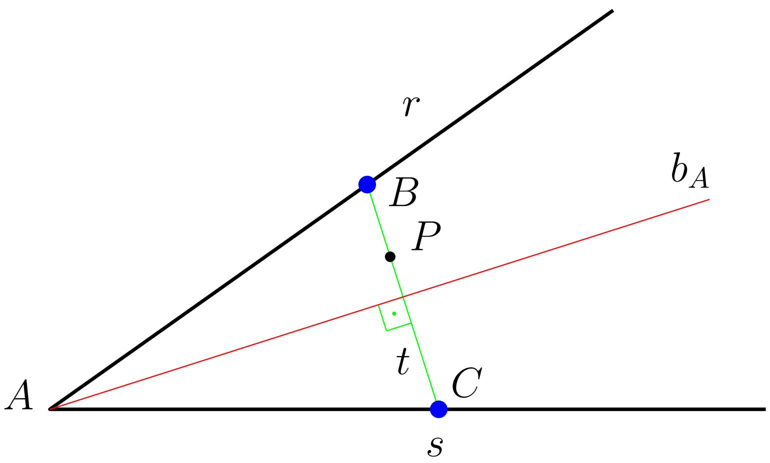
IME 1984/1985, Questão 8, Item (b) [valor 0,5]: São dados dois círculos concêntricos, C_1 e C_2, de raios r_1 e r_2 ($r_1 > r_2$) e centro O. Por um ponto A de C_1 determine uma corda AD de C_1, que corta C_2 em B e C, tal que $AD = 3BC$. Discuta a possibilidade e o número de soluções.

4 Soluções da FUVEST

FUVEST 1996, Questão 10: Na figura abaixo são dadas duas semi-retas r e s de mesma origem A e um ponto P.

a) Utilize essa figura para construir, usando régua e compasso, os pontos B em r e C em s de tal forma que o ponto P pertença ao segmento BC e que AB seja igual a AC.

b) Descreva e justifique o processo utilizado na construção.



FUVEST 1996, Questão 10: Solução.

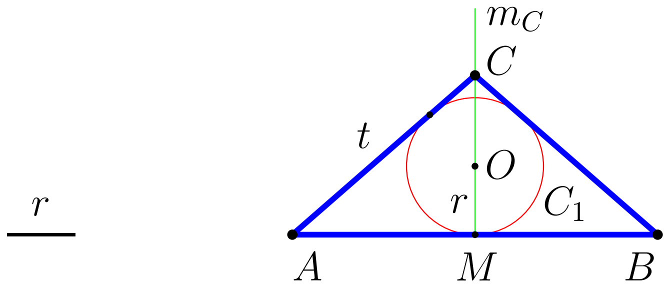
Construção: (i) Trace a bissetriz b_A de $\hat{A}$; (ii) Trace por P uma perpendicular t a b_A, determinando sobre as retas r e s os vértices B e C, respectivamente. **Justificativa:** O triângulo ΔABC é isósceles, já que $AB = AC$. Logo, a base BC é a perpendicular, no caso por P, à bissetriz b_A do ângulo $\hat{A}$ oposto à base.

FUVEST 1997, Questão 10:

a) Dados AB e um segmento de medida r, construa, usando régua e compasso, um triângulo isósceles sabendo que sua base é AB e o raio da circunferência inscrita nesse triângulo é r.

b) Descreva as construções feitas.

c) Justifique o porquê de cada construção.



FUVEST 1997, Questão 10: Solução.

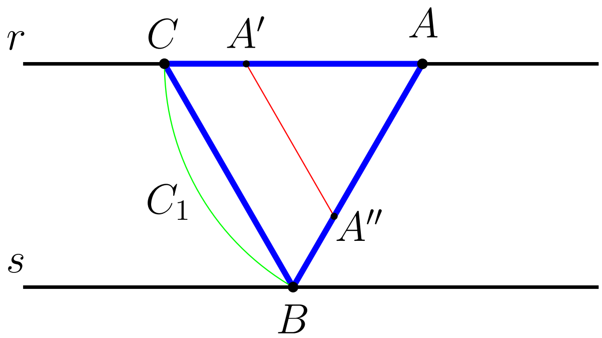
Construção: (i) Trace a mediatriz m_C pelo ponto M médio de AB; (ii) Marque sobre m_C o ponto O tal que $MO = r$; (iii) Trace $C_1 \equiv \mathcal{C}(O, r)$; (iv) Trace por A a tangente t a C_1, determinando sobre m_C o vértice C.

Justificativa: Em um triângulo isósceles, o centro O do círculo inscrito C_1 está sobre a mediatriz da base do triângulo, e o ponto de tangência de C_1 com a base é o ponto médio M desta. Assim, tendo-se a base AB e o raio r de C_1, podemos determinar o centro O de C_1. O terceiro vértice do triângulo é então determinado pelas tangentes a C_1 partindo dos vértices conhecidos A e B.

FUVEST 1998, Questão 10:

a) Dadas as retas paralelas r e s e um ponto A em r, construa um triângulo equilátero com um vértice em A, outro vértice em r e o terceiro vértice em s.

b) Descreva e justifique as construções feitas.



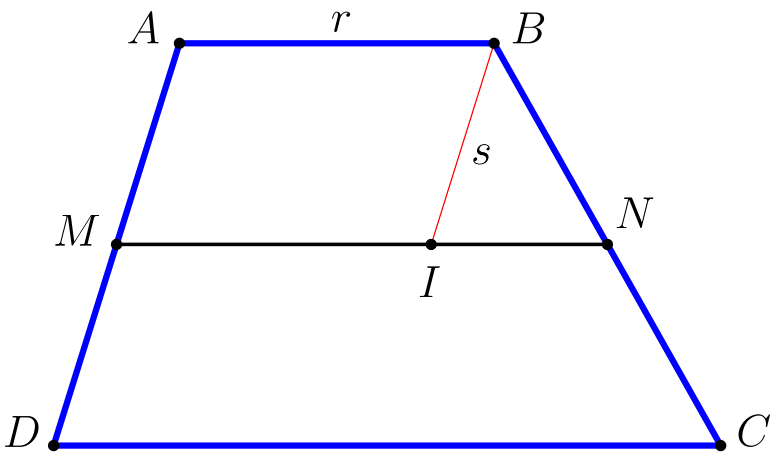
FUVEST 1998, Questão 10: Solução.

Construção: (i) Marque um ponto A' qualquer sobre r e trace o triângulo equilátero de lado AA', determinando o outro vértice A''; (ii) Prolongue o lado AA'', determinando sobre s o vértice B; (iii) Trace $C_1 \equiv \mathcal{C}(A, AB)$, determinando sobre r o vértice C.
Justificativa: O triângulo equilátero auxiliar $\Delta AA'A''$ ajuda a determinar o ângulo $B\hat{A}C = 60^o$ do triângulo equilátero desejado ΔABC.

FUVEST 1999, Questão 10:

a) Construa com régua e compasso, um trapézio $ABCD$, onde AB seja paralelo a CD, conhecendo-se os pontos A, M, N e I, que satisfazem as seguintes condições: M é o ponto médio do lado AD, N é o ponto médio de BC e I é o ponto de intersecção do segmento MN com a reta que passa por B e é paralela a AD.

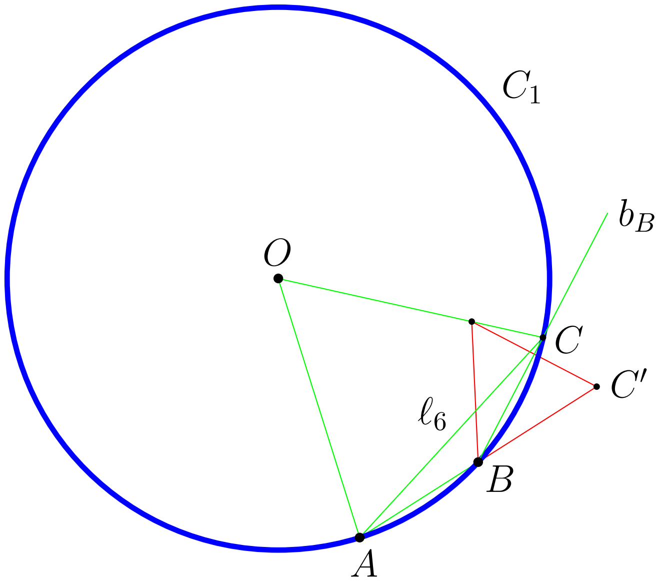
b) Descreva e justifique a construção feita.



FUVEST 1999, Questão 10: Solução.

Construção: (i) Prolongue AM, determinando o vértice D tal que $AM = MD$, com M entre A e D; (ii) Trace por A uma paralela r a MN; (iii) Trace por I uma paralela s a AM, determinando sobre r o vértice B; (iv) Prolongue BN, determinando o vértice C tal que $NC = NB$, com N entre B e C.
Justificativa: O vértice B é determinado pela definição do ponto I dada no enunciado. Pelas definições de M e N, o segmento MN é a base média do trapézio desejado. Os vértices C e D são determinados pelos prolongamentos de BN e AM, fazendo $NC = NB$ e $MD = AM$, respectivamente.

FUVEST 2000, Questão 10: São dados os pontos A e B. Usando uma régua e compasso, construa a circunferência circunscrita a um polígono regular de 12 lados, que tem o segmento AB como um de seus lados. Descreva e justifique as construções utilizadas.



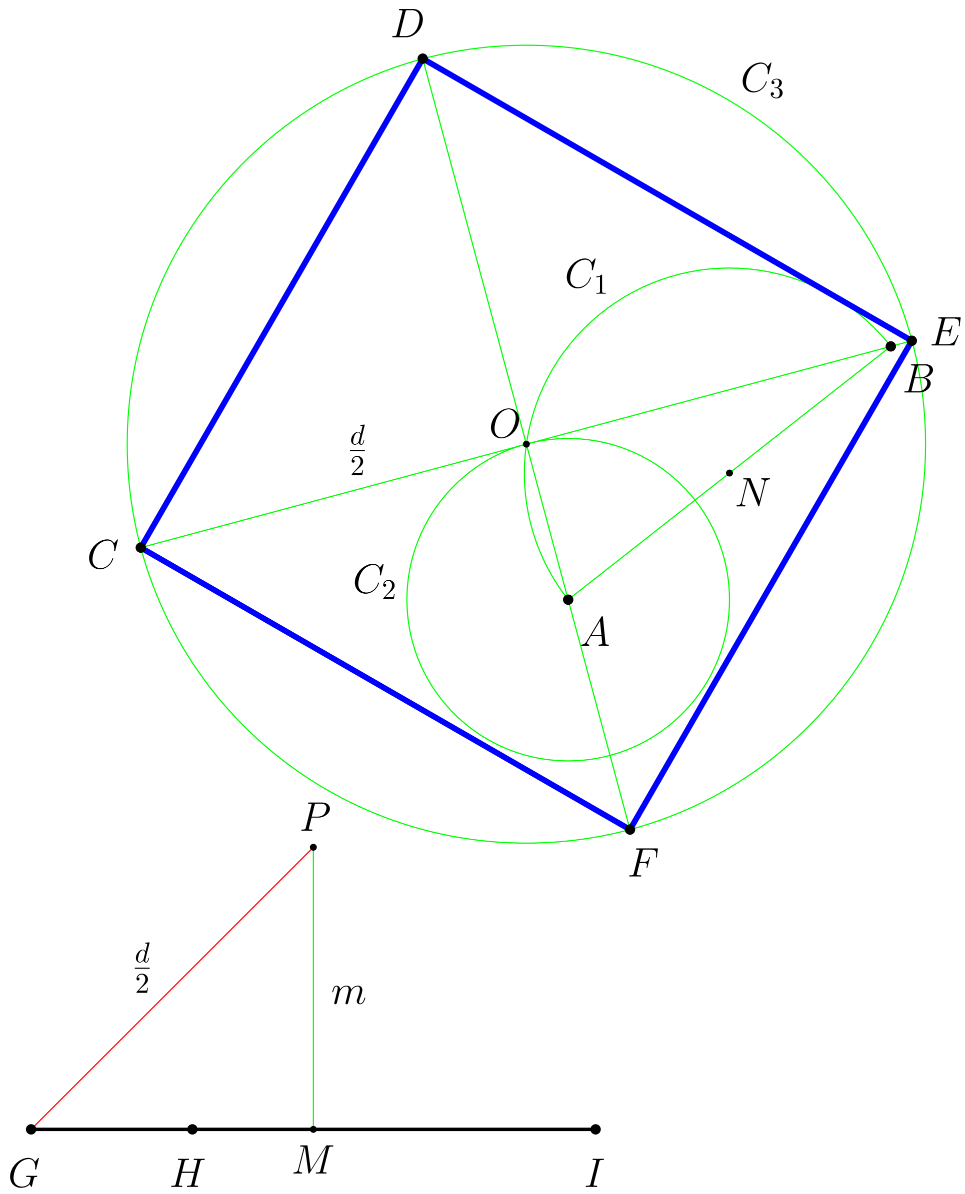
FUVEST 2000, Questão 10: Solução.

Construção: (i) Prolongue AB e marque C' qualquer, com B entre A e C'; (ii) Trace o triângulo equilátero de lado BC'; (iii) Trace a bissetriz b_B de $\hat{B}$ e marque a distância $BC = AB$, determinando o vértice C sobre b_B; (iv) Trace o triângulo equilátero de lado $\ell_6 = AC$, cujo terceiro vértice é o centro O do círculo desejado $C_1 \equiv \mathcal{C}(O, \ell_6)$.

Justificativa: O ângulo interno de um dodecágono regular é $\frac{(12-2)180^{\circ}}{12} = 150^{\circ}$. Dado o segmento $AB = \ell_{12}$, podemos traçar um triângulo equilátero com vértice B e sua bissetriz interna b_B, para determinar um ângulo de 150°. Marcando-se sobre esta bissetriz o vértice C do dodecágono tal que $BC = AB = \ell_{12}$, tem-se $AC = \ell_6$. Logo, o centro O do círculo C_1 circunscrito ao dodecágono é o terceiro vértice de um triângulo equilátero de lado AC.

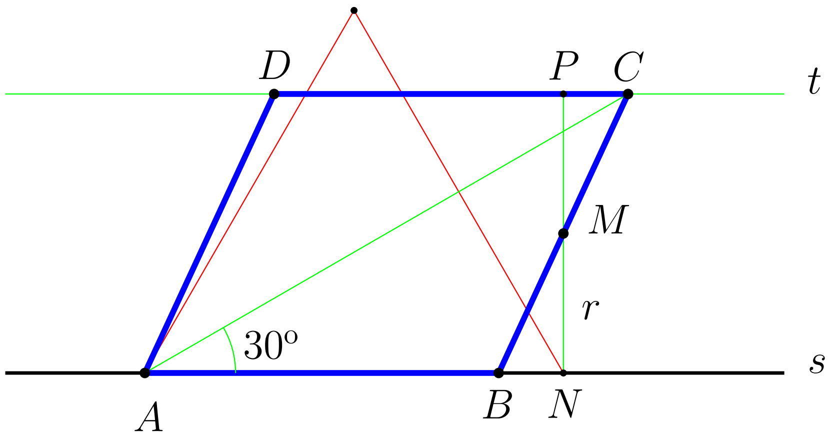
FUVEST 2001, Questão 10: São dados os pontos A e B e um segmento contendo os pontos G, H e I. Sabe-se que A e B pertencem, respectivamente, às diagonais CE e DF de um quadrado $CDEF$, cujo centro é O. A distância de A a O é igual a GH e a medida do lado do quadrado é igual a GI. Construa, usando régua e compasso, um quadrado $CDEF$, satisfazendo as condições acima. Descreva e justifique as construções utilizadas.

Construção: (i) Determine o ponto M médio de GI e trace a mediatriz m de GI, marcando sobre m o ponto P tal que $MP = \frac{GI}{2}$; (ii) Determine o ponto N médio de AB e trace $C_1 \equiv (N, \frac{AB}{2})$; (iii) Trace $C_2 \equiv (A, GH)$, determinando o ponto O, centro do quadrado, sobre C_1; (iv) Trace $C_3 \equiv (O, GP)$, determinando os vértices C, D, E, e F do quadrado desejado sobre as retas suportes de OA e OB.
Justificativa: Seja O o centro do quadrado. Assim, $A\hat{O}B = 90^{\text{o}}$, de modo que O pertence ao círculo C_1 de diâmetro AB. Como $AO = GH$ é dado, o ponto O fica plenamente determinado. Pelo enunciado, o raio do círculo C_3 circunscrito ao quadrado é $GP = \frac{GI\sqrt{2}}{2}$, o que permite determinar os vértices do quadrado, que estão sobre as retas suportes de OA e OB.



FUVEST 2001, Questão 10: Solução.

FUVEST 2002, Questão 10: São dados os pontos A e M e a reta s. Sabe-se que o ponto A é vértice de um paralelogramo $ABCD$; o lado AB está na reta s; M é o ponto médio do lado BC e o ângulo $C\hat{A}B$ tem medida 30^o. Usando régua e compasso, construa esse paralelogramo. Descreva e justifique sua construção.



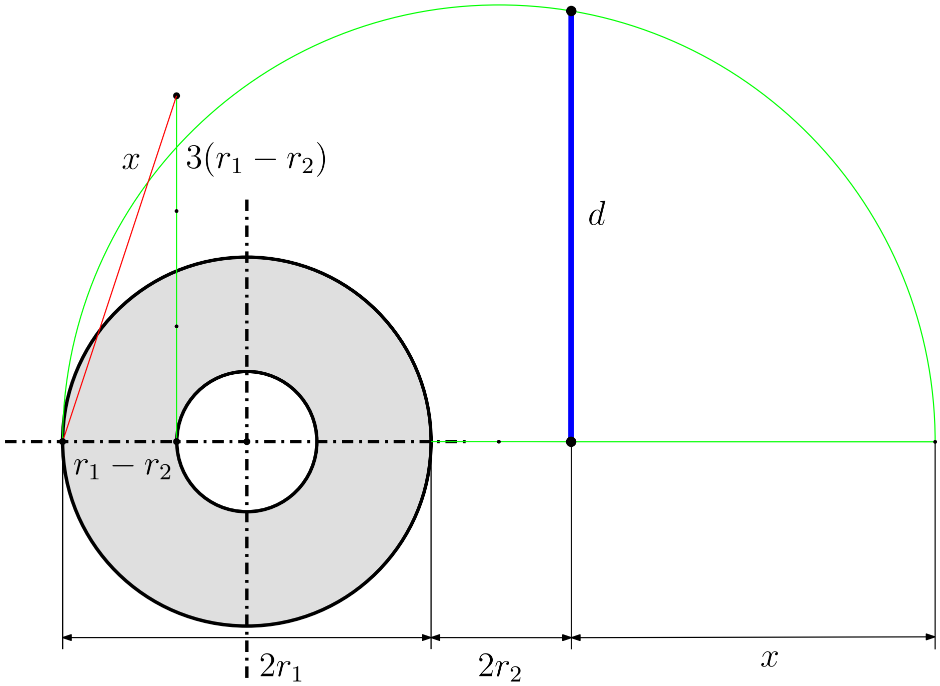
FUVEST 2002, Questão 10: Solução.

Construção: (i) Trace por M uma perpendicular r a s, determinando o ponto N sobre s; (ii) Determine P sobre r tal que $MP = MN$, com M entre N e P, e trace por P uma paralela t a s; (iii) Trace o ângulo de 30^o (bissetriz de triângulo equilátero) a partir de A, determinando o vértice C sobre t; (iv) Prolongue CM, determinando o vértice B sobre s; (v) Trace por A uma paralela a BC, determinando o vértice D sobre t.

Justificativa: Como $ABCD$ é um paralelogramo de lado AB sobre s, então o lado CD está sobre uma paralela t a s. Esta paralela t é tal que qualquer segmento PMN, com P em t e N em s, é tal que $PM = MN$. O vértice C é determinado em t com um ângulo de $C\hat{A}N = 30^o$, como dado no enunciado. O vértice B é determinado sobre s prolongando CM. Por fim, o vértice D é determinado sobre t com $AB = DC$ ou com $AD = BC$.

5 Soluções do ITA

ITA 1979, Questão 11: Determinar, por construção geométrica, o comprimento da diagonal de um quadrado de área equivalente à coroa da Figura 1, representada no Caderno de Respostas.



ITA 1979, Questão 11: Solução - (B) 57 mm.

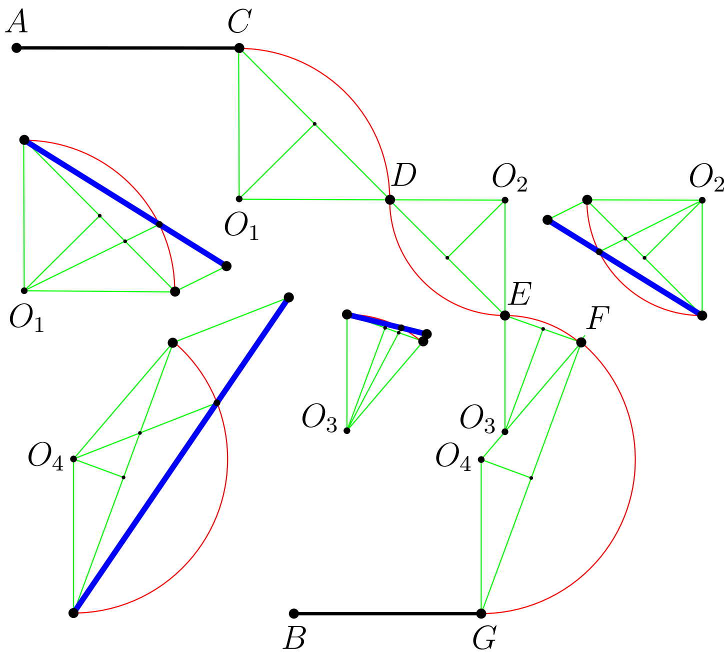
Construção: (i) Construa um triângulo retângulo de catetos $(r_1 - r_2)$ e $3(r_1 - r_2)$, cuja hipotenusa é dada por $x = \sqrt{10}(r_1 - r_2) \approx \pi(r_1 - r_2)$; (ii) Determine a média geométrica d de $2(r_1 + r_2)$ e x.
Justificativa: O lado ℓ do quadrado de área equivalente à da coroa é

$$\ell^2 = \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

e a diagonal d deste quadrado é então

$$d = \ell\sqrt{2} = \sqrt{2\pi(r_1^2 - r_2^2)} = \sqrt{2(r_1 + r_2).\pi(r_1 - r_2)}$$

ITA 1979, Questão 14: Os segmentos AC e BG são partes de um duto, representado por seu eixo e que, do ponto C ao ponto G, é encurvado em quatro arcos de circunferência que concordam nos pontos C, D, E, F e G, conforme a figura a seguir. Pede-se o comprimento do duto, no desenho na escala 1:2,5.



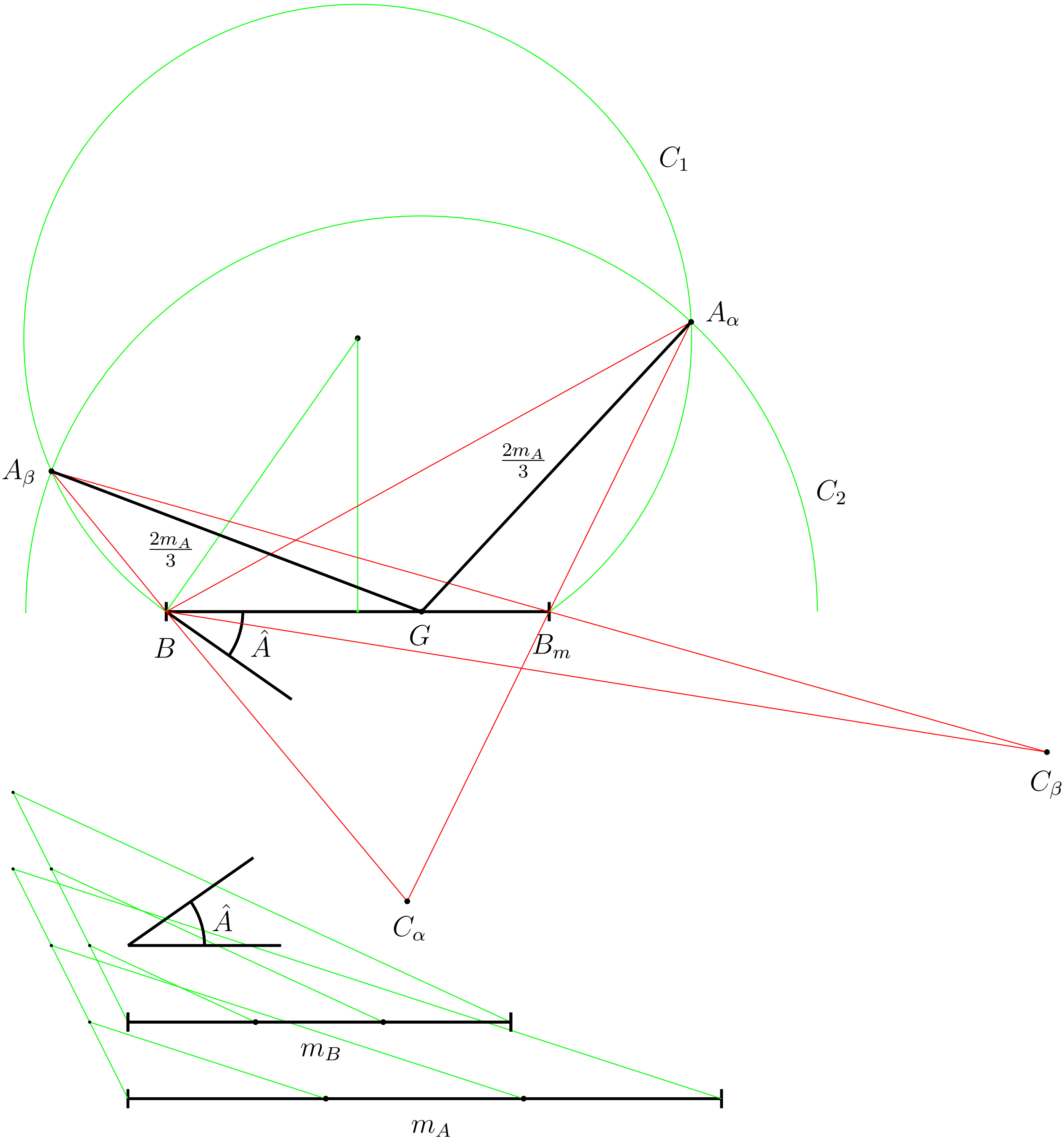
ITA 1979, Questão 14: Solução - (A) 430 mm.

Construção: (i) Trace uma perpendicular a AC por C e a mediatriz de CD, cuja interseção é o centro O_1 do arco CD; (ii) Prolongue O_1D e trace a mediatriz de DE, cuja interseção é o centro O_2 do arco DE; (iii) Prolongue O_2E e trace a mediatriz de EF, cuja interseção é o centro O_3 do arco EF; (iv) Prolongue O_3F, neste caso no sentido de O_3, e trace a mediatriz de FG, cuja interseção é o centro O_4 do arco FG, interseção esta também sobre a perpendicular a BG por G; (v) Retifique os arcos CD, DE, EF e FG, usando, por exemplo, o método de d'Ocagne ([1], pp. 63–65).
Justificativa: No ponto de concordância, as curvas devem ter a mesma tangente, que em um círculo é ortogonal ao raio. Logo, o centro O_1 do arco CD está sobre a perpendicular a AC por C. Para ter a mesma tangente em D que o arco AC, o centro do arco DE é colinear com O_1 e com D. Os demais centros são determinados analogamente. Deve-se incluir os comprimentos AC e BG na resposta, escalando o resultado por 2,5, como exigido no enunciado.

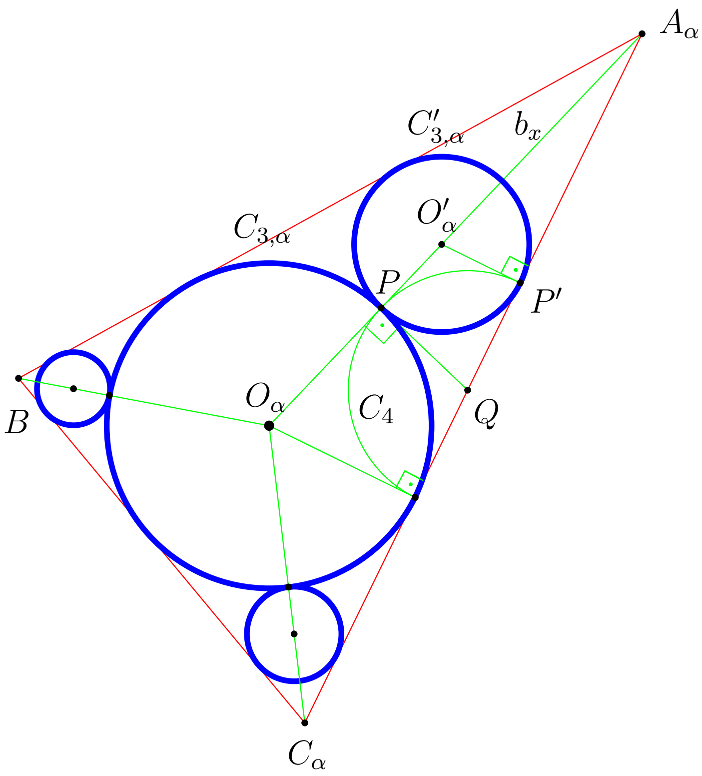
ITA 1979, Questão 15: Determinar a soma dos raios de duas circunferências inscritas num triângulo ABC, tangentes aos lados deste e entre elas, sendo dado o ângulo $\hat{A} = 35^o$, a mediana relativa ao lado BC, igual a 96 mm, e a mediana relativa ao lado AC, igual a 60 mm.

Construção: (i) Trace $BB_m = m_B$ e determine G sobre m_B tal que $BG = 2GB_m$; (ii) Construa o arco-capaz C_1 do ângulo $\hat{A} = 35^o$ relativo à corda BB_m; (iii) Construa o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(G, \frac{2m_A}{3})$, cuja interseção com C_1 é o vértice A; (iv) Prolongue AB_m, determinando o vértice C tal que $AC = 2AB_m$; (v) Trace o círculo C_3, de centro O, inscrito no triângulo ΔABC ([2], Exercício 1.4), cuja interseção com uma bissetriz b_x do triângulo ΔABC é o ponto de tangência P; (vi) Trace por P uma perpendicular a b_x, cuja interseção com um lado do triângulo é o ponto Q; (vii) Trace $C_4 \equiv \mathcal{C}(Q, QP)$, determinando o ponto P' sobre o lado do triângulo; (viii) Trace por P' uma perpendicular ao lado do triângulo, cuja interseção com a bissetriz b_x é o centro O' do círculo C_3', tangente a C_3 e a dois lados do triângulo ΔABC.
Justificativa: O baricentro do triângulo ΔABC está sobre as medianas. Assim, o vértice A está sobre o arco-capaz do ângulo $\hat{A}$ dado, relativo à mediana m_B, e também sobre o círculo de centro em G e raio $\frac{2m_A}{3}$. Definido o triângulo ΔABC, traça-se o seu círculo inscrito C_3 de centro O.

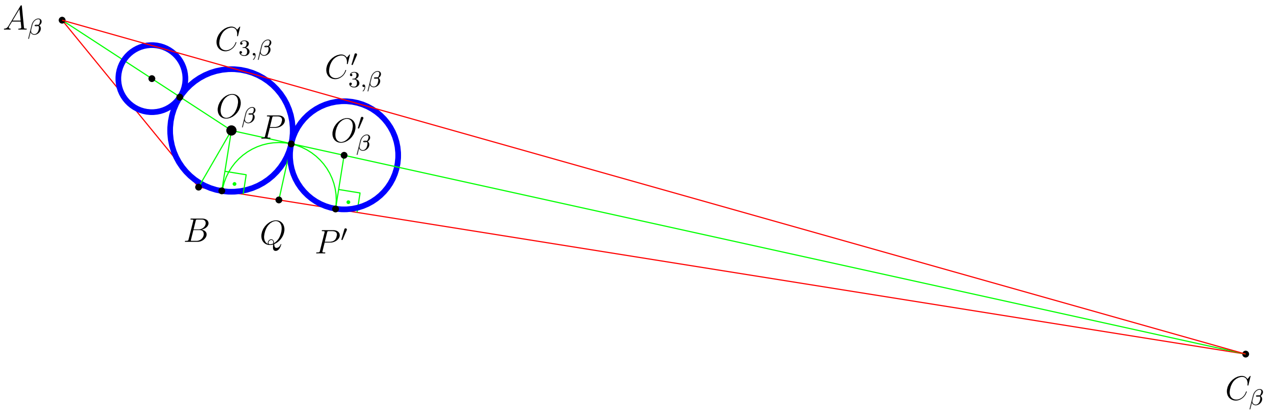
O centro do segundo c'ırculo C_3', tangente a dois lados do triângulo ΔABC e ao círculo C_3, está sobre a bissetriz do ângulo formado pelos dois lados. A tangente comum aos dois círculos C_3 e C_3' é então perpendicular à referida bissetriz, e determina sobre C_3 o ponto de tangência P e sobre um lado do triângulo o ponto Q. Pelo conceito de potência, a outra tangente QP' por Q ao círculo C_3' deve ter comprimento $QP' = QP$, o que permite determinar o outro ponto P' de tangência a C_3' por Q. O centro O' de C_3' está sobre a perpendicular ao lado do triângulo por P'.
sln: Há dois triângulos ΔABC que satisfazem as restrições do problema. Cada triângulo gera três possíveis soluções para o problema, que deve ser anulado.



ITA 1979, Questão 15: Solução - Questão Anulada.



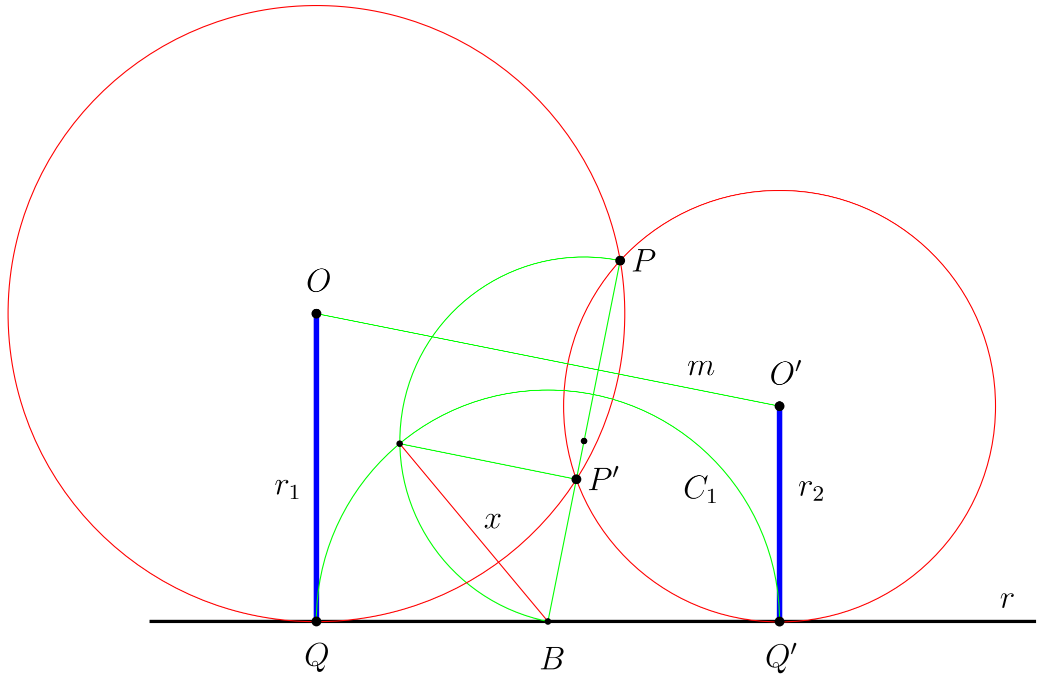
(a)



(b)

ITA 1979, Questão 15: (Continuação) Possíveis soluções para os triângulos: (a) $\Delta A_\alpha B C_\alpha$; (b) $\Delta A_\beta B C_\beta$.

ITA 1980, Questão 16: São dados dois pontos (P, P') e uma reta (r). Determinar a soma dos raios das circunferências que contêm os pontos e são tangentes à reta.



ITA 1980, Questão 16: Solução I (geométrica) - (E) 69 mm.

Construção I (geométrica): (i) Trace a mediatriz m de PP'; (ii) Prolongue PP', determinando o ponto B sobre a reta r; (ii) Determine a média geométrica $x = \sqrt{BP.BP'}$; (iii) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(B, x)$, cujas interseções com a reta r são os pontos Q e Q'; (iv) Trace perpendiculares a r por Q e Q', cujas respectivas interseções com a mediatrz m são os pontos O e O', centros dos círculos de raios desejados $r_1 = OQ$ e $r_2 = O'Q'$.
Justificativa I (geométrica): Como P e P' pertencem a ambos os círculos, a potência do ponto B em relação aos dois círculos é a mesma e igual a $BP.BP'$. Com isto, o comprimento da tangente aos dois círculos por B é dado por $x = \sqrt{BP.BP'}$, o que permite determinar os pontos Q e Q' de tangência por B em ambos os círculos. Naturalmente, os centros dos círculos estão sobre as respectivas perpendiculares a r por estes pontos de tangência.

sln: Este problema tem uma solução algébrica que gera uma construção muito simples e interessante.
Construção II (algébrica): (i) Trace pelo ponto médio M de PP' a mediatriz m, cuja interseção com a reta r é o ponto A; (ii) Prolongue PP', determinando o ponto B sobre a reta r; (iii) Determine a quarta proporcional $AM : 2BM = AB : (r_1 + r_2)$.
Justificativa II (algébrica): Das semelhanças dos triângulos ΔABM, ΔAOQ, $\Delta AO'Q'$ e (onde os pontos A, B, O, O', Q, Q' e M foram definidos nas construções acima), tem-se

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AO}{OQ} = \frac{AO'}{O'Q'} \Rightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{AM + OM}{r_1} = \frac{AM - O'M}{r_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OM = \frac{AB.r_1 - AM.BM}{BM} \\ O'M = \frac{AB.r_2 - AM.BM}{BM} \end{cases}$$

Além disto, dos triângulos retângulos ΔOMP e $\Delta OM'P$, tem-se

$$\begin{cases} OM^2 = OP^2 - PM^2 = r_1^2 - PM^2 \\ O'M^2 = O'P^2 - PM^2 = r_2^2 - PM^2 \end{cases}$$

Usando estes valores de OM e $O'M$ nas equações anteriores, ambas tornam-se equações do tipo

$$AM^2.r_x^2 - 2AB.AM.BM.r_x + BM^2.AP^2 = 0$$

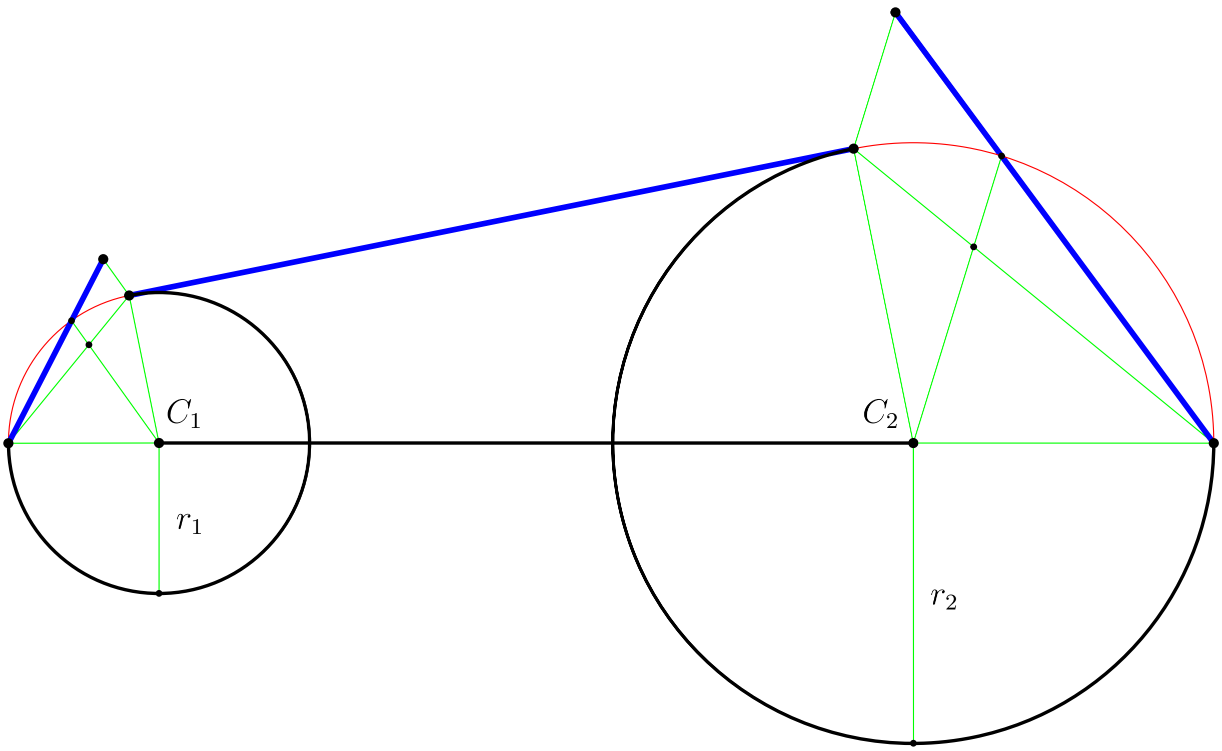
cuja soma das respectivas soluções é então dada por

$$(r_1 + r_2) = \frac{2AB.AM.BM}{AM^2} = \frac{2AB.BM}{AM}$$

ITA 1980, Questão 17: Um compressor centrífugo é acionado por um motor elétrico, sendo usada uma correia chata, suposta inteiramente tensa e de espessura desprezível. Sabendo-se que:

- A polia do motor é de raio r_1 e de centro C_1.
- A polia do compressor é de raio r_2 e de centro C_2.
- E que $r_1 = 200$ mm, $r_2 = 400$ mm, $C_1C_2 = 1000$ mm.

Pede-se determinar o comprimento real da correia, sendo a escala 1:10.

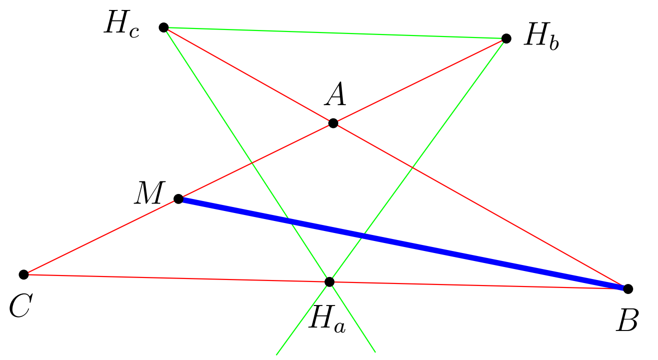


ITA 1980, Questão 17: Solução - (C) 3940 mm.

Construção: (i) Trace a tangente comum externa aos dois círculos dados ([2], Exercício 1.11(a)), determinando os pontos de tangência que delimitam os arcos da correia em cada círculo; (ii) Retifique os arcos, usando, por exemplo, o método de d'Ocagne ([1], pp. 63–65). Por simetria, trabalhamos apenas com a metade superior da correia.

Justificativa: O problema consiste em se determinar a correia, que é definida pela tangente comum externa aos dois círculos dados.

ITA 1980 - Questão 18: Determinar o comprimento da mediana em relação ao vértice B de um triângulo ABC, do qual conhecemos os pés das alturas H_a, H_b e H_c, sabendo-se que o ângulo $\hat{A}$ é obtuso.

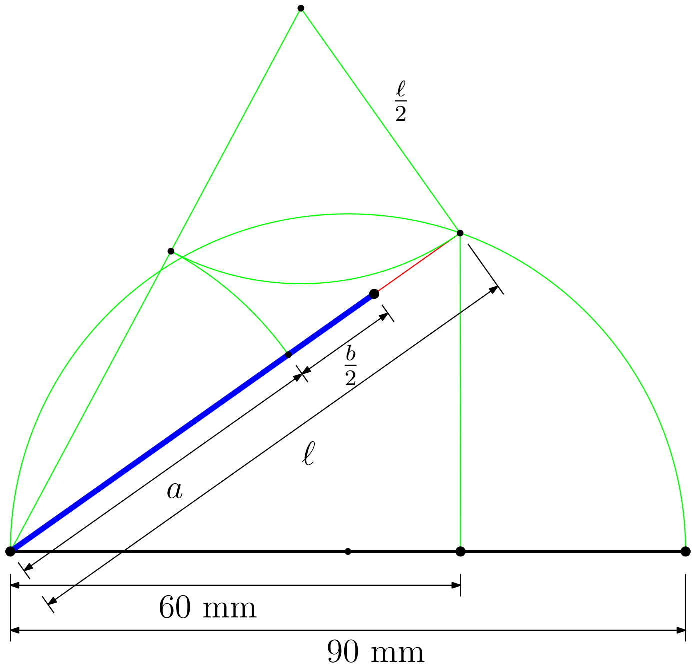


ITA 1980, Questão 18: Solução - (B) 61 mm.

Construção: (i) Trace os lados H_aH_b, H_aH_c e H_bH_c do triângulo órtico $\Delta H_aH_bH_c$; (ii) Trace as bissetrizes externa (no vértice H_a) e internas (nos vértices H_b e H_c) do triângulo órtico, cujas interseções determinam o triângulo ΔABC: A é interseção das bissetrizes internas por H_b e H_c; B é interseção das bissetrizes externa por H_a e interna por H_c; C é interseção das bissetrizes externa por H_a e interna por H_b; (iii) Determine o ponto médio M de AC e trace a mediana BM desejada.

Justificativa: As alturas do triângulo ΔABC são as bissetrizes de seu triângulo órtico $\Delta H_aH_bH_c$. Como o ângulo $\hat{A}$ é obtuso, as alturas pelos vértices B e C serão na verdade bissetrizes externas do triângulo órtico $\Delta H_aH_bH_c$. Note que as bissetrizes interna e externa em um dado ângulo são perpendiculares entre si [4], pp. 16–18.

ITA 1980, Questão 19: Os lados e a base de um triângulo isósceles são os segmentos áureos da média proporcional de dois segmentos que medem, respectivamente, 60 e 90 mm. Determinar o semi-perímetro deste triângulo, considerando o menor segmento como a base.



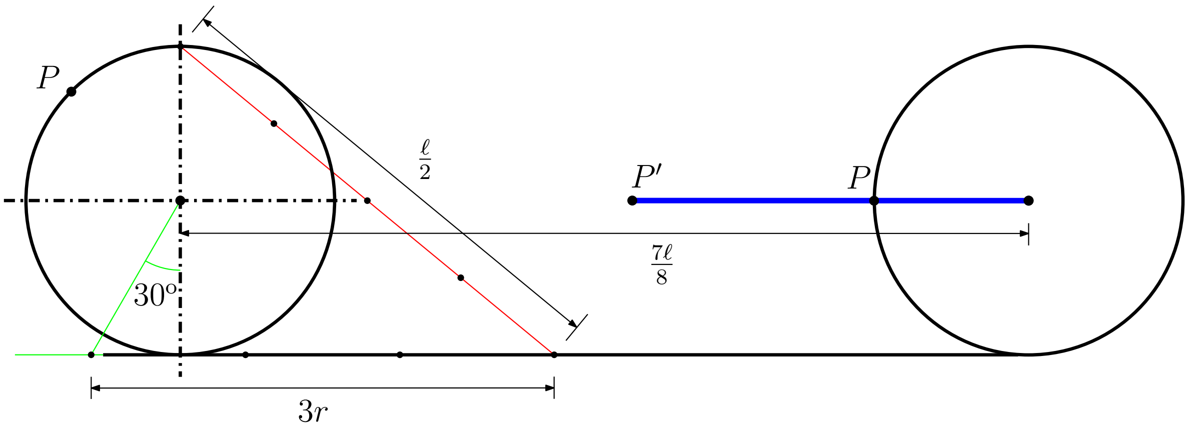
ITA 1980, Questão 19: Solução - (E) 59 mm.

Construção: (i) Determine a média proporcional $\ell = \sqrt{60.90}$; (ii) Determine os segmentos áureos a e b de ℓ; (iii) O semi-perímetro desejado é dado por $p = a + \frac{b}{2}$.

Justificativa: Algebricamente, $\ell = \sqrt{60.90} = 30\sqrt{6}$. Além disto, $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\ell$ e $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,\ell$, de forma que $\frac{\ell}{a} = \frac{a}{b}$, com $(a+b) = \ell$. Logo, o semi-perímetro desejado é dado por

$$p = \frac{2a+b}{2} = a + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\ell + \frac{3-\sqrt{5}}{4}\,\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,30\sqrt{6} = 59,45 \text{ mm}$$

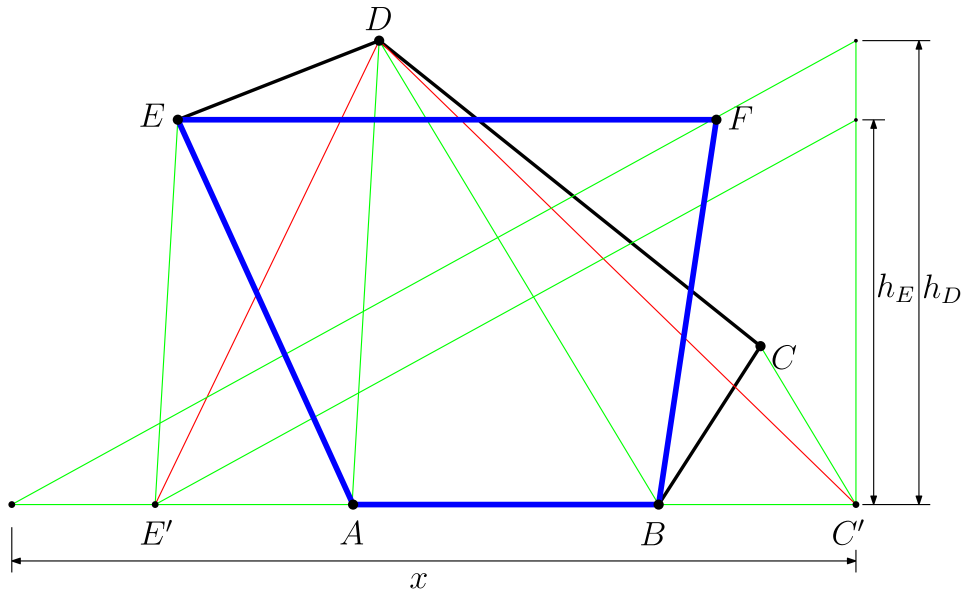
ITA 1981, Questão 16: São dados uma circunferência de raio igual a 20 mm, um ponto P na mesma, um ponto P' distante de seu centro e uma reta r, como mostra a figura abaixo. Rolando a circunferência sem escorregar sobre a reta, partindo do ponto P, desenvolver 315° no sentido horário. Determinar a distância do centro da circunferência até o ponto P', quando a mesma completar o ângulo dado.



ITA 1981, Questão 16: Solução - (?).

Construção: (i) Retifique a semi-circunferência, determinando o comprimento $\frac{\ell}{2}$; (ii) Marque a distância $\frac{7\ell}{8}$ a partir do centro da circunferência, determinando a nova posição deste ponto após o deslocamento da circunferência.
Justificativa: O ângulo de 315° corresponde a $\frac{7}{8}$ da circunferência completa, determinando o deslocamento do centro da circunferência e do ponto P, correspondentemente.
sln: O problema não apresenta opção de resposta adequada. Além disto, o ponto P indicado é inútil. Considerando que o problema pede a distância PP' após o deslocamento, a resposta é **(E) 33 mm**.

ITA 1981, Questão 19: Determinar o perímetro do trapézio de bases AB e EF equivalente ao pentágono $ABCDE$.



ITA 1981, Questão 19: Solução - (E) 220 mm.

Construção: (i) Trace por E uma paralela a AD, cuja interseção com reta suporte de AB é o ponto E'; (ii) Trace por C uma paralela a BD, cuja interseção com reta suporte de AB é o ponto C'; (iii) Determine a quarta proporcional de $h_E : E'C' = h_D : x$, onde h_D e h_E são as respectivas alturas de E e D relativas ao lado AB; (iv) Marque a distância $EF = (x - AB)$ a partir do vértice E, determinando o vértice F do trapézio desejado.
Justificativa: As áreas dos triângulos ΔAED, $\Delta AE'D$, ΔBCD e $\Delta BC'D$ são tais que

$$\begin{cases} S_{AED} = S_{AE'D} = \frac{AE'.h_D}{2} \\ S_{BCD} = S_{BC'D} = \frac{BC'.h_D}{2} \end{cases} \Rightarrow S_{ABCDE} = S_{E'C'D} = \frac{E'C'.h_D}{2}$$

Já a área do trapézio desejado seria dada por

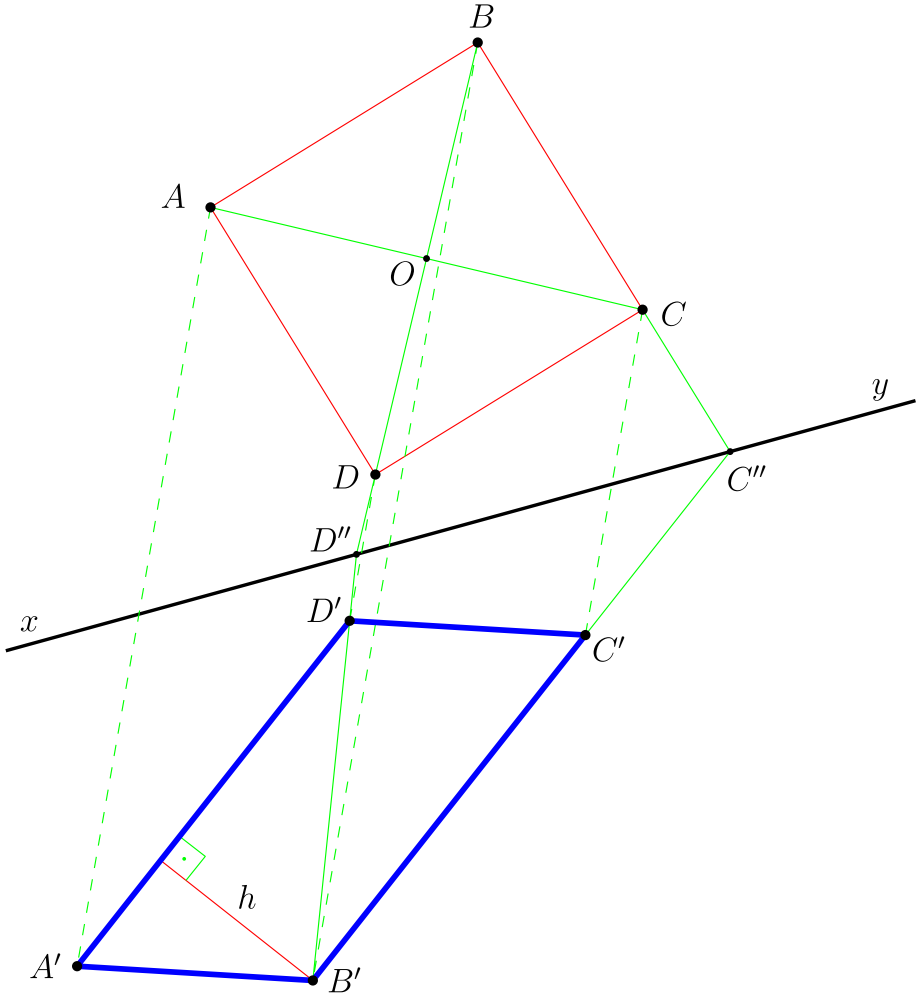
$$S_{ABEF} = \frac{(AB + EF)}{2} h_E$$

Fazendo-se $S_{ABCDE} = S_{ABEF}$, tem-se

$$\frac{h_E}{E'C'} = \frac{h_D}{AB + EF}$$

o que permite determinar a base EF do trapézio.

ITA 1981, Questão 20: Achar a área, em milímetros quadrados, da figura afim do quadrado $ABCD$ (sentido horário), do qual conhecemos sua diagonal AC e o ponto B', afim do vértice B. A reta xy é o eixo de afinidade.



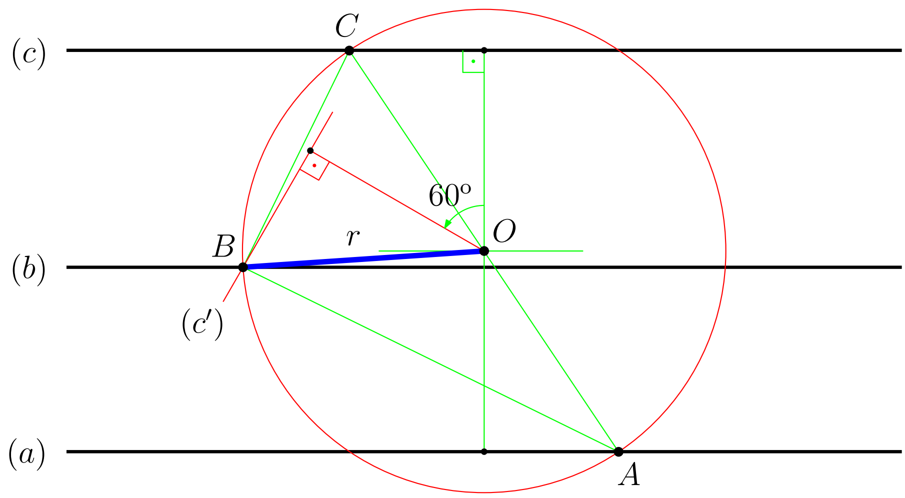
ITA 1981, Questão 20: Solução - (D) 1530 mm^2.

Construção: (i) Trace a mediatriz da diagonal AC do quadrado, marcando os extremos B e D tais que $OA = OB = OC = OD$, onde O é o ponto médio de AC; (ii) Prolongue BC e BD, cujas interseções com a reta r são os pontos C'' e D'', respectivamente; (iii) Trace $B'C''$ e $B'D''$, cujas interseções com as paralelas a BB' por C e D são os pontos C' e D', respectivamente; (iv) Trace por B' e D' retas paralelas a $C'D'$ e $B'C'$, respectivamente, cuja interseção é o ponto A'; (v) Determine a altura h de B' relativa ao lado $A'D'$.

Justificativa: A transformação afim leva pontos a suas imagens através de retas paralelas. Além disto, a transformação afim, mapeia retas em retas afins. Pontos pertencentes ao eixo de afinidade (no caso, C'' e D'') são mapeados em si mesmo. Logo, C' e D' pertencem aos respectivos mapeamentos das retas $B'C''$ e $B'D''$, de forma que CC' e DD' são paralelas a BB'. O ponto A' complementa o paralelogramo $A'B'C'D'$, afim do quadrado $ABCD$ e com área

$$S_{A'B'C'D'} = A'D'.h$$

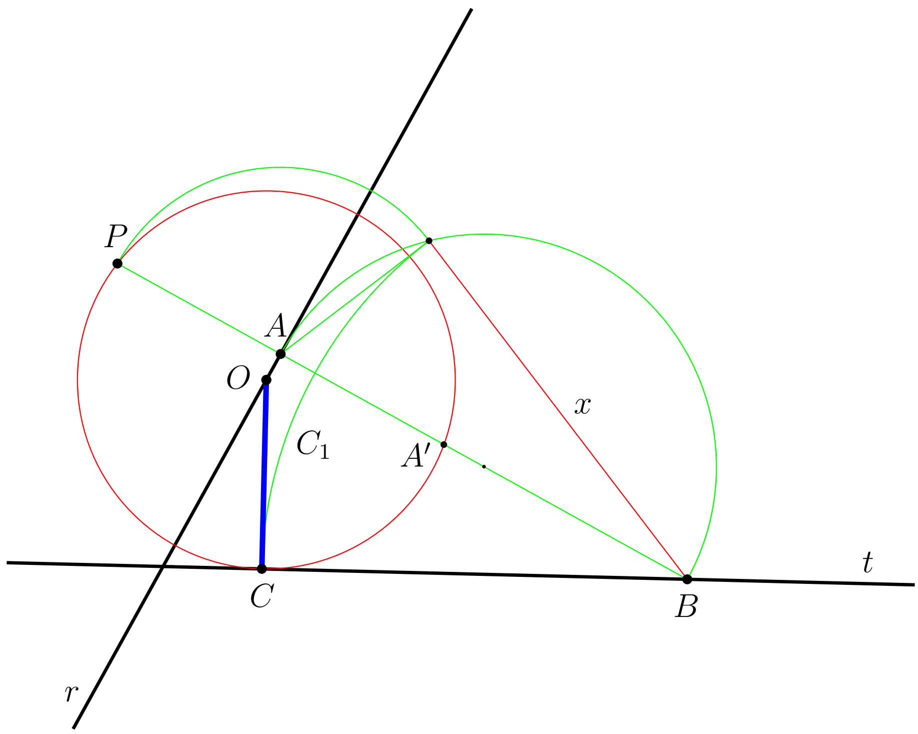
ITA 1982, Questão 16: As retas a, b e c são lugares geométricos de três pontos, respectivamente, A, B e C, que pertencem a uma circunferência. Sabendo-se que nesta circunferência o arco AB mede 120º e o arco BC mede 60º, pergunta-se qual o valor de seu raio.



ITA 1982, Questão 16: Solução - (A) 32 mm.

Construção: (i) Trace a reta equidistante das retas a e c e tome um ponto O qualquer sobre esta reta; (ii) Determine a rotação $c' = R_{O,60^o}(c)$ da reta c de um ângulo de 60º em torno de O, cuja interseção com a reta b é o vértice B, determinando o raio desejado $r = OB$.
Justificativa: Como $A\hat{O}B = 120^o$ e $B\hat{O}C = 60^o$, então $A\hat{O}C = 180^o$ e o ponto O é médio de AC. Com isto, o ponto B pode ser obtido pela rotação do ponto C de 60º em torno de O. O raio r desejado pode ser determinado por $r = OB = OC = OA = BC$.

ITA 1982, Questão 17: São dadas duas retas r e t e um ponto P. Determinar o raio da circunferência que passa por P, é tangente à reta t, sendo a reta r o lugar geométrico do centro O.



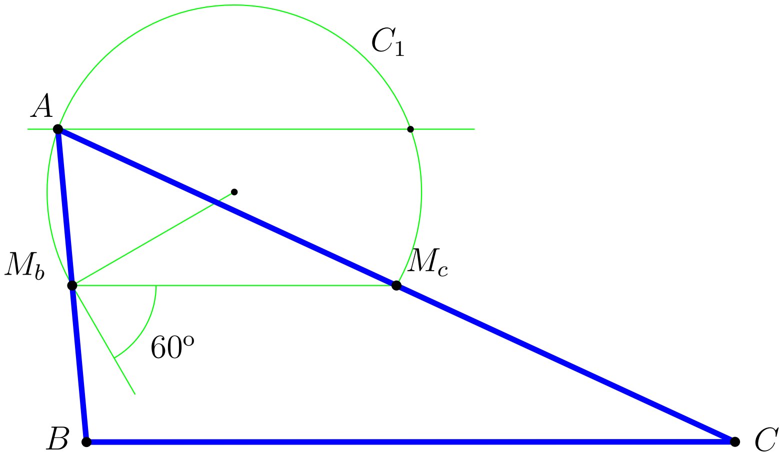
ITA 1982, Questão 17: Solução - (D) 25 mm.

Construção: (i) Trace por P uma perpendicular à reta r, determinando os pontos A em r e B em t; (ii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa AB e cateto PA, determinando o outro cateto x; (iii) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(B, x)$, cujas interseções com a reta t são os pontos C e C'; (iv) Trace por C uma perpendicular à reta t, cuja interseção com r é o centro O da circunferência desejada.
Justificativa: A potência do ponto B em relação à circunferência solução é

$$BC^2 = BA'.BP = (BA - AA')(BA + AP) = BA^2 - AP^2$$

pois $AA' = PA$, sendo A' a interseção de BP com a circunferência solução, já que PA' é ortogonal à r. A equação anterior, determina a posição do ponto C.
sln: Na verdade, há uma segunda solução gerada pelo ponto C'.
sln: Outra solução seria marcar A', entre P e B e tal que $AA' = PA$, e calcular diretamente $BC = \sqrt{BA'.BP}$.

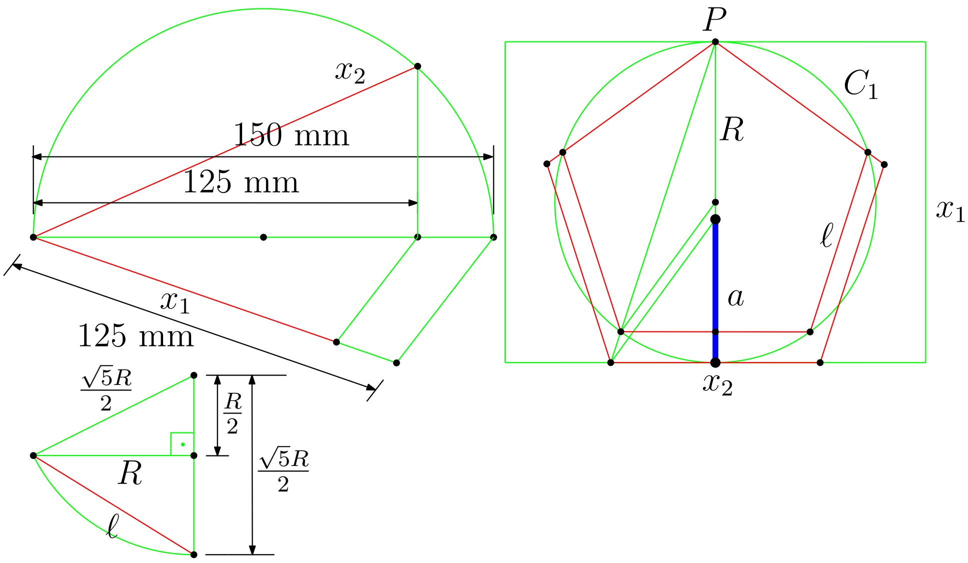
ITA 1982, Questão 18: M_b e M_c são, respectivamente, os pontos médios dos lados b e c de um triângulo ABC. Sabendo-se que o ângulo do vértice A é igual a 60º e que a altura conduzida deste mesmo vértice A mede 42 mm, pergunta-se o valor do perímetro do triângulo.



ITA 1982, Questão 18: Solução - (E) 227.

Construção: (i) Trace o arco-capaz C_1 do ângulo $\hat{A} = 60^{\circ}$ relativo á corda M_bM_c; (ii) Trace uma paralela a M_bM_c a uma distância $\frac{h_a}{2} = 21$ mm, cuja interseção com o círculo C_1 é o vértice A; (iii) Prolongue AM_b e AM_c e determine os vértices B e C tais que $M_bB = AM_b$ e $M_cC = AM_c$.
Justificativa: O segmento M_bM_c é a base média do triângulo desejado, com isto M_bM_c é paralelo a BC e A está a uma altura $\frac{h_a}{2}$ de M_bM_c.

ITA 1982, Questão 20: A um ajustador mecânico é fornecida uma chapa de aço, retangular. Pede-se o apótema do maior pentágono que pode ser riscado nesta chapa, sabendo-se que as dimensões desta são, respectivamente, a 3ª proporcional e a média proporcional dos valores 150 mm e 125 mm. A resposta deverá ser indicada na escala 1:2,5.



ITA 1982, Questão 20: Solução - (?).

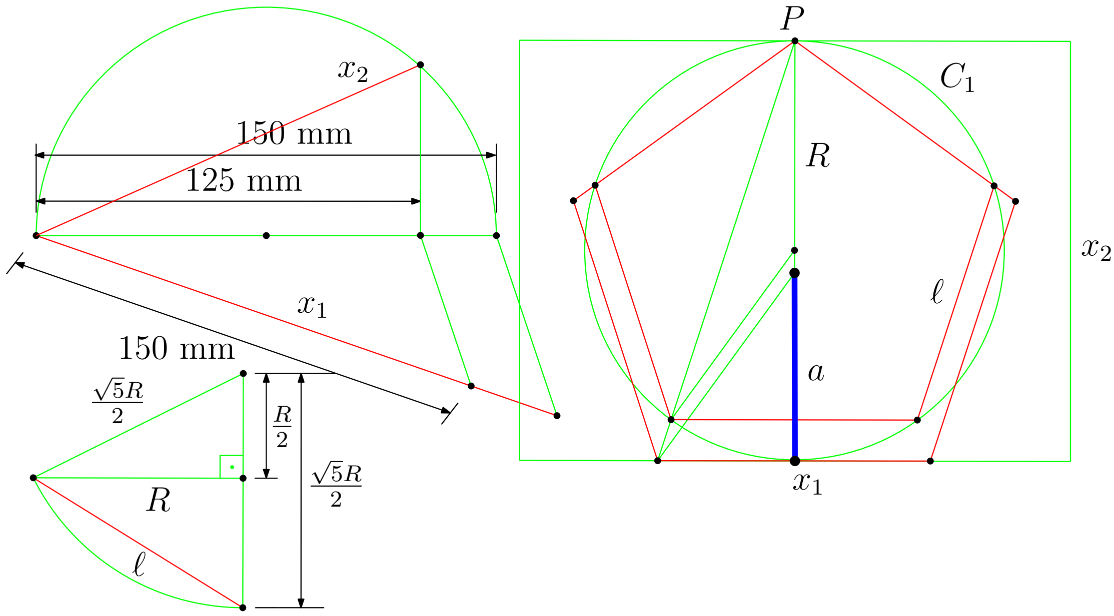
Construção: (i) Determine a terceira proporcional $150 : 125 = 125 : x_1$ e a média proporcional $x_2 = \sqrt{150.125}$, e esboce a chapa retangular de dimensões $x_1 \times x_2$; (ii) Trace um círculo C_1, de raio R qualquer e tangente a um lado de comprimento x_2 em seu ponto médio P; (iii) Construa o pentágono regular inscrito em C_1, de lado $\ell = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R$ ([2], Exercício 2.25) e com um vértice em P; (iv) Determine, por homotetia de centro P, o pentágono desejado de apótema a máximo.

Justificativa: A digonal d e a altura $h = (R + a)$, onde a é o apótema do pentágono regular, são tais que

$$\begin{cases} d = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell \\ h = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\,\ell \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{h} < \frac{x_2}{x_1}$$

Logo, o aspecto limitante será a altura h, e não a largura d, do pentágono.

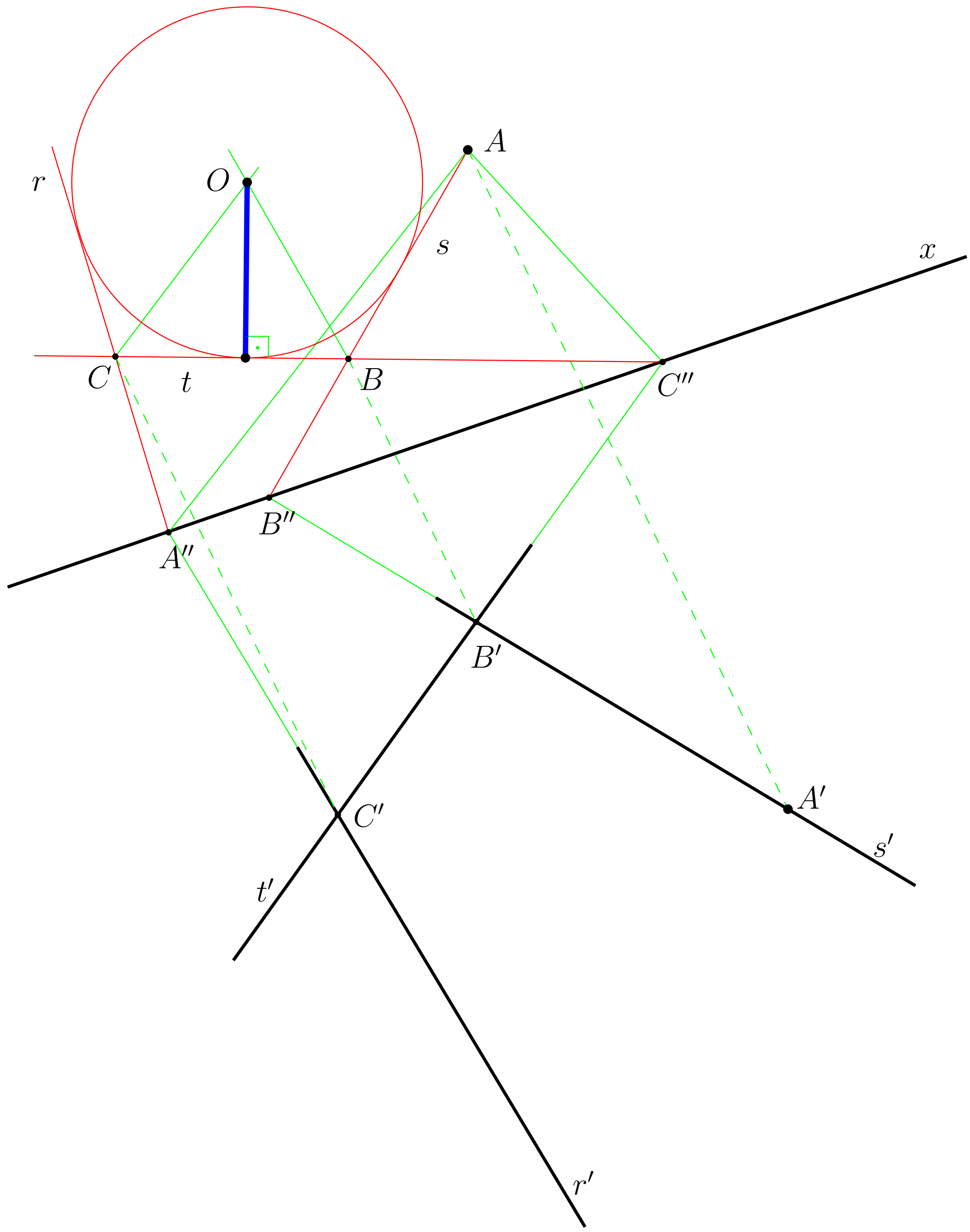
sln: O problema não apresenta opção de resposta adequada. Considerando x_1 como a terceira proporcional de 125 mm e 150 mm, ou seja, fazendo $125 : 150 = 150 : x_1$, e repetindo a construção acima, tem-se $a = 25$ mm. Este valor, porém, deveria ser escalado para obter a resposta adequada.



ITA 1982, Questão 20 (modificada): Solução - (C) 25 mm.

ITA 1983, Questão 16: As retas r', s' e t' são figuras afins das retas r, s e t. Determinar o raio da circunferência tangente às retas r, s e t, sabendo-se que os pontos A e A' são pontos afins e x é o eixo de afinidade.

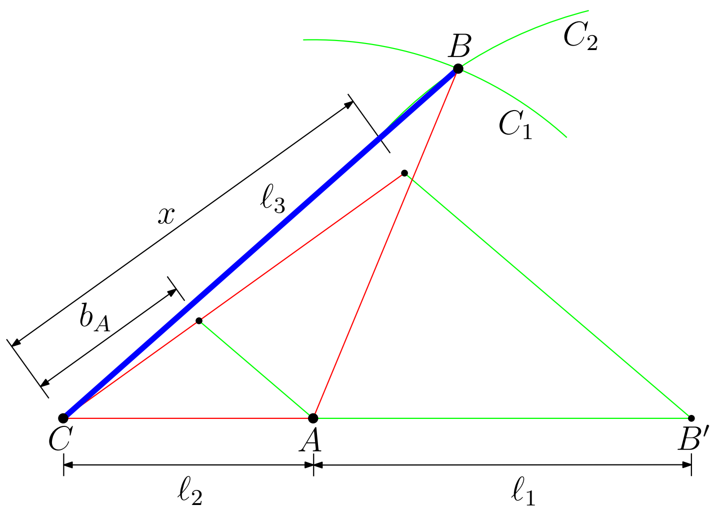
Construção: (i) Sejam as interseções B', de s' com t', e C', de r' com t'; (ii) Prolongue r', s' e t', cujas interseções com a reta x são os pontos A'', B'' e C'', respectivamente; (iii) A reta s é determinada por AB'', cuja interseção com uma paralela por B' a AA' é o ponto B; (iv) A reta t é determinada por BC'', cuja interseção com uma paralela por C' a AA' é o ponto C; (v) A reta r é determinada por CA''; (vi) Trace as bissetrizes dos ângulos obtusos entre r e t em C e entre s e t em B, determinando o centro O da circunferência desejada.
Justificativa: A transformação de afinidade de pontos se dá por retas paralelas a AA', que são pontos afins. As interseções de r', s' e t' com o eixo de afinidade x pertencem às respectivas retas afins r, s e t. As interseções de r', s' e t' entre si se transformam nas interseções de r, s e t. Assim, determinamos as retas s, t e r, nesta ordem. O centro da circunferência tangente a r, s e t está sobre as bissetrizes dos ângulos formados por estas três retas.



ITA 1983, Questão 16: Solução - (B) 25 mm.

ITA 1983, Questão 17: Determinar o comprimento aproximado do lado oposto ao vértice A de um triângulo qualquer, sendo dados os lados ℓ_1 e ℓ_2 que definem o vértice A. É conhecido também o comprimento da bissetriz b_A, de origem em A.

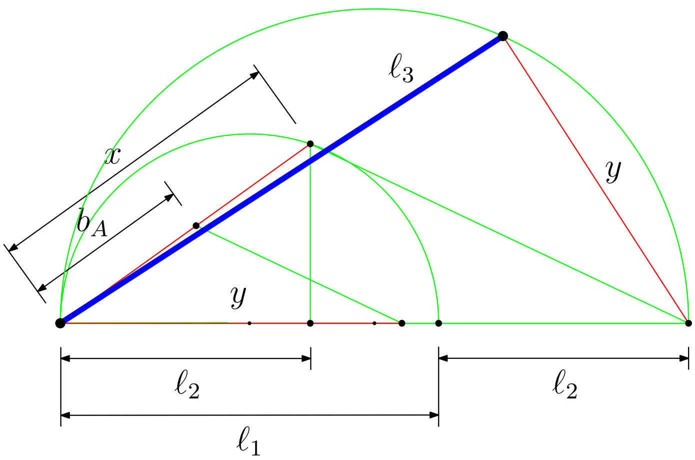
- $\ell_1 = 50$ mm $\quad \ell_2 = 33$ mm $\quad b_A = 22$ mm



ITA 1983, Questão 17: Solução I (geométrica; baseada em solução do Curso ETAPA) - (B) 70 mm.

Construção I (geométrica; baseada em solução do Curso ETAPA): (i) Determine os pontos C, A e B', colineares e com A entre C e B', tais que $CA = \ell_2$ e $AB' = \ell_1$; (ii) Determine a quarta proporcional de $\ell_2 : b_A = (\ell_1 + \ell_2) : x$; (iii) Trace os círculos $C_1 \equiv \mathcal{C}(A, \ell_1)$ e $C_2 \equiv \mathcal{C}(B', x)$, cuja interseção define o vértice B.

Justificativa I (geométrica; baseada em solução do Curso ETAPA): No triângulo original ΔABC, seja $\hat{A} = 2\alpha$, de forma que na figura-solução tenhamos o ângulo externo $B'\hat{A}B = (180^{\text{o}} - 2\alpha)$. Da construção acima, o triângulo $\Delta ABB'$ é isósceles e tal que $A\hat{B}'B = A\hat{B}B' = \alpha$, de forma que BB' é paralelo à bissetriz b_A no triângulo ΔABC. Com isto, $\ell_2 : b_A = (\ell_1 + \ell_2) : BB'$, e o vértice B pode ser determinado já que são conhecidas as distâncias AB e BB'.



ITA 1983, Questão 17: Solução II (algébrica) - (B) 70 mm.

Construção II (algébrica): (i) Determine a média proporcional $x = \sqrt{\ell_1\ell_2}$; (ii) Determine a quarta proporcional $x : b_A = (\ell_1 + \ell_2) : y$; (iii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa $(\ell_1 + \ell_2)$ e cateto y, determinando o outro cateto ℓ_3.

Justificativa II (algébrica): Pelos Teoremas das Bissetrizes e de Stewart, têm-se

$$\begin{cases} \frac{m}{\ell_1} = \frac{n}{\ell_2} = \frac{m+n}{\ell_1+\ell_2} = \frac{\ell_3}{\ell_1+\ell_2} \Rightarrow m = \frac{\ell_3\ell_2}{\ell_1+\ell_2} \quad \text{e} \quad n = \frac{\ell_3\ell_1}{\ell_1+\ell_2} \\ \ell_1^2 m + \ell_2^2 n = (mn + b_A^2)\ell_3 \end{cases}$$

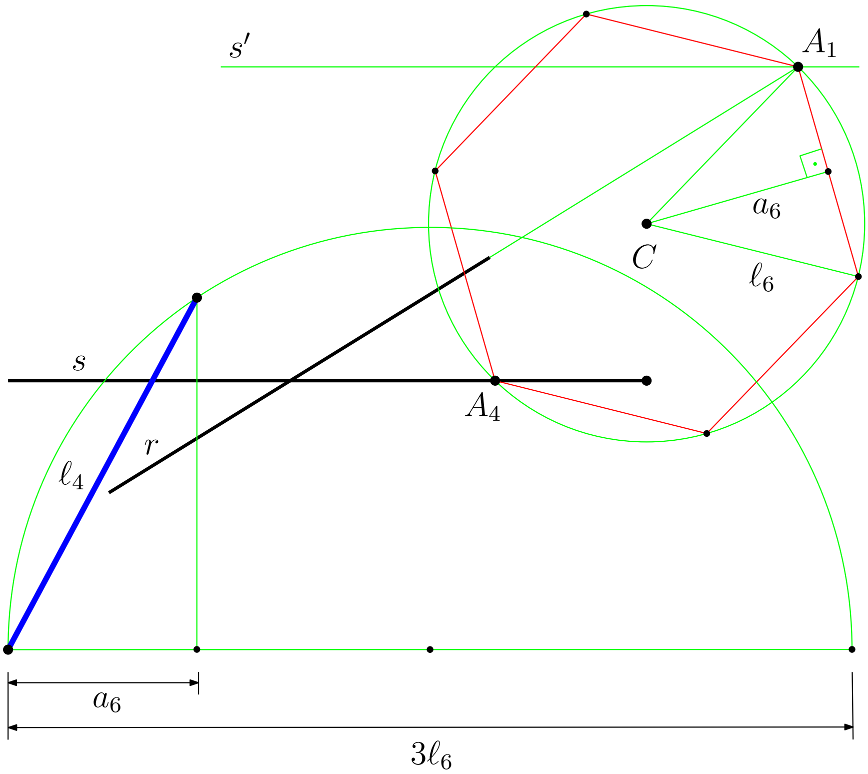
Logo,

$$\frac{\ell_1^2\ell_3\ell_2}{\ell_1+\ell_2} + \frac{\ell_2^2\ell_3\ell_1}{\ell_1+\ell_2} = \left[\frac{\ell_3^2\ell_1\ell_2}{(\ell_1+\ell_2)^2} + b_A^2\right]\ell_3$$

e então

$$\ell_3 = (\ell_1+\ell_2)\sqrt{1 - \frac{b_A}{\ell_1\ell_2}} = (50+33)\sqrt{1 - \frac{22^2}{50 \times 33}} \approx 70 \text{ mm}$$

ITA 1983, Questão 18: São dadas as retas r e s e um ponto C. Construir um hexágono regular, tal que tenha o ponto C como centro da circunferência circunscrita e dois vértices opostos do hexágono estão um sobre a reta r e outro sobre a reta s. Determinar graficamente o lado do quadrado de área equivalente à do hexágono.



ITA 1983, Questão 18: Solução - (E) 50 mm.

Construção: (i) Trace a reta s' paralela a s de modo que o ponto C seja equidistante de s' e s, determinando sobre a reta r um vértice A_1 do hexágono de lado $\ell_6 = CA_1$; (ii) Determine a média proporcional ℓ_4 do semi-perímetro $p_6 = 3\ell_6$ e do apótema a_6 do hexágono.

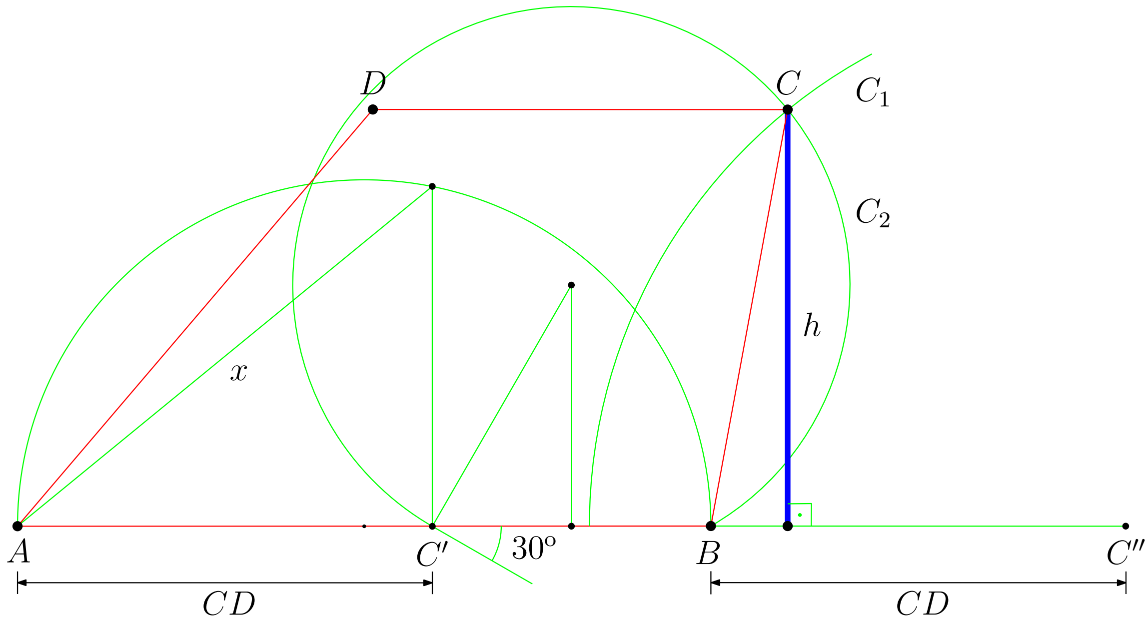
Justificativa: Como A_1 e A_4 são opostos, por simetria C é médio de A_1A_4. Logo, a reta s' é lugar geométrico de A_1, assim como a reta r, o que determina o vértice A_1. Por equivalência de áreas, tem-se $\ell_4^2 = p_6 a_6$, ou seja

$$\ell_4 = \sqrt{3\ell_6.a_6}$$

sln: Minha construção deu de fato $\ell \approx 53$ mm.

ITA 1983, Questão 19: Determinar graficamente a altura do trapézio $ABCD$, conhecendo-se:

- Base $AB = 92$ mm;   Base $CD = 55$ mm.
- A diagonal BD é média proporcional dos segmentos AB e CD.
- O ponto E é o ponto de concurso das retas suportes dos lados AD e BC e o ângulo $A\hat{E}B = 30^{\circ}$.
- Identificação dos pontos A, B, C e D no sentido anti-horário.

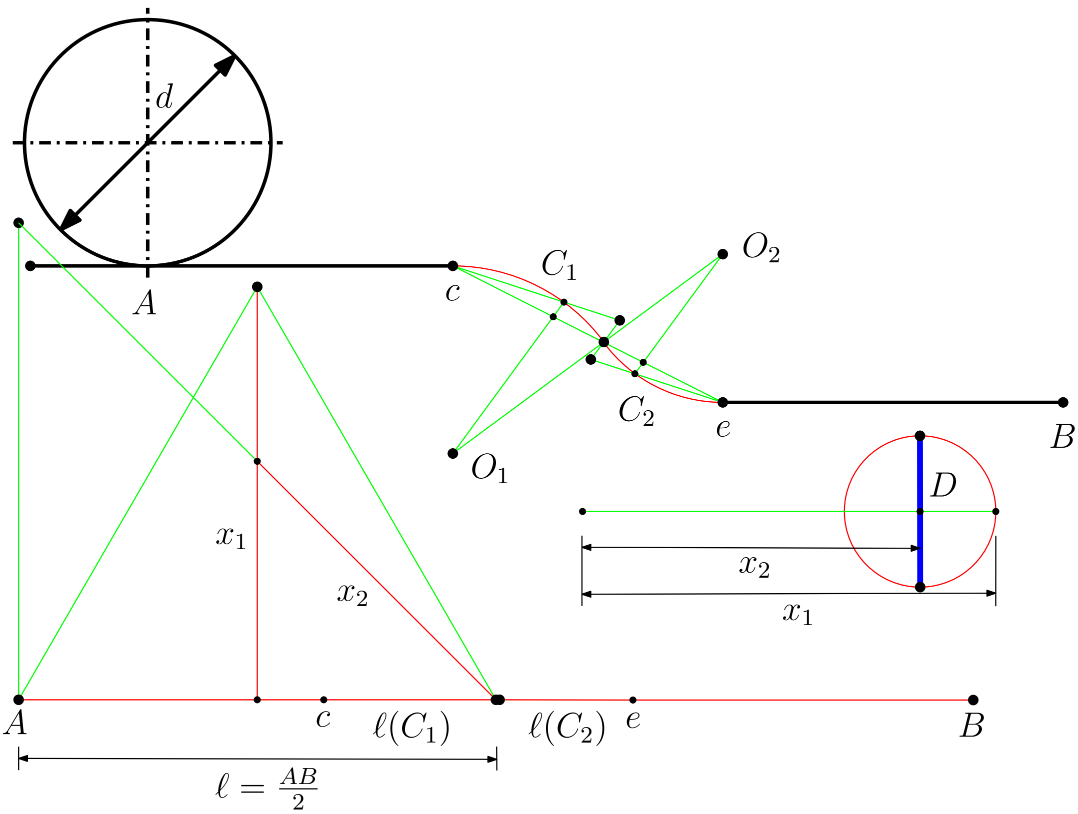


ITA 1983, Questão 19: Solução - (D) 55mm.

Construção: (i) Marque os pontos A, C', B e C'', nesta ordem, colineares e tais que $AC' = BC'' = CD$; (ii) Determine a média proporcional $x = BD = \sqrt{AB.CD}$; (ii) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(C'', x)$; (iii) Trace o arco-capaz C_2 do ângulo de 30° relativo à corda $C'B$, cuja interseção com o círculo C_1 é o vértice C do trapézio; (iv) Determine a altura desejada h de C relativa à base AB; (v) (opcional) Marque a distância CD à esquerda de C, paralelamente a AB, para determinar o vértice D.

Justificativa: Como $AC' = CD$ e $AC' \parallel CD$, então $AC'CD$ formam um paralelogramo, de modo que $C'\hat{C}B = A\hat{E}B = 30^{\circ}$. Além disto, como $BC'' = CD$ e $BC'' \parallel CD$, então $BC''CD$ também formam um paralelogramo, de modo que $C''C = BD$, o que permite determinar o vértice C.

ITA 1983, Questão 20: Uma roda de diâmetro d está em repouso, apoiada sobre a semi-reta de origem c, no ponto A. Em dado instante é posta em movimento, girando, sem deslizar, até atingir o ponto B, onde pára. Sabendo-se que os pontos c e e são ligados por dois arcos de circunferência, de centros O_1 e O_2 e considerando que a roda, para completar o trajeto, deu duas voltas completas, determinar o valor aproximado de seu diâmetro. A solução terá que ser inteiramente gráfica.



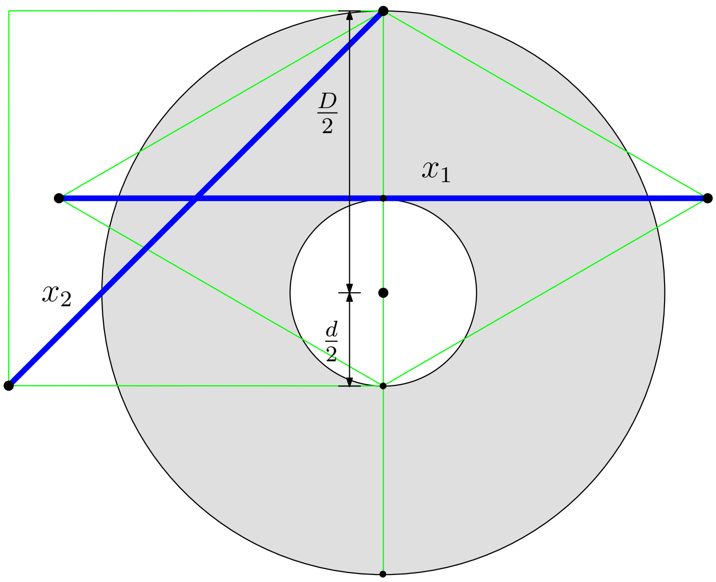
ITA 1983, Questão 20: Solução - (C) 20 mm.

Construção: (i) Trace o arco C_1 de centro em O_1 e raio O_1c do ponto c ao segmento O_1O_2; (ii) Trace o arco C_2 de centro em O_2 e raio O_2e do segmento O_1O_2 ao ponto e; (iii) Retifique os arcos C_1 e C_2, usando, por exemplo, o método de d'Ocagne ([1], pp. 63–65), determinando o comprimento total AB; (iv) Determine o círculo cujo comprimento é $\ell = \frac{AB}{2}$ ([2], Exercício 4.4).
Justificativa: Os arcos devem concordar no ponto pertencente ao segmento O_1O_2. O diâmetro D do círculo de comprimento $\ell \approx (\sqrt{3} + \sqrt{2})D$ pode ser determinado por $D \approx 2(x_1 - x_2)\ell$, com $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$ e $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell$.

ITA 1984, Questão 16: Um topógrafo pretende medir a altura de uma torre. Para tanto localiza o teodolito num ponto A conveniente e faz uma visada horizontal para o ponto B localizado a 100 m de distância. Em seguida visa o topo da torre (ponto C) verificando ser de 40º o ângulo que o teodolito forma com a horizontal. Determinar a altura da torre, sabendo-se ser esta a média proporcional da distância AB. O visor do teodolito está a 1,50 m do solo. Escala: 1:10^3

sln: Questão Anulada. A frase "sabendo-se ser esta [a altura da torre] a média proporcional da distância AB" não tem sentido.

ITA 1984, Questão 17: Determinar, graficamente, o comprimento desenvolvido de um anel de diâmetro externo D (75 mm) e diâmetro interno d (25 mm) usando equivalência de áreas.



ITA 1984, Questão 17: Solução - (A) 157 mm.

Construção: (i) Determine as grandezas $x_1 = (D+d)\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $x_2 = (D+d)\frac{\sqrt{2}}{2}$, e faça $\ell \approx (x_1 + x_2)$.

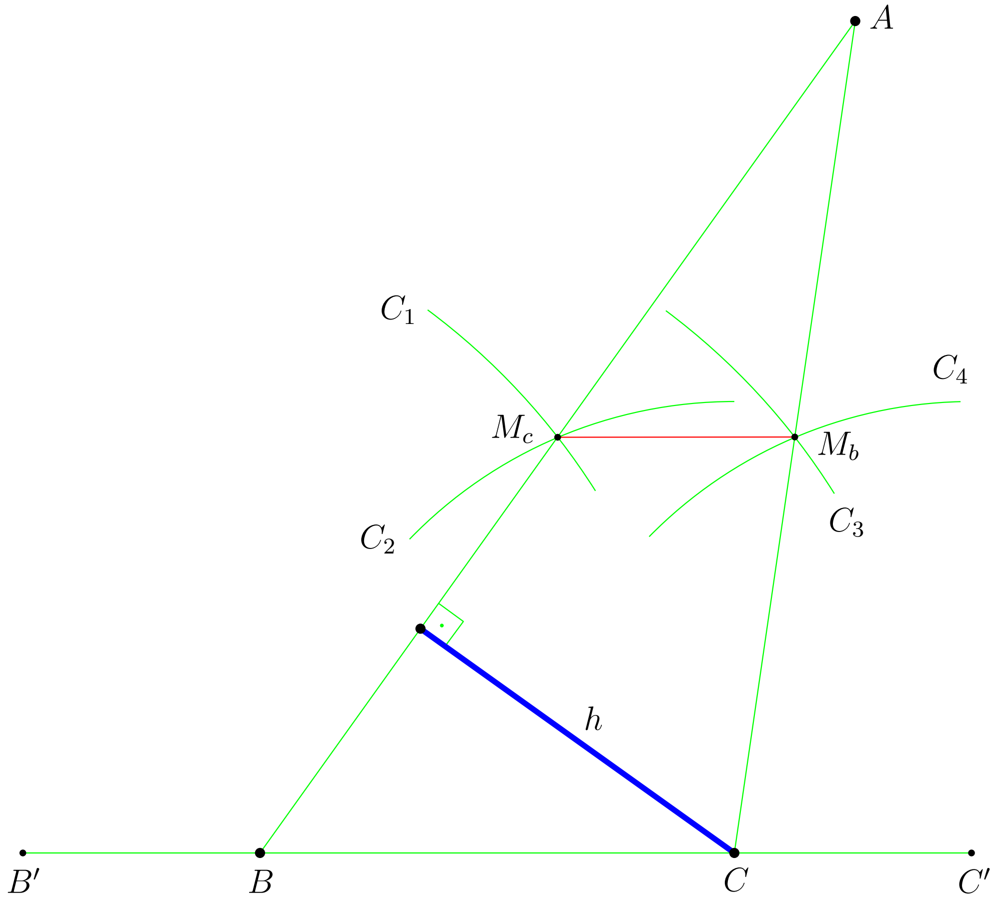
Justificativa: Pela equivalência das áreas, tem-se

$$\ell\frac{(D-d)}{2} = \pi\frac{(D^2-d^2)}{4} \Rightarrow \ell = \pi\frac{(D+d)}{2} \approx (\sqrt{3}+\sqrt{2})\frac{(D+d)}{2}$$

ou seja, $\ell = 50\pi \approx 157$ mm.

ITA 1984, Questão 18: Determinar, graficamente, a altura referida ao lado AB de um triângulo ABC, conhecendo-se o valor das medianas M_B e M_C, bem como o comprimento do lado BC.

- $M_B = 90$ mm; $\quad M_C = 60$ mm; $\quad BC = 63$ mm.

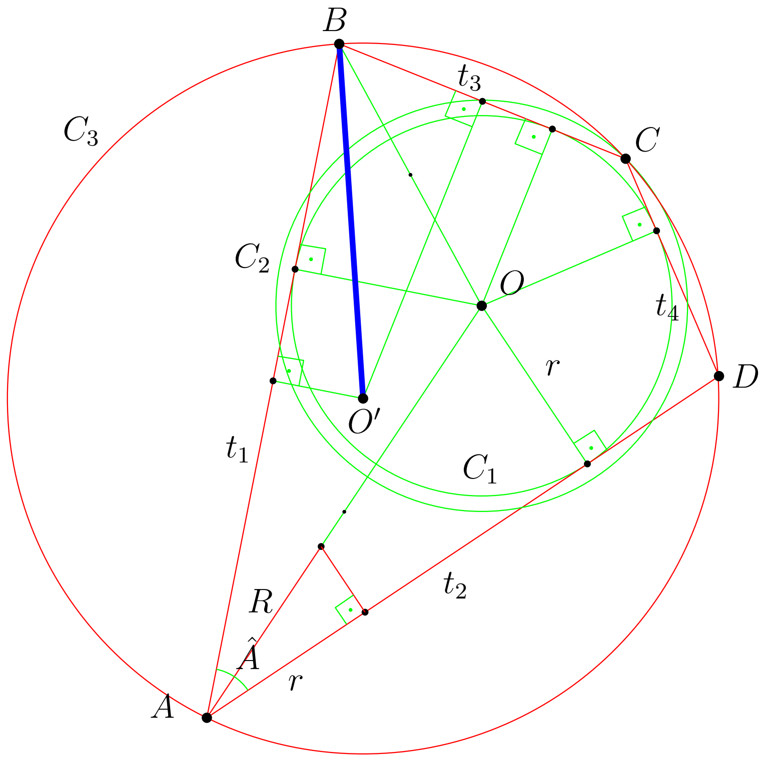


ITA 1984, Questão 18: Solução - (E) 51 mm.

Construção: (i) Marque os pontos B', B, C e C' colineares, nesta ordem, tais que $B'B = CC' = \frac{BC}{2}$; (ii) Trace as circunferências $C_1 \equiv \mathcal{C}(B', M_B)$ e $C_2 \equiv \mathcal{C}(C, M_C)$, cuja interseção é o ponto M_c médio de AB; (iii) Determine a altura h desejada de C relativa a BM_c; (iv) (opcional) Trace as circunferências $C_3 \equiv \mathcal{C}(B, M_B)$ e $C_4 \equiv \mathcal{C}(C', M_C)$, cuja interseção é o ponto M_b médio de AC; (v) (opcional) Prolongue BM_c e CM_b, cuja interseção é o vértice A.

Justificativa: Pela construção, $B'M_c = BM_b = M_B$, $C'M_b = CM_c = M_C$, de forma que $M_cM_b \parallel BC$ e $M_cM_b = \frac{BC}{2}$. Logo, M_cM_b é a base média do triângulo relativa ao lado BC.

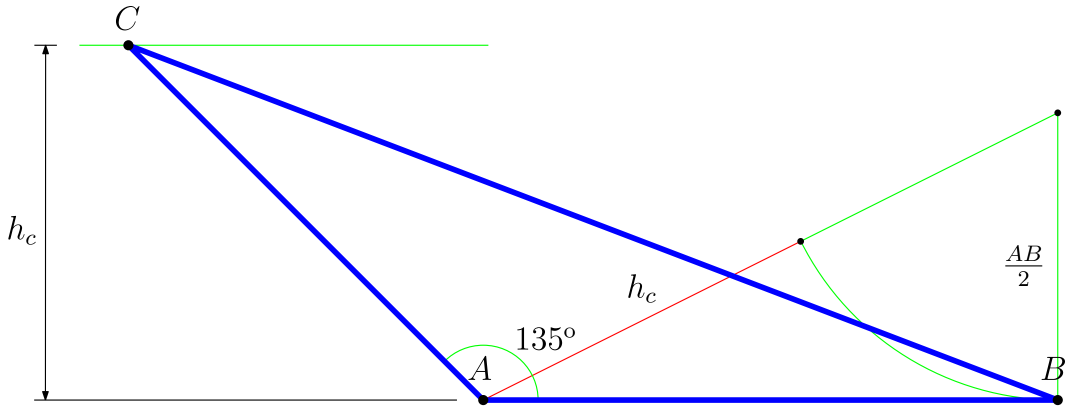
ITA 1984, Questão 19: Construir um quadrilátero $ABCD$ que seja inscritível e tal que nele seja inscrita uma circunferência de centro O e raio r (25 mm). Determinar o raio da circunferência que circunscreve o quadrilátero, sabendo-se que seu lado AB mede 90 mm.



ITA 1984, Questão 19: Solução - (B) 47 mm.

Construção: (i) Trace a circunferência $C_1 \equiv \mathcal{C}(O, r)$; (ii) Trace as tangentes t_1 e t_2 a C_1 por A, definindo o ângulo $\hat{A}$, e marque sobre t_1 o vértice B tal que $AB = 90$ mm; (iii) Trace a outra tangente t_3 por B a C_1; (iv) Trace o triângulo retângulo de ângulo $\frac{\hat{A}}{2}$ e cateto adjacente r, determinando a hipotenusa R; (v) Trace a circunferência $C_2 \equiv \mathcal{C}(O, R)$, cuja interseção com o prolongamento de t_3 é o vértice C; (vi) Trace as mediatrizes dos lados AB e BC, cuja interseção é o centro O' da circunferência C_3 circunscrita ao quadrilátero; (vii) (opcional) Trace a tangente t_4 por C a C_1, cua interseção com t_2 é o vértice D.
Justificativa: O quadrilátero $ABCD$ é inscritível (e, diga-se de passagem, também circunscritível). Logo, seus lados são tangentes à circunferência C_1 e o vértice C vê o círculo C_1 sob um ângulo $\hat{C} = (180^{\mathrm{o}} - \hat{A})$. Logo, $CO = \frac{r}{\cos \hat{A}}$, valor este determinado no passo (iv) da construção acima.

ITA 1985, Questão 16:
Determine o perímetro de um triângulo ABC dados o lado $AB = 75$ mm, o ângulo $\hat{A} = 135^{\text{o}}$ e que a altura do vértice C é o segmento áureo de AB.



ITA 1985, Questão 16: Solução - (D) 270 mm.

Construção: (i) Trace o ângulo de $\hat{A} = 75^{\text{o}}$ com vértice em $\hat{A}$; (ii) Determine o segmento áureo h_c de AB; (iii) Trace uma paralela a AB a uma distância h_c, cuja interseção com o outro lado do ângulo $\hat{A}$ é o vértice C.
Justificativa: O vértice C fica facilmente determinado pela altura h_c e pelo fato de que $C\hat{A}B = 135^{\text{o}}$.
Algebricamente, tem-se que

$$h_c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$$

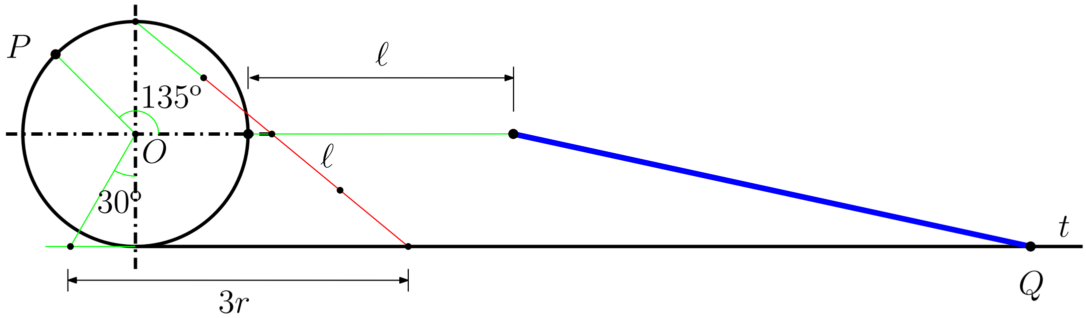
Com isto, $AC = h_c\sqrt{2}$ e, pela Lei dos Cossenos, tem-se

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos 135^{\text{o}} \\ &= AB^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{2}\right)^2 AB^2 + 2\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{2}AB^2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3AB^2 \end{aligned}$$

De modo que o perímetro desejado é

$$AB + AC + BC = \left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) AB = 270 \text{ mm}$$

ITA 1985, Questão 17: São dados do problema: uma circunferência de raio r, um ponto P que lhe pertence, uma reta t a ela tangente e um ponto Q dessa reta. Girando-se a circunferência de 135° sobre a reta, sem deslizar, determinar a distância do ponto P ao ponto Q.



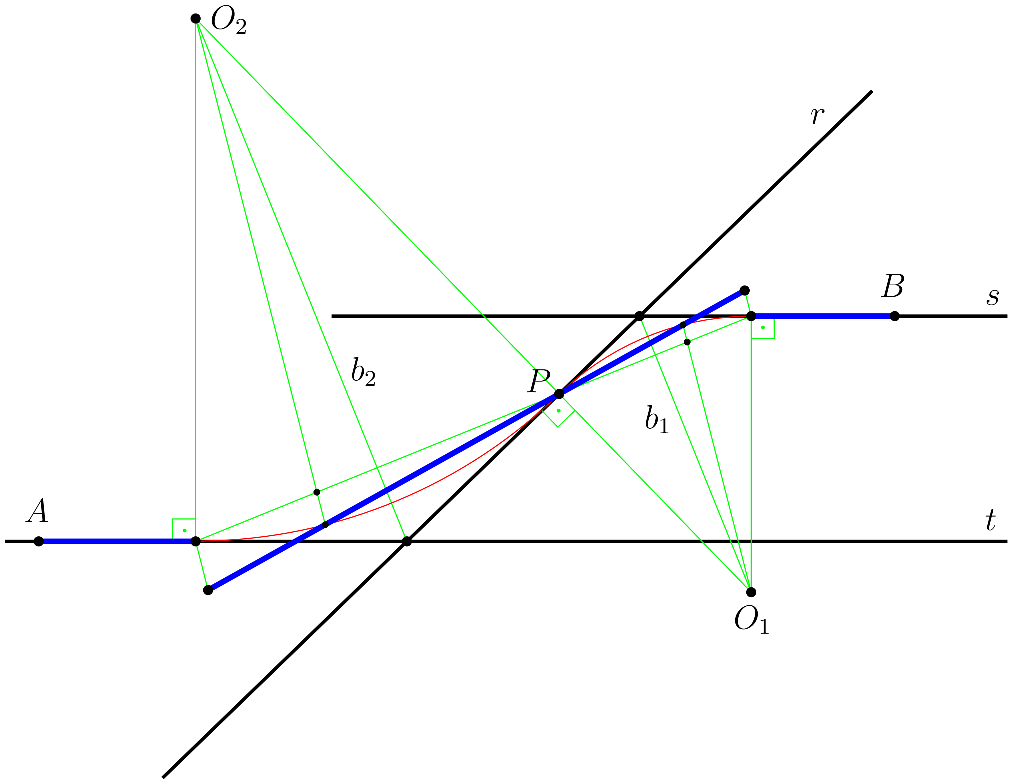
ITA 1985, Questão 17: Solução - (C) 70 mm.

Construção: (i) Retifique a semi-circunferência e determine $\ell = \frac{3}{4}\pi r$ de seu comprimento; (ii) Marque a nova posição do ponto P, rotacionado de 135° no sentido horário e transladado horizontalmente de uma distância ℓ em relação à posição original.
Justificativa: O ângulo de 135° corresponde a um deslocamento horizontal ℓ igual a $\frac{3}{4}$ da semi-circunferência. O movimento do ponto P é a composição da rotação de 135° em torno do centro da circunferência e da translação horizontal da distância ℓ.

ITA 1985, Questão 19: As retas s e t são os eixos de um duto que descreve uma curva definida por dois arcos de circunferência concordantes. Determinar graficamente o comprimento do duto entre os pontos A e B, sabendo-se que ambos os arcos de concordância são tangentes à reta r no ponto P. Escala do desenho: 1:10.

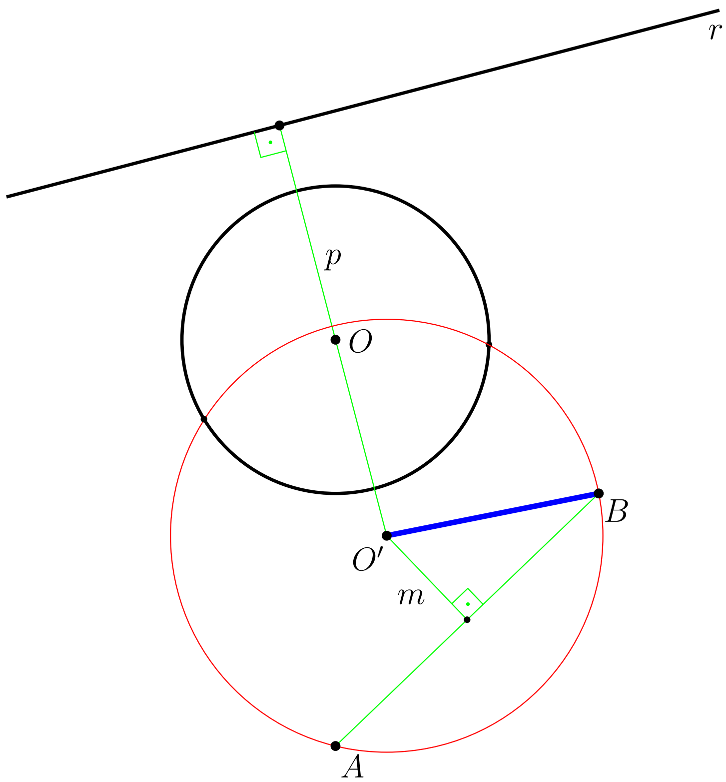
Construção: (i) Trace as bissetrizes b_1, do ângulo obtuso formado pelas retas s e r, e b_2, do ângulo obtuso formado pelas retas t e r; (iii) Trace a perpendicular por P da reta r, cujas interseções com as bissetrizes b_1 e b_2 determinam os centros O_1 e O_2, respectivamente, dos arcos concordantes; (iv) Trace as perpendiculares por O_1 à reta s e por O_2 à reta r, cuja interseção com cada reta determina o ponto de tangência do respectivo arco com a própria reta; (v) Trace os arcos concordantes e retifique-os, usando, por exemplo, o método de d'Ocagne ([1], pp. 63–65).

Justificativa: O arco de centro O_1 é tangente simultaneamente às retas s e r. Logo, O_1 está sobre a bissetriz do ângulo formado pelas duas retas. Analogamente, o centro O_2 do outro arco está sobre a bissetriz do ângulo formado pelas retas t e r. Como os arcos concordantes são tangentes à reta r em P, os seus centros devem pertencer também à perpendicular à reta r neste mesmo ponto.



ITA 1985, Questão 19: Solução - (E) 1220 mm .

ITA 1986, Questão 16: Dados: Uma circunferência de centro O; uma reta; dois pontos A e B. Pede-se: O raio da circunferência que passa pelos dois pontos e é secante à circunferência dada e determina nela uma secante paralela à reta r.

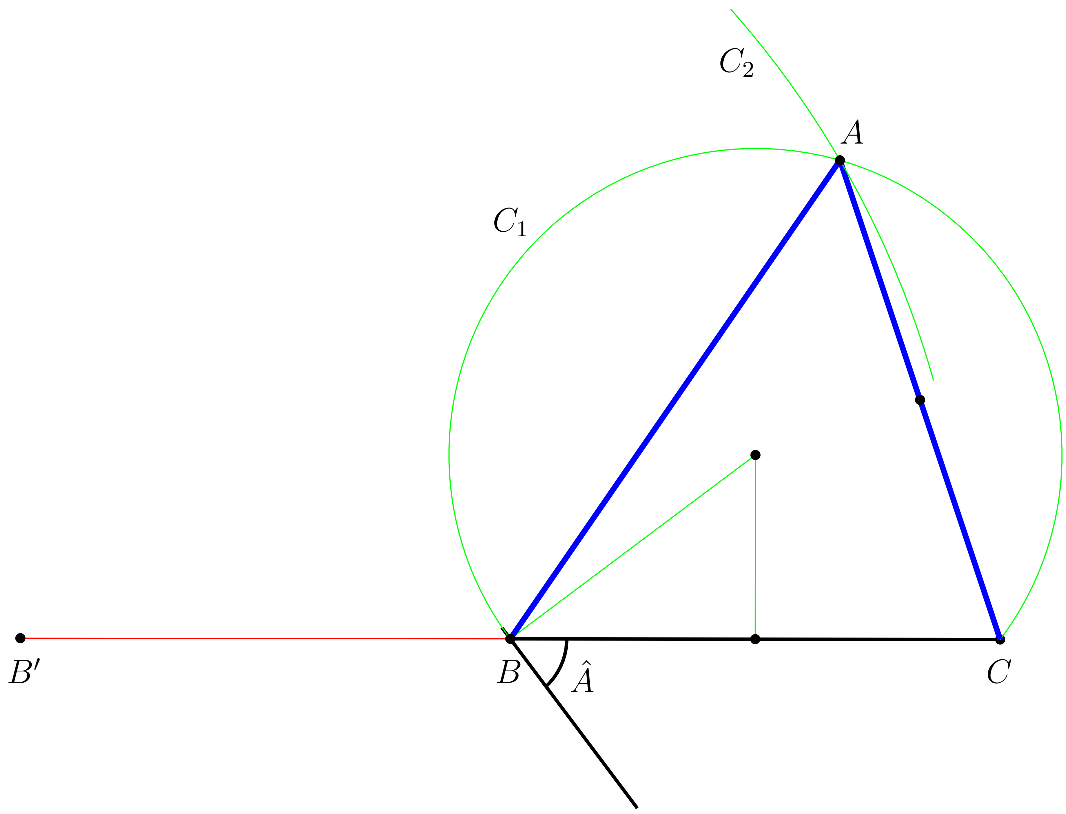


ITA 1986, Questão 16: Solução - (C) 29 mm .

Construção: (i) Trace a mediatriz m de A e B; (ii) Trace por O uma perpendicular p à reta r, cuja interseção com a mediatriz m é o centro O' da circunferência desejada.
Justificativa: Naturalmente que o centro O' da circunferência desejada está sobre a mediatriz de A e B. Além disto, a mediatriz da secante determinada pelos dois círculos passa pelos seus centros. Esta mediatriz passa por O, é perpendicular a r e passará também por O'.

ITA 1986, Questão 18: De um triângulo ABC conhecemos: Um lado, uma mediana e o ângulo oposto ao lado dado. Pede-se o valor dos outros dois lados.

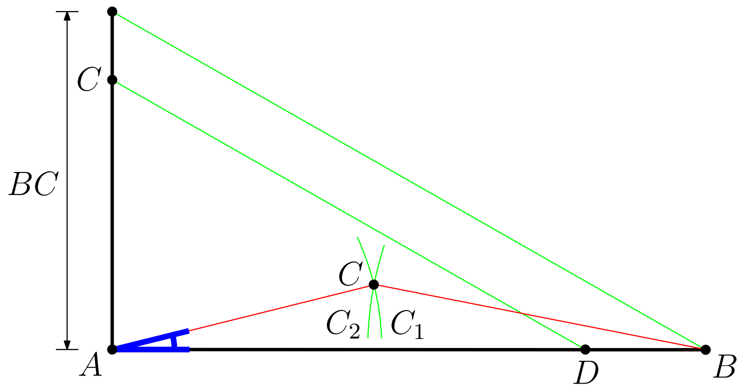
- $a = 65$ mm; $m_b = 63$ mm.



ITA 1986, Questão 18: Solução - (E) 68 e 77 mm.

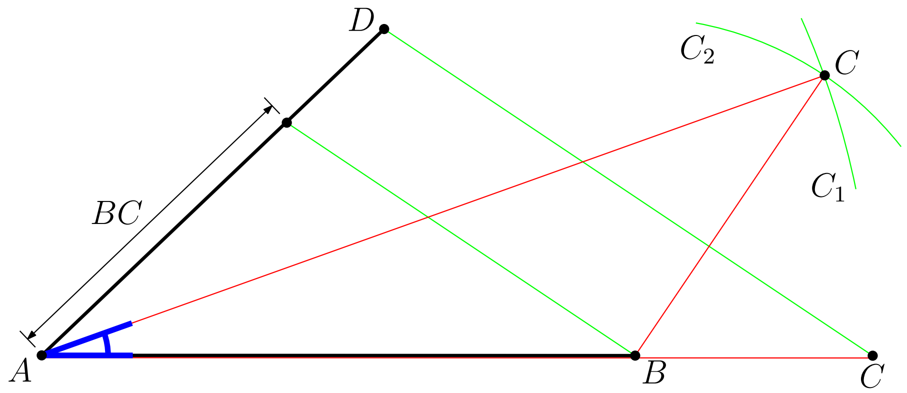
Construção: (i) Marque os pontos colineares B', B e C', nesta ordem, tais que $B'B = BC = a$; (ii) Trace o arco-capaz C_1 do ângulo $\hat{A}$ relativo ao lado $BC = a$; (iii) Trace $C_2 \equiv \mathcal{C}(B', 2m_b)$, cuja interseção com C_1 é o vértice A.
Justificativa: Seja M_b o ponto médio de AC. No triângulo auxiliar $\Delta B'CA$, B é médio de $B'C$, e assim BM_b é a base média relativa ao lado $B'A$ deste triângulo, de forma que $B'A = 2BM_b = 2m_b$. Além disto, é simples perceber que o vértice A pertence ao arco-capaz C_1 do ângulo $\hat{A}$ relativo ao lado $BC = a$.
sln: Este problema foi um dos que mais me causaram dificuldade, apesar de sua simples solução.

ITA 1986, Questão 19: Os segmentos AB e BC são os lados de um triângulo ABC. Determinar o ângulo do vértice A, sabendo-se que o lado AC é a quarta proporcional dos segmentos AB, BC e AD.



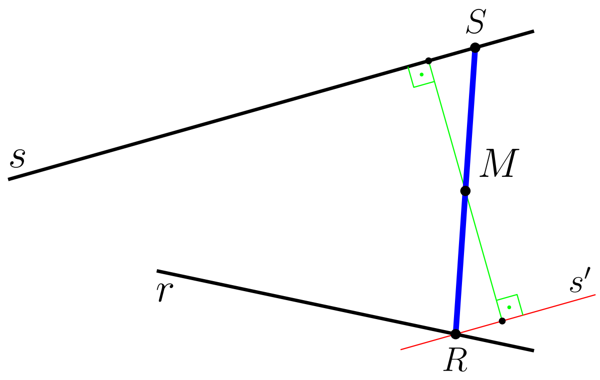
ITA 1986, Questão 19: Solução - (?).

Construção: (i) Determine a quarta proporcional $AB : BC = AD : AC$; (ii) Trace os círculos $C_1 \equiv \mathcal{C}(A, AC)$ e $C_2 \equiv \mathcal{C}(B, BC)$, cuja interseção é o vértice C.
Justificativa: A solução segue diretamente do enunciado do problema.
sln: A solução do problema acima, para os comprimentos dados $AB \approx 79$ mm, $BC \approx 45$ mm e $AD \approx 63$ mm, pela Lei dos Cossenos, determina $\hat{A} = 14^o$, que não corresponde a qualquer opção de resposta. Considerando AC como a quarta proporcional dos segmentos BC, AB e AD, isto é, fazendo $BC : AB = AD : AC$, então $\hat{A} = 20^o$, como obtido abaixo.



ITA 1986, Questão 19 (modificada): Solução - (E) 20º.

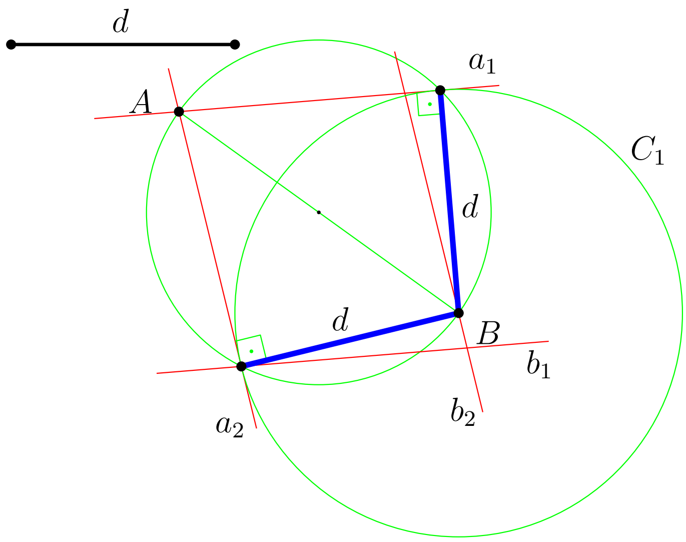
ITA 1987, Questão 1: Dadas duas retas r e s e um ponto M entre elas, pede-se determinar dois pontos R e S nas retas dadas, sendo $MR = MS$. O valor do segmento RS é:



ITA 1987, Questão 1: Solução - (E) 38 mm.

Construção: (i) Trace a reta s' simétrica da reta s em relação ao ponto M, cuja interseção com a reta r determina o ponto R; (ii) Trace a reta RM, cuja interseção do prolongamento com a reta s é o ponto S.
Justificativa: O ponto R (que pertence à reta r) é o simétrico do ponto S (que pertence à reta s) em relação ao ponto M.

ITA 1987, Questão 2: Passar, pelos pontos dados, retas a e b paralelas e separadas pelo segmento d também dado. O segmento perpendicular pelo ponto B, até a reta que passa pelo ponto A, mede:

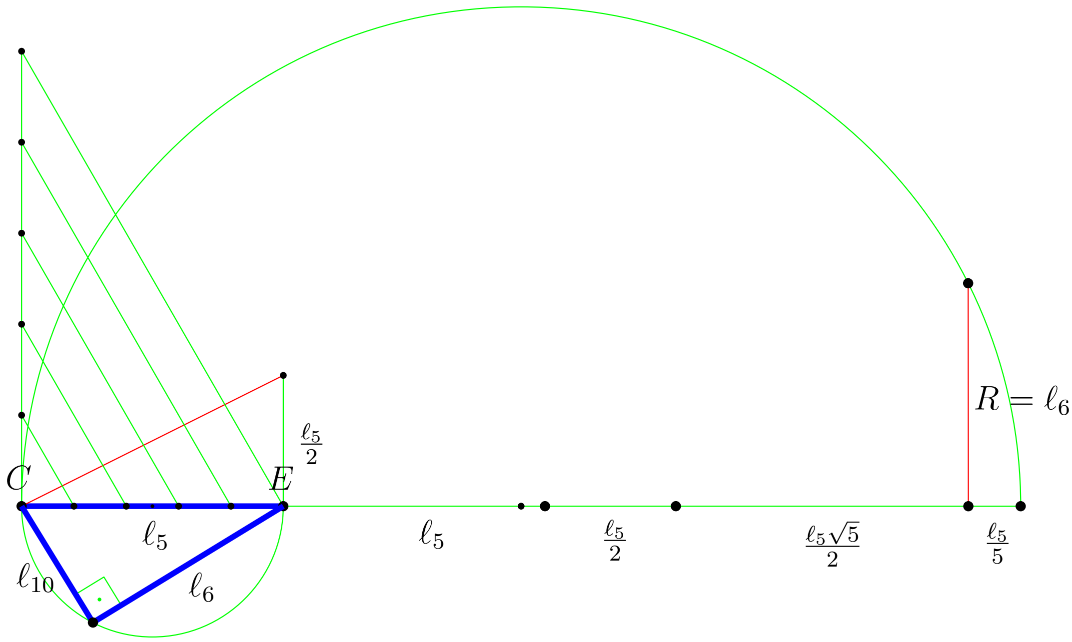


ITA 1987, Questão 2: Solução - (D) 30 mm.

Construção: (i) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(B, d)$; (ii) Trace as tangentes a_1 e a_2 por A a C_1; (iii) Trace por B paralelas b_1 e b_2 às retas a_1 E a_2, respectivamente.
Justificativa: As tangentes a_1 e a_2 ao círculo C_1, de centro B e raio d, distam necessariamente d do ponto B. A partir disto, traçam-se as paralelas b_1 e b_2, respectivamente, a a_1 e a_2. Como pode-se perceber, há dois pares de retas que satisfazem as condições do enunciado.
sln: O problema não requer construção alguma, já que a distância d entre as retas paralelas é dada no enunciado.

ITA 1987, Questão 4: Construir um triângulo isósceles equivalente ao setor circular conhecido. A base desse triângulo mede aproximadamente:
sln: Questão Anulada. Existem infinitos triângulo isósceles equivalentes a um setor circular dado.

ITA 1987, Questão 5: O segmento CE dado é o lado de um pentágono inscrito em um círculo. Construa um triângulo retângulo, sabendo-se que sua hipotenusa é igual ao segmento CE e que os catetos são lados de polígonos inscritos no mesmo círculo. Pergunta: Qual é o perímetro do triângulo?



ITA 1987, Questão 5: Solução - (D) 83 mm.

Construção: (i) Determine o raio $R = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell_5$ do círculo circunscrito ao pentágono de lado $CE = \ell_5$ ([2], Exercício 2.26); (ii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa ℓ_5 e cateto $R = \ell_6$, determinando o outro cateto $\ell_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,R$.

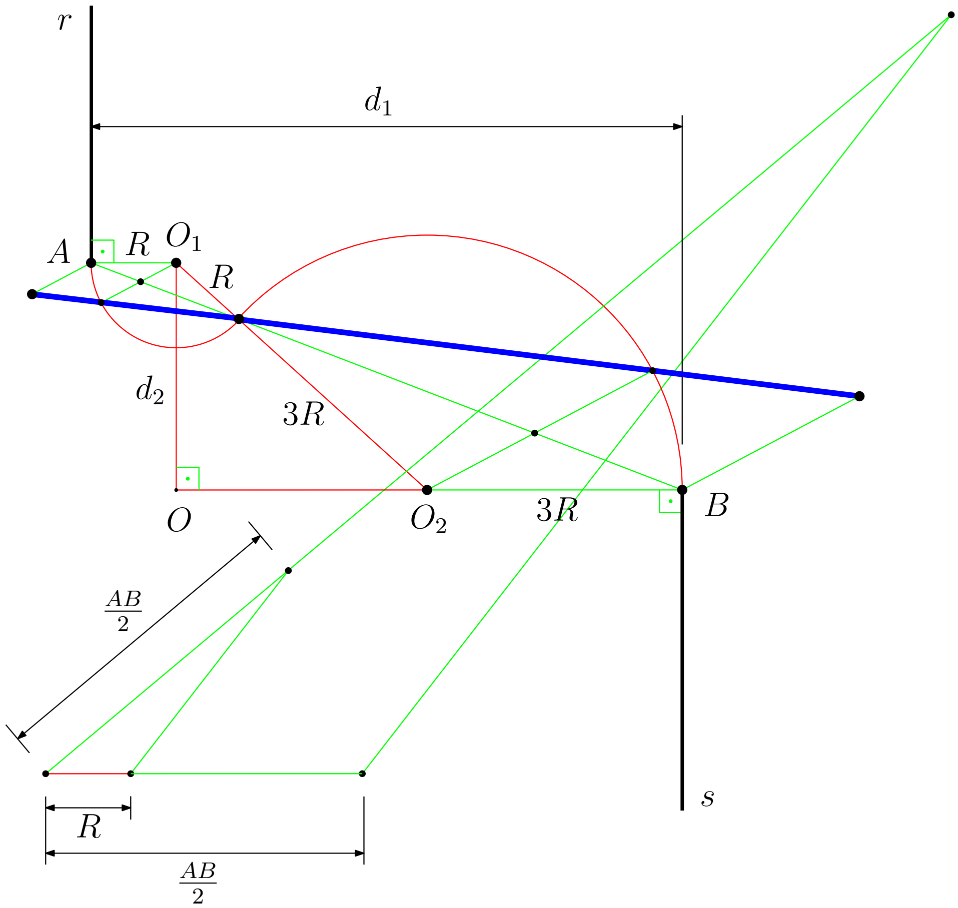
Justificativa: De [5], pp.232–233, tem-se

$$\begin{cases} \ell_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,R \\ \ell_6 = R \\ \ell_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,R \end{cases} \Rightarrow \ell_5^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2$$

e ainda

$$R = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell_5$$

ITA 1987, Questão 6: Dadas as retas r e s paralelas, concordá-las nos pontos A e B por uma curva plana composta de dois arcos, sabendo-se que o raio de um deles é o triplo do outro. Quanto mede a diferença entre os comprimentos dos arcos concordantes?



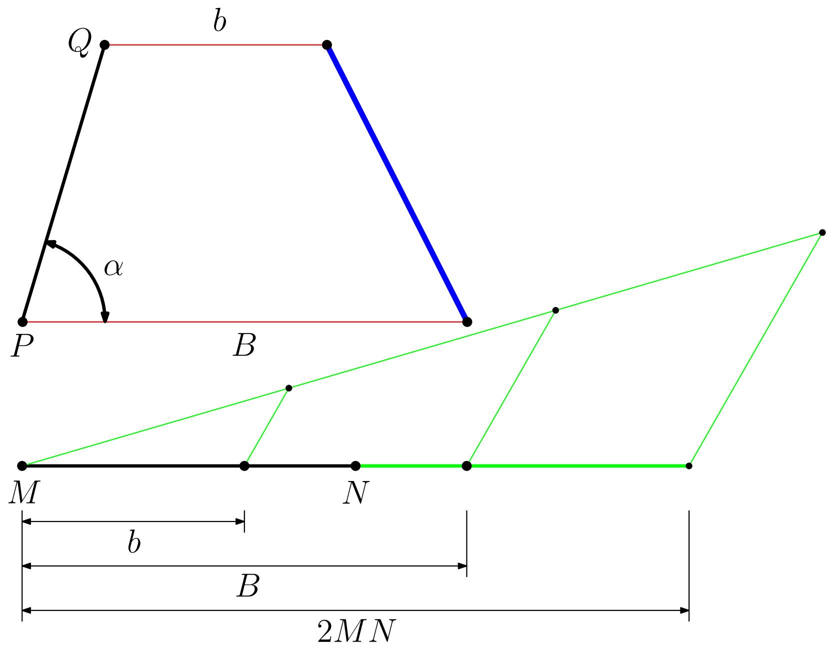
ITA 1987, Questão 6: Solução - (B) 55 mm.

Construção: (i) Determine a quarta proporcional $2d_1 : \frac{AB}{2} = \frac{AB}{2} : R$, onde d_1 é a distância entre as retas r e s; (ii) Marque os pontos O_1 e O_2, sobre as perpendiculares a r por A e a s por B, respectivamente, e tais que $AO_1 = R$ e $BO_2 = 3R$; (iii) Trace, até o segmento O_1O_2, os arcos concordantes de raios R e $3R$ e centros O_1 e O_2, respectivamente; (iv) Retifique os arcos concordantes, usando, por exemplo, o método de D'Ocagne ([1], pp. 63–65).

Justificativa: Do triângulo retângulo ΔOO_1O_2, tem-se

$$(4R)^2 = (d_1 - 4R)^2 + d_2^2 \Rightarrow R = \frac{d_1^2 + d_2^2}{8d_1} = \frac{AB^2}{8d_1}$$

ITA 1987, Questão 7: O segmento PQ é um dos lados não paralelos de um trapézio. O segmento MN é o que une os pontos médios dos lados não paralelos. O segmento PQ forma com a base maior um ângulo igual a α. Sabe-se que a base maior é o dobro da base menor. Quanto mede o lado não paralelo a PQ?



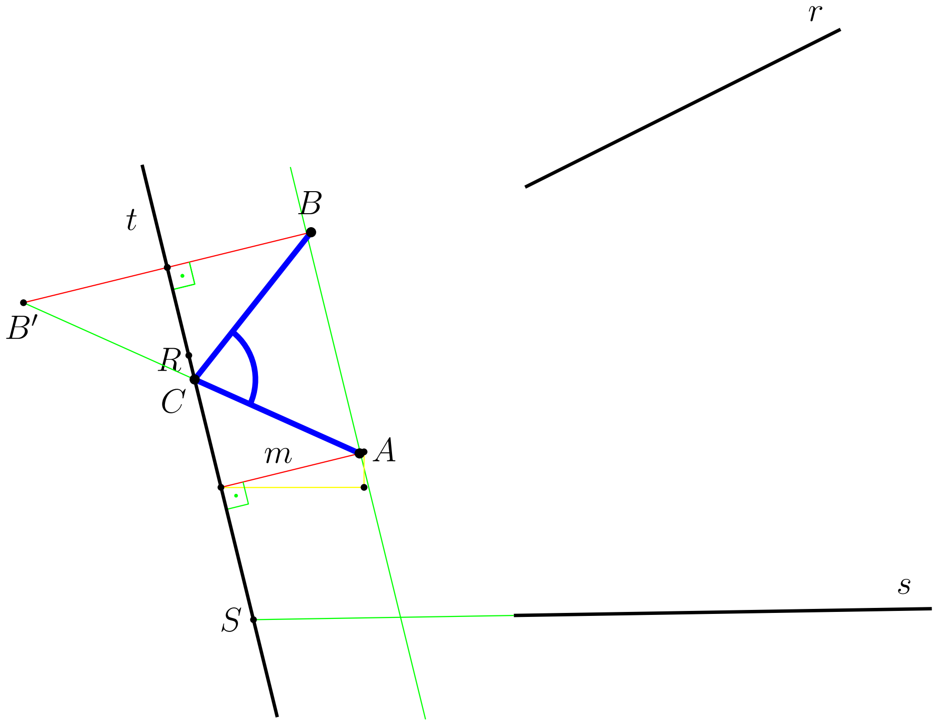
ITA 1987, Questão 7: Solução - (B) 41 mm.

Construção: (i) Determine os comprimentos das bases maior $B = \frac{4MN}{3}$ e menor $b = \frac{2MN}{3}$; (ii) Trace PQ fazendo o ângulo α com a base maior; (iii) Trace a partir de Q a base menor paralela à base maior; (iv) Complete o trapézio unindo os extremos das duas bases.

Justificativa: Como MN é a base média do trapézio, tem-se que

$$MN = \frac{B+b}{2} = \frac{2b+b}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{2MN}{3} \\ B = \frac{4MN}{3} \end{cases}$$

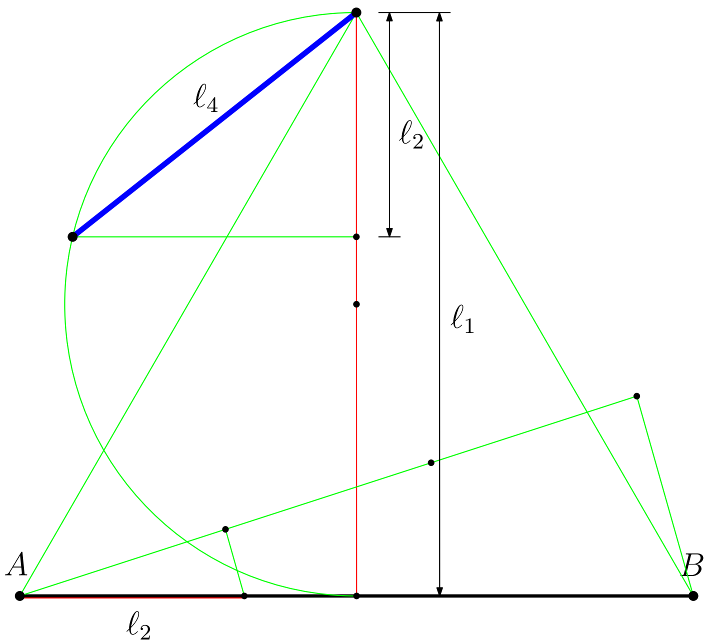
ITA 1987, Questão 8: São dadas as retas r, s e t, assim como o ponto B. Trace a bissetriz do ângulo formado por r e s e determine sobre a mesma um ponto A, distante 20 mm à direita da reta t. Trace o menor caminho entre os pontos A e B, com um ponto em t. Pergunta: Qual é a medida do ângulo formado pelos segmentos que determinam este menor caminho?
Obs: t é perpendicular à bissetriz do ângulo formado por r e s.



ITA 1987, Questão 8: Solução - (D) 75°.

Construção: (i) Prolongue as retas r e s, cujas respectivas interseções com a reta t determinam os pontos R e S; (ii) Trace a mediatriz m de RS e marque sobre m o ponto A, 20 mm à direita de t; (iii) Determine o ponto B', simétrico de B em relação a t, e trace a reta $B'A$, cuja interseção com a reta t é o ponto C, que define o caminho desejado BCA.
Justificativa: A bissetriz do ângulo entre r e s é perpendicular a t e equidistante dos pontos R e S. Logo, esta bissetriz é a mediatriz m de RS. Como $(BC + CA) = (B'C + CA)$, no caminho desejado B', C e A são colineares, o que permite determinar o ponto $C \in t$.
sln: A sentença "distante 20 mm à direita da reta t" é dúbia. O ponto A está 20 mm à direita de t ou está 20 mm de t, à direita?

ITA 1988, Questão 1: O segmento AB dado é o semi-perímetro de um hexágono regular. Sem construir esse hexágono, pede-se traçar um quadrado de área equivalente. Pergunta: Quanto mede o lado do quadrado?
Obs: Mostrar todas as construções geométricas.



ITA 1988, Questão 1: Solução - (C) 48 mm.

Construção: (i) Determine a média geométrica ℓ_4 de $\ell_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}p_6$ e $\ell_2 = \frac{p_6}{3}$.
Justificativa: As áreas do hexágono S_6 e quadrado S_4 são, respectivamente,

$$\begin{cases} S_6 = p_6 a_6 \\ S_4 = \ell_4^2 \end{cases}$$

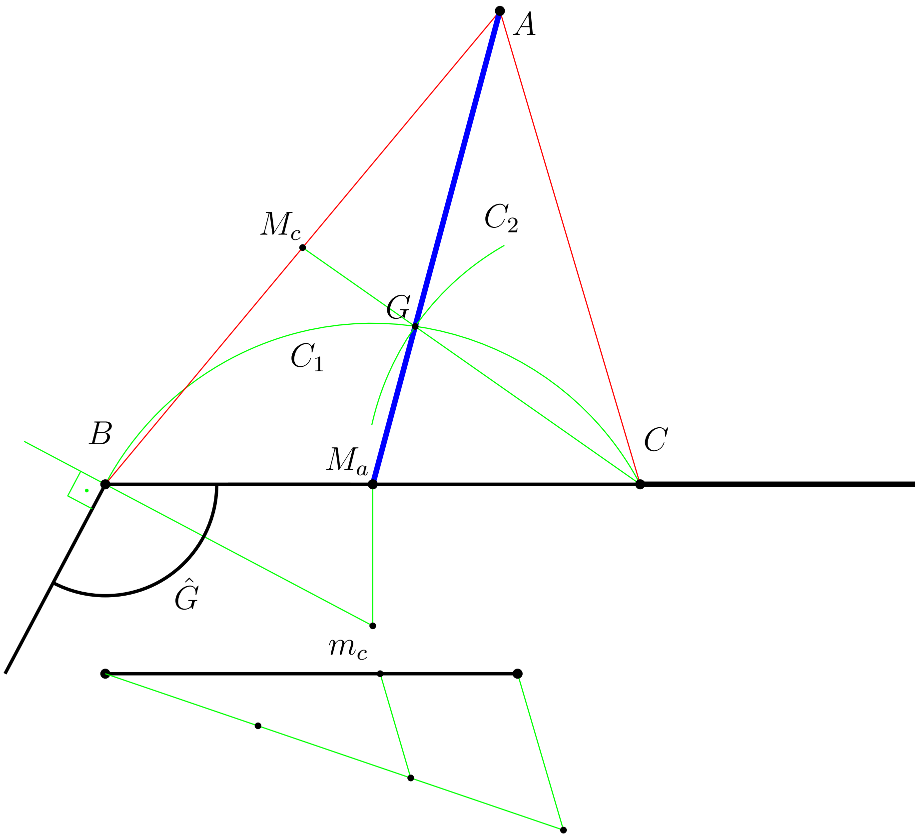
onde

$$\begin{cases} p_6 = 3\ell_6 \\ a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell_6 \end{cases} \Rightarrow a_6 = \frac{\sqrt{3}}{6}p_6$$

de forma que

$$\ell_4 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6}p_6}$$

ITA 1988, Questão 2: Construir um triângulo sendo conhecidos: o lado a, a mediana m_c e o ângulo $\hat{G}$, formado pelas medianas m_c e m_b. A mediana m_a mede?

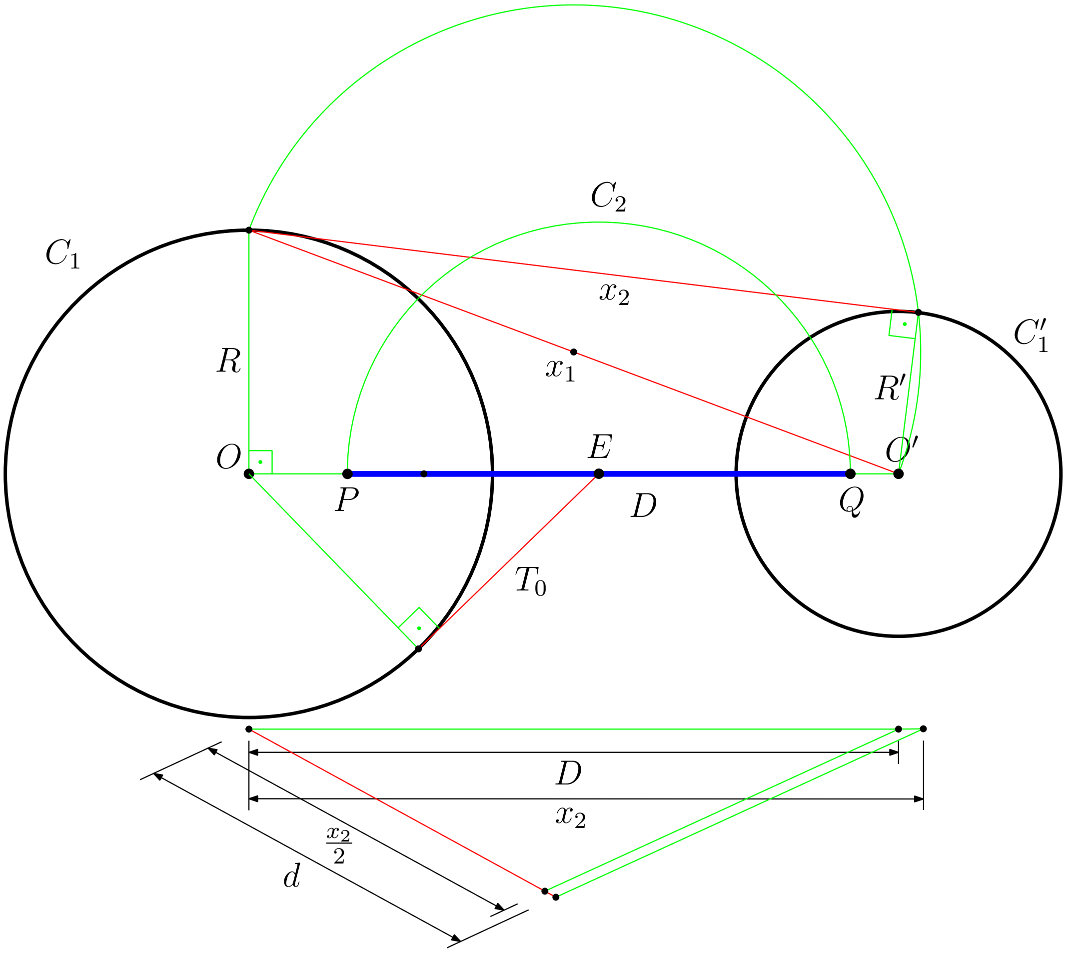


ITA 1988, Questão 2: Solução - (C) 65 mm.

Construção: (i) Trace o arco-capaz C_1 do ângulo $\hat{G}$ relativo à corda $BC = a$; (ii) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(C, \frac{2m_c}{3})$, cuja interseção com C_1 é o baricentro G; (iii) Prolongue CG e marque o ponto M_c tal que $CM_c = m_c$; (iv) Prolongue BM_c e marque o vértice A tal que $BA = 2BM_c$; (v) Trace a mediana AM_a, onde M_a é o ponto médio de BC.

Justificativa: O baricentro G, o encontro das medianas de um triângulo, dista $\frac{2m_c}{3}$ do vértice C e deve pertencer ao arco-capaz de $\hat{G}$ relativo ao lado BC.

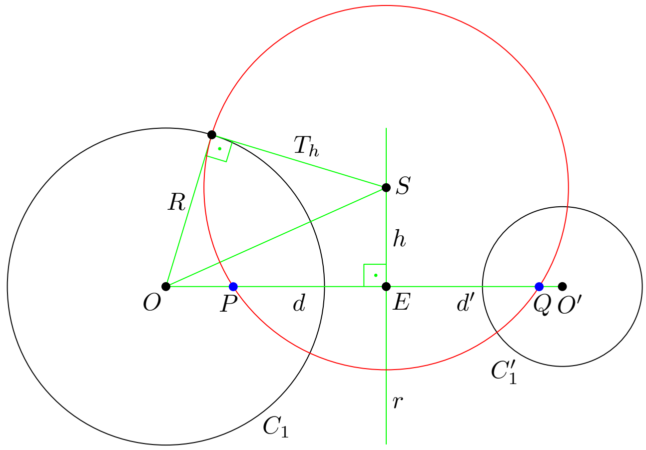
ITA 1988, Questão 4: Determinar dois pontos fixos P e Q por onde passam todas as circunferências ortogonais às circunferências de centros O e O'. Pergunta: Quanto mede a distância PQ?



ITA 1988, Questão 4: Solução - (D) 67 mm.

Construção: (i) Trace o triângulo retângulo de catetos $D = OO'$ e R, determinando a hipotenusa $x_1 = \sqrt{D^2 + R^2}$; (ii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa x_1 e cateto R', determinando o outro cateto $x_2 = \sqrt{D^2 + R^2 - R'^2}$; (iii) Determine a quarta proporcional $D : \frac{x_2}{2} = x_2 : d$ e marque o ponto E entre O e O' e tal que $OE = d$; (iv) Trace por E uma tangente, de comprimento T_0, a C_1; (v) Trace $C_2 \equiv \mathcal{C}(E, T_0)$, cujas interseções com a reta suporte de OO' são os pontos P e Q tais que $PQ = 2T_0$.

Justificativa: O eixo radical r dos círculos C_1 e C_1' é o lugar geométrico dos pontos com mesma potência relativa aos dois círculos. Logo, o eixo r é também o lugar geométrico dos pontos cujas tangentes a C_1 e C_1' têm os mesmos comprimentos. O raio de um círculo C_x ortogonal a C_y é igual ao comprimento da tangente a C_y pelo centro de C_x. Logo, o eixo r é também o lugar geométrico dos centros dos círculos simultaneamente ortogonais aos círculos C_1 e C_1' ([5], pp. 208–209).



ITA 1988, Questão 4: Análise.

Seja o ponto E, interseção do eixo r com o segmento OO', e sejam as distâncias $d = OE$, $d' = EO'$ e $D = OO'$. Desta forma,

$$\begin{cases} d + d' = D \\ d^2 - R^2 = d'^2 - R'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{D^2+R^2-R'^2}{2D} \\ d' = \frac{D^2+R'^2-R^2}{2D} \end{cases}$$

o que permite determinar a posição do ponto E e do eixo radical r.

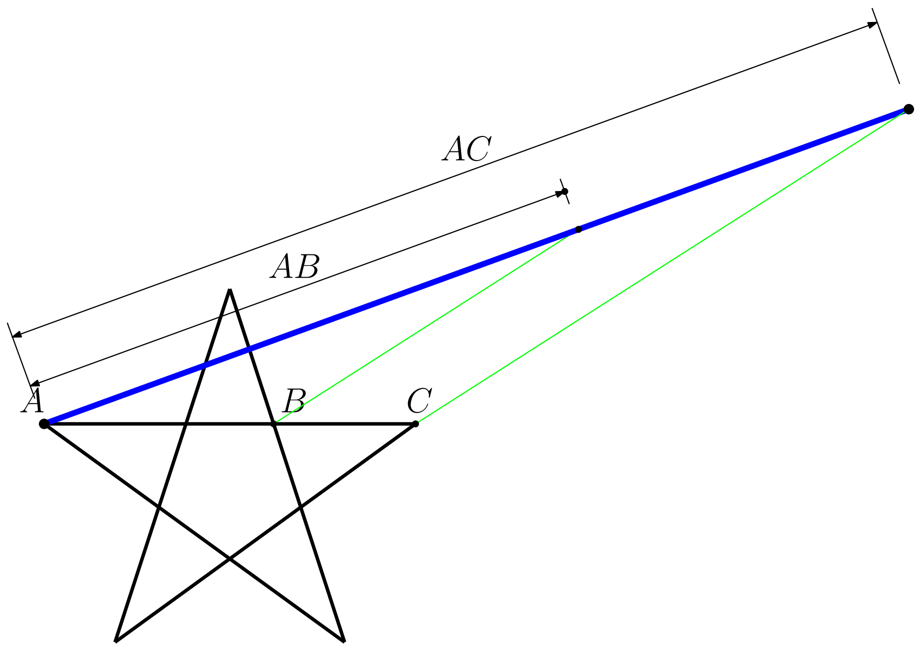
Seja S um ponto do eixo radical r tal que $ES = h$ e seja T_h o comprimento da tangente por S a C_1. Situando a origem de eixos cartesianos em E, com o eixo x ao longo da reta suporte de OO' e o eixo y ao longo do eixo radical r, a equação geral do círculo de centro em S e ortogonal a C_1 é dada por

$$x^2 + (y - h)^2 = T_h^2$$

Fazendo $y = 0$, ou seja, obtendo as interseções deste círculo com a reta suporte do segmento OO', tem-se $x^2 = (T_h^2 - h^2) = (d^2 - R^2)$ que é constante para todo ponto S em r. Logo, estas interseções são os pontos fixos P e Q desejados. Em particular, se T_0 é o comprimento da tangente por E a C_1, então $PE = EQ = T_0$, de forma que $PQ = 2T_0$.

sln: Este é, no meu entender, um dos problemas de aspectos geométricos mais interessantes deste volume.

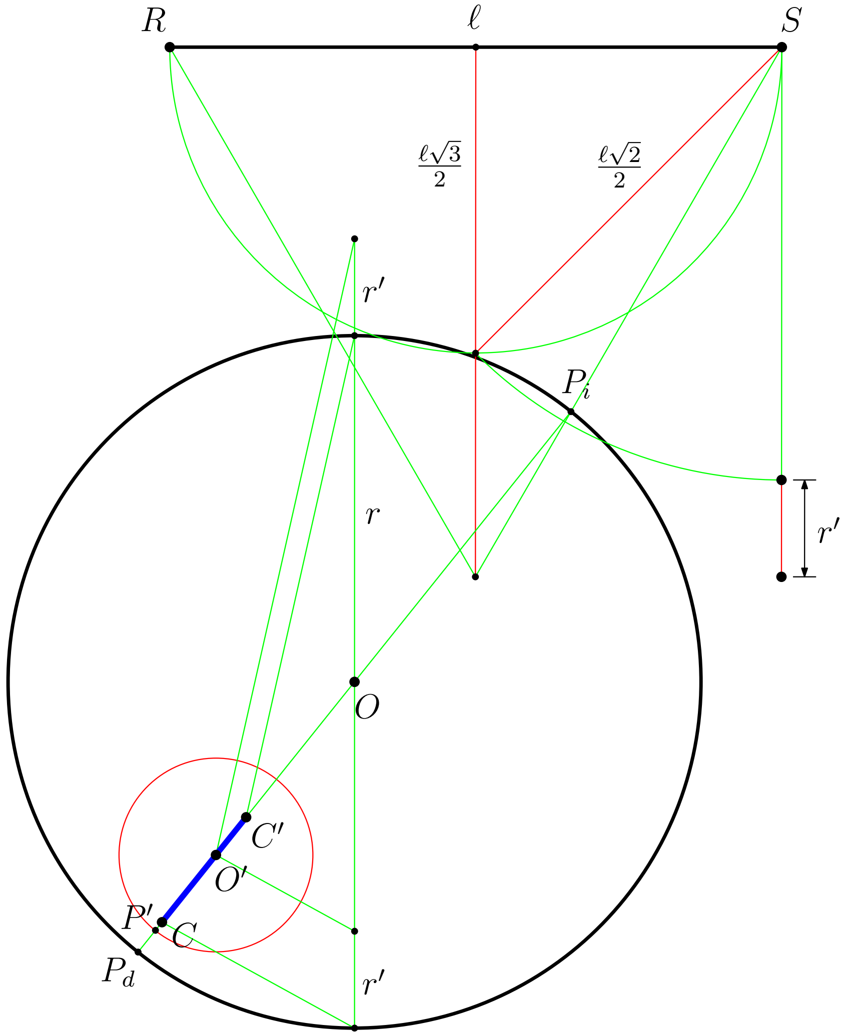
ITA 1988, Questão 5: O segmento AB pertence a um pentágono estrelado. Quanto mede o segmento AC? Escala: 1:25.
Obs: O desenho do pentágono estrelado abaixo é apenas uma demonstração do que se pede, não possuindo valor numérico.



ITA 1988, Questão 5: Solução - (D) 293,25.

Construção: (i) Trace a quarta proporcional $\overline{AB} : \overline{AC} = AB : AC$, onde os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ pertencem ao desenho do pentágono estrelado acima.
Justificativa: O esboço do pentágono estrelado dado transforma o problema na determinação de uma simples quarta proporcional.

ITA 1988, Questão 8: São dados: A circunferência de centro O, o ponto O' e o segmento RS, que é o perímetro de uma circunferência cujo centro é O'. Trace a circunferência de centro O' e determine os centros de homotetia das duas circunferências. Pergunta: Quanto mede a distância entre os centros de homotetias direta e inversa das duas circunferências?



ITA 1988, Questão 8: Solução - (D) 18 mm.

Construção: (i) Construa a circunferência de centro O' e comprimento RS ([2], Exercício 4.4); (ii) Determine a quarta proporcional $(r-r') : OO' = r : x_1$, e marque o centro C de homotetia direta, externo a OO' e mais próximo de O', tal que $OC = x_1$; (iii) Determine a quarta proporcional $(r+r') : OO' = r : x_2$, e marque o centro C' de homotetia inversa, entre O e O', tal que $OC' = x_2$.
Justificativa: Do enunciado,

$$RS = 2\pi r' \approx 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})r' \Rightarrow r' \approx \frac{RS(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}$$

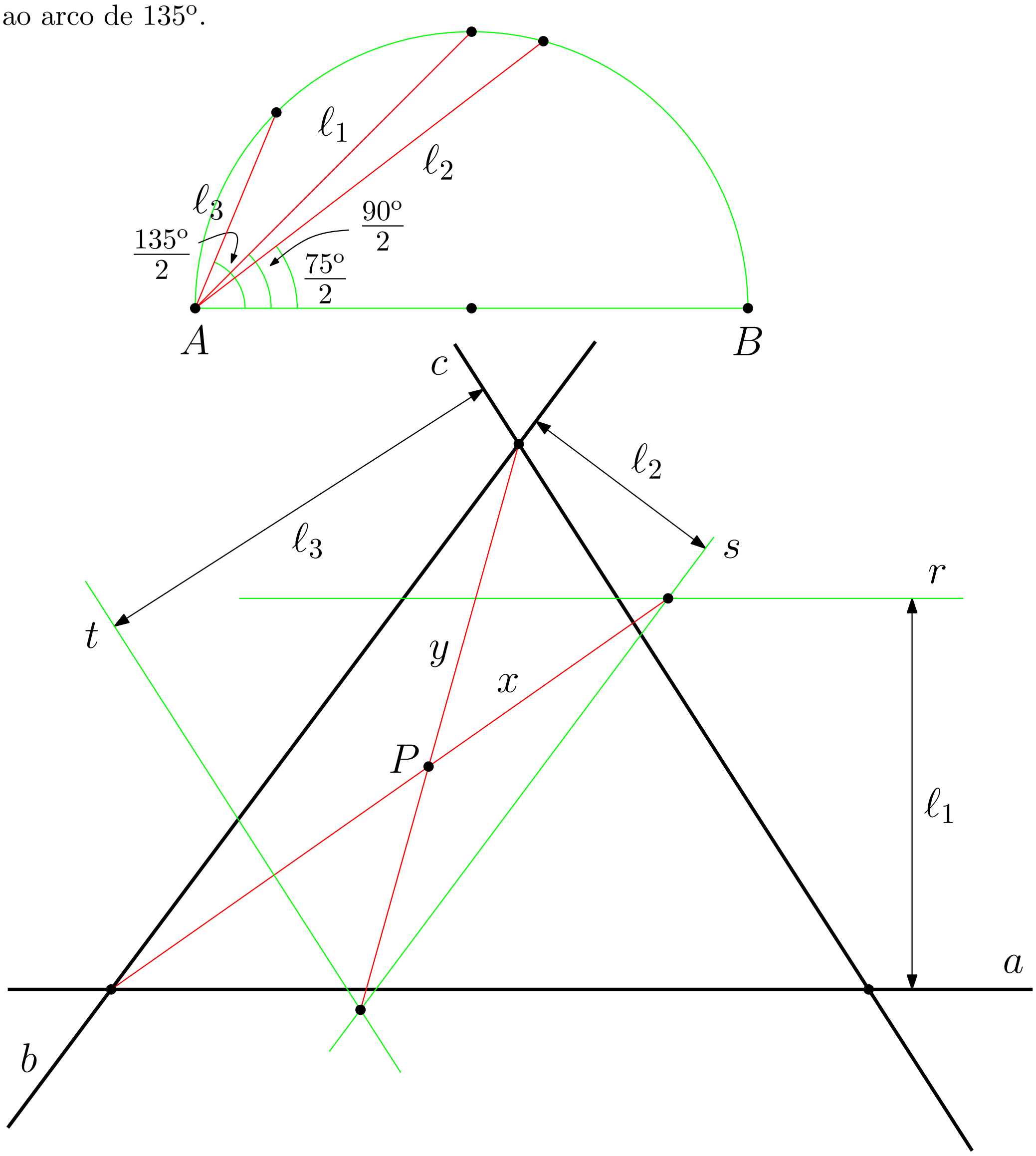
O centro C da homotetia direta está fora do segmento OO', mais próximo de O', tal que $CO' = x_1'$ e $CO = x_1$. Este ponto C mapeia O em O' e ainda o ponto P_d em P', indicados na figura-solução, de forma que

$$\begin{cases} CO - CO' = OO' \\ \frac{CO}{CO'} = \frac{CP_d}{CP'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_1' = OO' \\ \frac{x_1}{x_1'} = \frac{r-x_1}{r'-x_1'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{OO'r}{r-r'} \\ x_1' = \frac{OO'r'}{r-r'} \end{cases}$$

Já o centro C' da homotetia inversa está entre O e O', também mais próximo de O', tal que $OC' = x_2$ e $C'O' = x_2'$. Este ponto C' mapeia O em O' e ainda o ponto P_i em P', indicados na figura-solução, de forma que

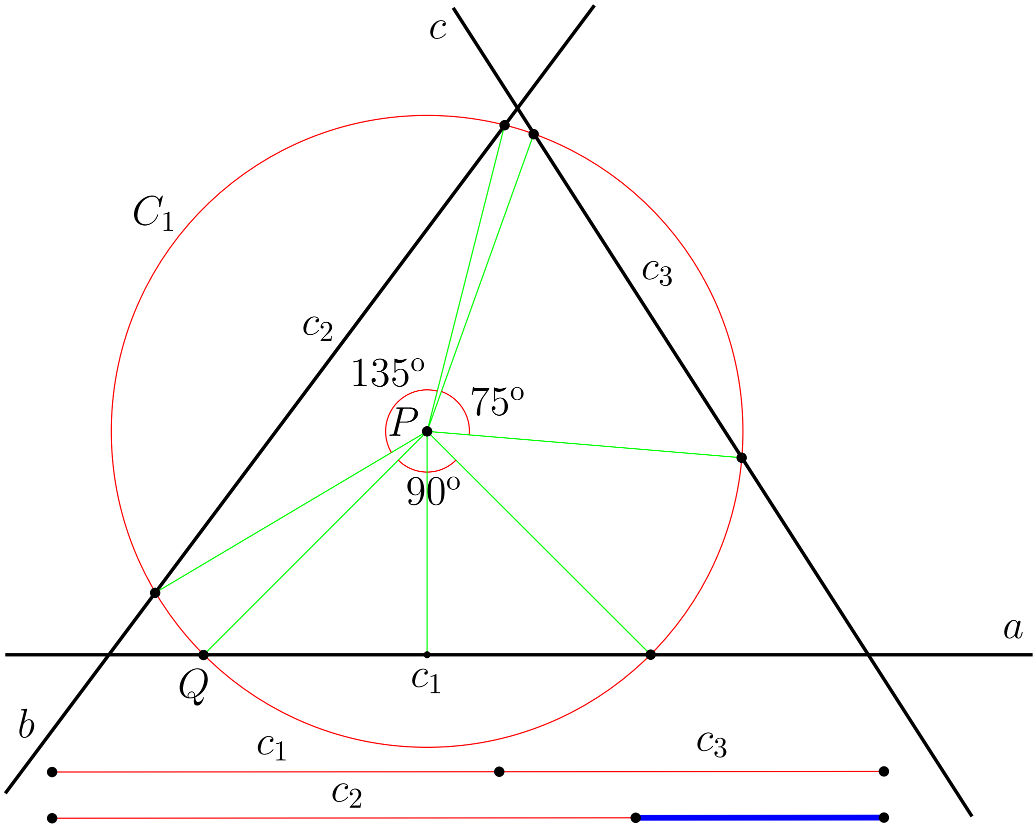
$$\begin{cases} C'O + C'O' = OO' \\ \frac{C'O}{C'O'} = \frac{C'P_i}{C'P'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_2' = OO' \\ \frac{x_2}{x_2'} = \frac{x_2+r}{x_2'+r'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{OO'r}{r+r'} \\ x_2' = \frac{OO'r'}{r+r'} \end{cases}$$

ITA 1993, Questão 22: Dadas as retas a, b e c, traçar uma circunferência que seja interceptada por estas retas, segundo arcos de amplitudes respectivamente iguais a 90°, 135° e 75°. Pergunta: Qual a diferença entre a soma das cordas definidas pelas retas nos arcos de amplitudes 90° e 75° e a corda correspondente ao arco de 135°.



ITA 1993, Questão 22: Determinando o ponto P (baseado em solução de [8]).

Construção (baseada em solução de [8]): Seja p_{ij} a interseção das retas i e j. (i) Dado um diâmetro AB qualquer, determine as cordas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 relativas aos ângulos centrais 90º, 135º e 75º, respectivamente; (ii) Trace as retas r, paralela a a a uma distância ℓ_1, s, paralela a b a uma distância ℓ_2, e t, paralela a c a uma distância ℓ_3; (iii) Trace as retas x, determinada pelos pontos p_{ab} e p_{rs}, e y, determinada pelos pontos p_{bc} e p_{st}, cuja interseção é o ponto $P \equiv p_{xy}$, centro da circunferência desejada; (iv) Trace a perpendicular a a por P e marque o ângulo de 45º relativo a esta perpendicular, determinando o ponto Q sobre a; (v) Trace o círculo $C_1 \equiv (P, PQ)$, determinando as cordas c_1, c_2 e c_3 sobre a, b e c, respectivamente.

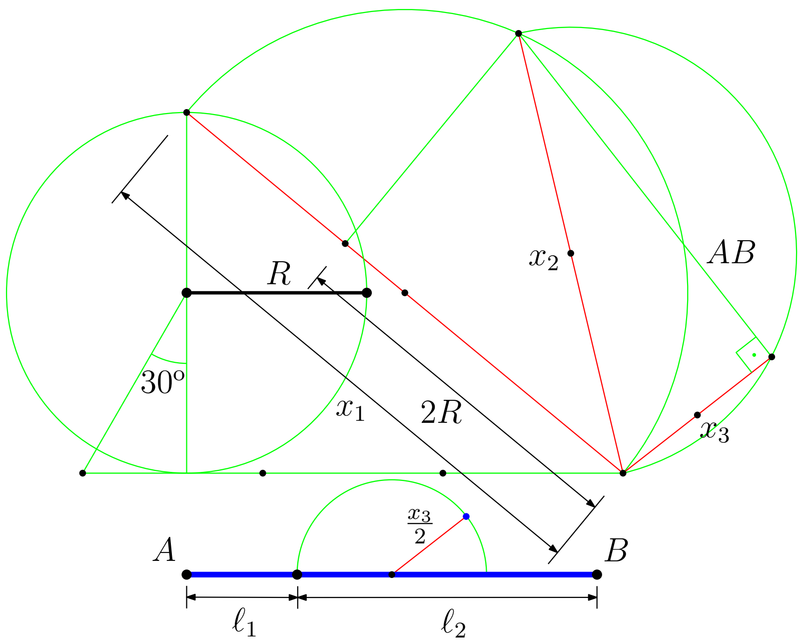


ITA 1993, Questão 22: Solução - (A) 33 mm.

Justificativa: O lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a duas retas concorrentes é constante é uma reta que passa pelo ponto de interseção das retas dadas. Assim, o lugar geométrico é completamente determinado por um ponto qualquer, que não o de interseção, que satisfaz a condição dada.

As distâncias d_a, d_b e d_c do ponto P às retas a, b e c, respectivamente, são tais que $x : \frac{d_a}{d_b} = \frac{\cos 45^o}{\cos 67.5^o}$ e $y : \frac{d_b}{d_c} = \frac{\cos 67.5^o}{\cos 37.5^o}$, o que permite determinar P.

ITA 1993, Questão 23: O segmento AB corresponde à soma de um lado de um quadrado com um lado de outro. A soma das áreas dos quadrados é equivalente à área de um círculo de raio R dado. Pergunta: Quanto medem aproximadamente os lados dos quadrados?



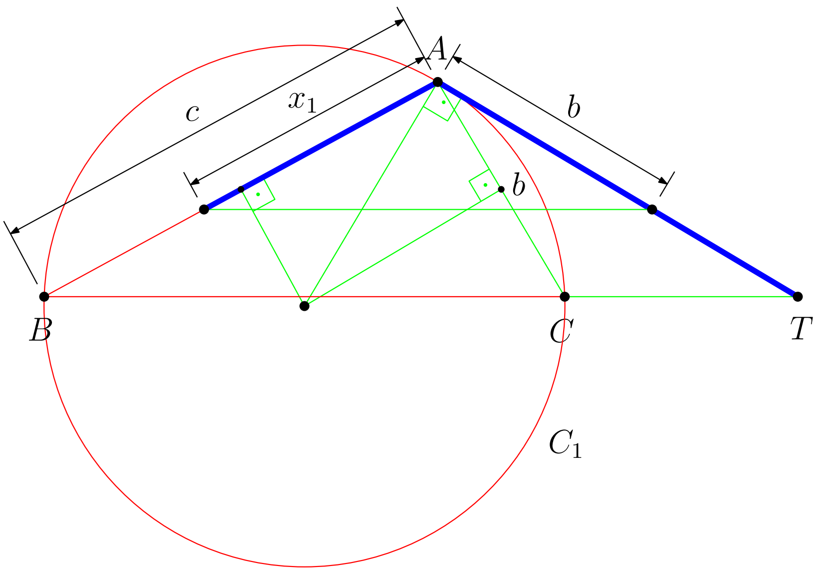
ITA 1993, Questão 23: Solução - (D) 40 mm e 15 mm.

Construção: (i) Retifique a semi-circunferência de raio R, determinando o comprimento $x_1 = \pi R$; (ii) Determine a média geométrica $x_2 = \sqrt{2R.x_1}$; (iii) Construa o triângulo retângulo de hipotenusa x_2 e cateto AB, determinando o outro cateto $x_3 = \sqrt{2\pi R^2 - AB^2}$; (iv) Determine $\ell_{1,2} = \frac{AB \pm x_3}{2}$.

Justificativa: Do enunciado,

$$\begin{cases} \ell_1 + \ell_2 = AB \\ \ell_1^2 + \ell_2^2 = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow 2\ell^2 - 2\ell AB + AB^2 - \pi R^2 = 0 \Rightarrow \ell = \frac{AB \pm \sqrt{2\pi R^2 - AB^2}}{2}$$

ITA 1993, Questão 24: Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo ABC. Determinar dois segmentos de tal forma que o produto destes segmentos seja igual ao produto dos lados b e c. Um dos segmentos é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo no vértice A. Pergunta: Quanto mede a soma dos segmentos pedidos, considerando os dados na escala $1:50$?
sln: O enunciado do problema não determina o comprimento da tangente no vértice A. Desta forma, a questão deve ser anulada. Considerando que este segmento tangente é limitado pela reta suporte do lado BC, tem-se a solução a seguir.

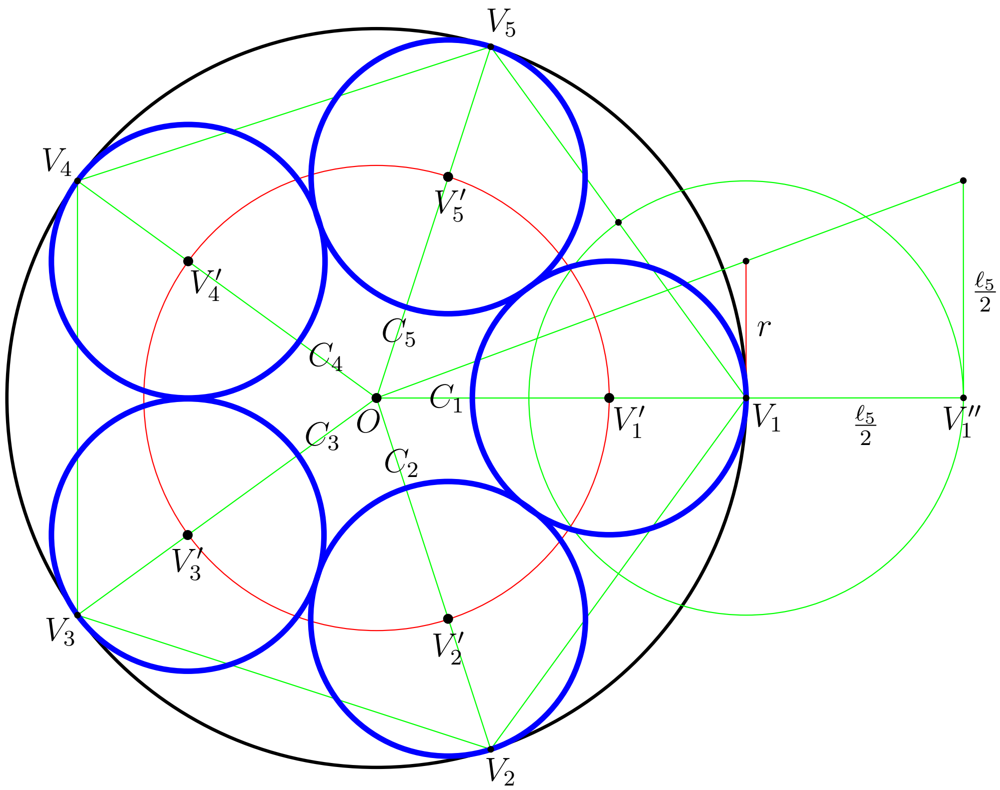


ITA 1993, Questão 24 (modificada): Solução - (C) 4,55 **m.**

Construção: (i) Trace a circunferência C_1 circunscrita ao triângulo ΔABC ([2], Exercício 1.3); (ii) Trace a tangente à circunferência C_1 no vértice A, cuja interseção com o prolongamento do lado BC determina o ponto T; (iii) Determine a quarta proporcional $AT : b = c : x_1$.
Justificativa: A construção acima segue diretamente do enunciado da versão modificada do problema.

6 Soluções do IME

IME 1964/1965, Questão 1, Item 1 [valor 1,0]: Dada uma circunferência de 5 cm de raio, traçar 5 outras circunferências internas tangentes à ela e tangentes entre si, duas a duas.

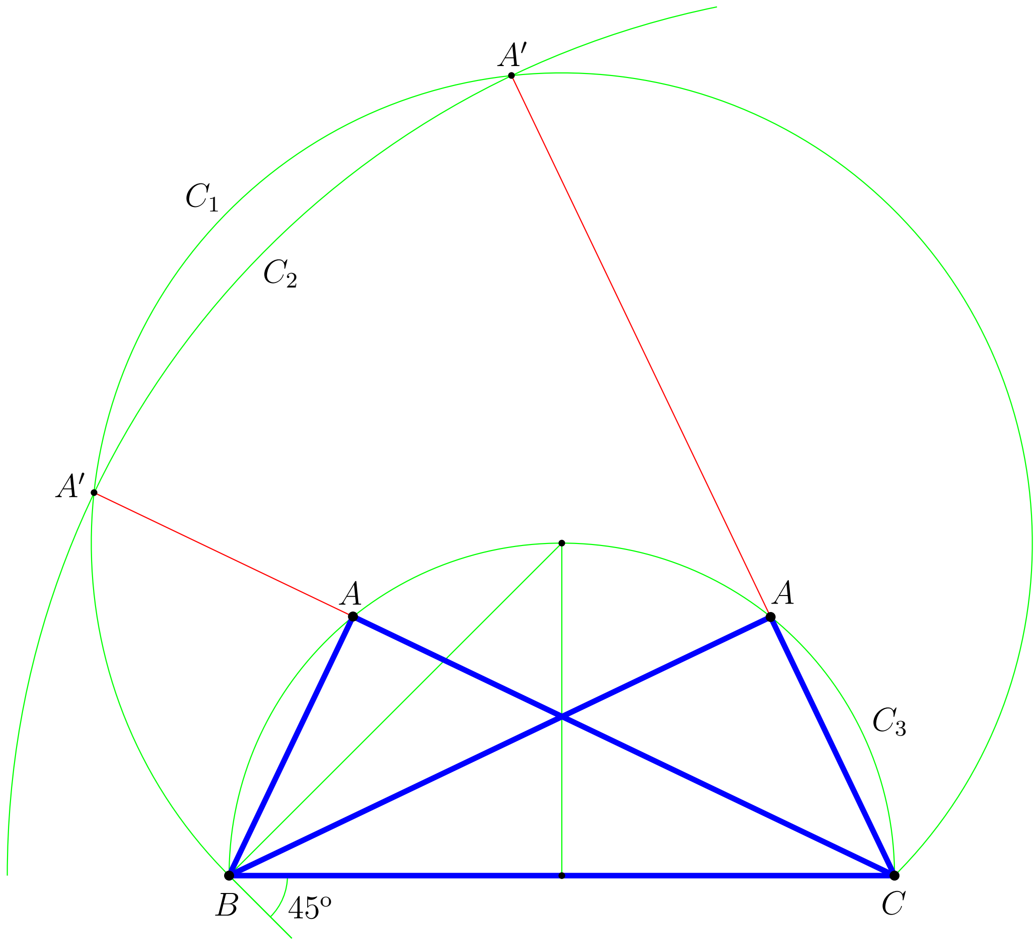


IME 1964/1965, Questão 1, Item 1: Solução.

Construção: (i) Construa o pentágono regular $V_1V_2V_3V_4V_5$ inscrito na circunferência de centro O e raio $R = 5$ cm ([2], Exercício 2.25), determinando o lado $\ell_5 = R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$; (ii) Determine a quarta proporcional $(R + \frac{\ell_5}{2}) : R = \frac{\ell_5}{2} : r$, (iii) Marque, para cada vértice V_i do pentágono regular, a distância $V_iV_i' = r$, com V_i' entre O e V_i; (iv) Trace as circunferências desejadas $C_i \equiv \mathcal{C}(V_i', r)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Justificativa: A circunferência C_1 pode ser obtida a partir da circunferência $C_x \equiv \mathcal{C}(V_1, \frac{\ell}{2})$ por uma homotetia de centro O e razão $k = \frac{R}{R+\frac{\ell_5}{2}}$, que mapeia o ponto V_1'' da figura-solução no ponto V_1 e determina $r = \frac{\ell_5}{2}k$.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (a): Construir um triângulo retângulo sendo dados a hipotenusa = 9 cm e a soma dos catetos = 12 cm.

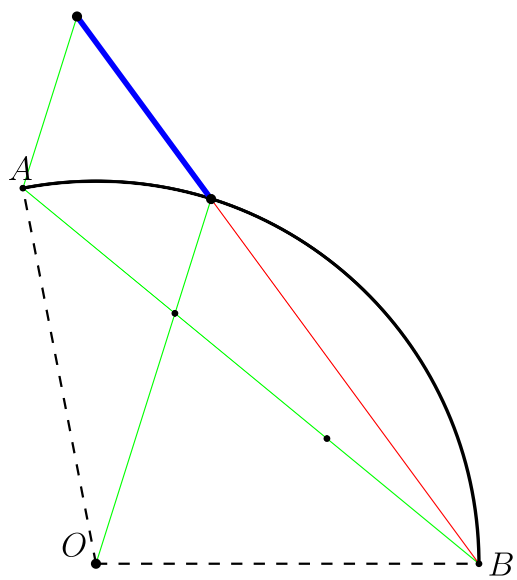


IME 1965/1966, Questão 1, Item (a): Solução.

Construção: (i) Trace o arco-capaz C_1 do ângulo de 45^o relativo à hipotenusa $BC = 9$ cm; (ii) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(C, 12 \text{ cm})$, cuja interseção com C_1 são os pontos A'; (iii) Trace o arco-capaz C_3 do ângulo de 90^o relativo à hipotenusa BC, cuja interseção com os segmentos CA' é o vértice A.

Justificativa: Da construção acima, $BA \perp A'C$ e $B\hat{A}'A = 45^o$. Logo, $A'\hat{B}A = 45^o$ e então $BA = AA'$, de forma que $(BA + AC) = (AA' + AC) = A'C = 12$ cm, como desejado.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (c): Retificar a terça parte do arco AB dado.

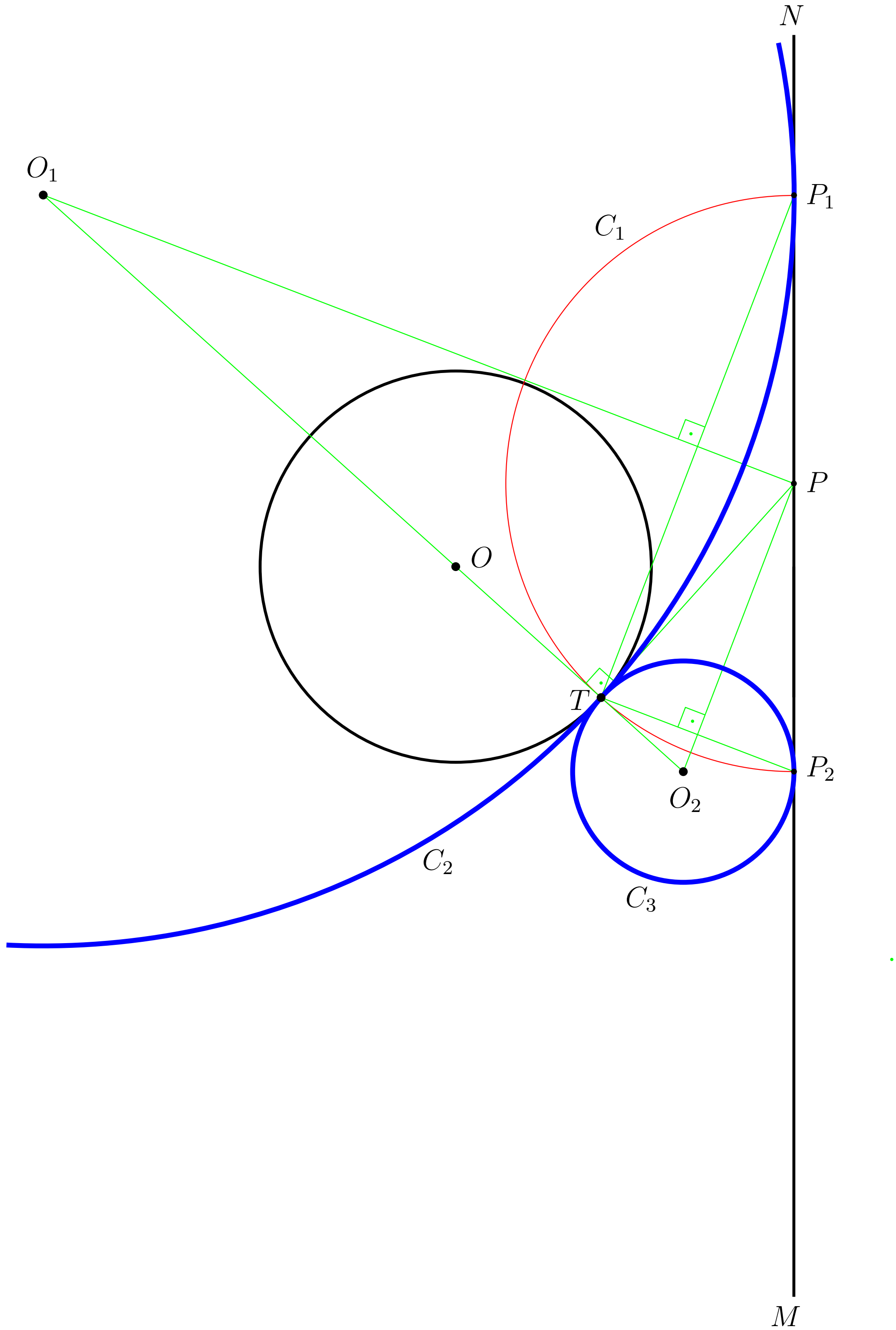


IME 1965/1966, Questão 1, Item (c): Solução.

Construção: (i) Retifique o arco dado usando, por exemplo, o método de d'Ocagne ([1], pp. 63–65); (ii) Divida o arco retificado em três partes iguais.
Justificativa: A construção me parece auto-explicativa. De qualquer forma, o método de d'Ocagne é propício para a trisecção do arco retificado.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (d): Traçar as circunferências tangentes à reta MN dada e tangentes à circunferência O, num ponto T dado sobre esta.

Construção: (i) Trace a perpendicular a OT, cuja interseção com a reta MN determina o ponto P; (ii) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(P, PT)$, cujas interseções com a reta MN determinam os pontos P_1 e P_2; (iii) Trace as mediatrizes das retas TP_1 e TP_2, cujas respectivas interseções com o prolongamento da reta OT são os pontos O_1 e O_2; (iv) Trace os círculos desejados $C_2 \equiv \mathcal{C}(O_1, O_1T)$ e $C_3 \equiv \mathcal{C}(O_2, O_2T)$.
Justificativa: A reta PT é tangente comum aos círculos desejados. Logo, os centros O_1 e O_2 destes círculos são tais que $O_1T \perp PT$ e $O_2T \perp PT$, de forma que O_1 e O_2 estão sobre a reta suporte de OT. Além disto, as outras tangentes por P a estes círculos são tais que $PP_1 = PP_2 = PT$, com P_1 e P_2 sobre MN como desejado no enunciado. Assim, os centros O_1 e O_2 estão, respectivamente, sobre as mediatriz das cordas TP_1 e TP_2.

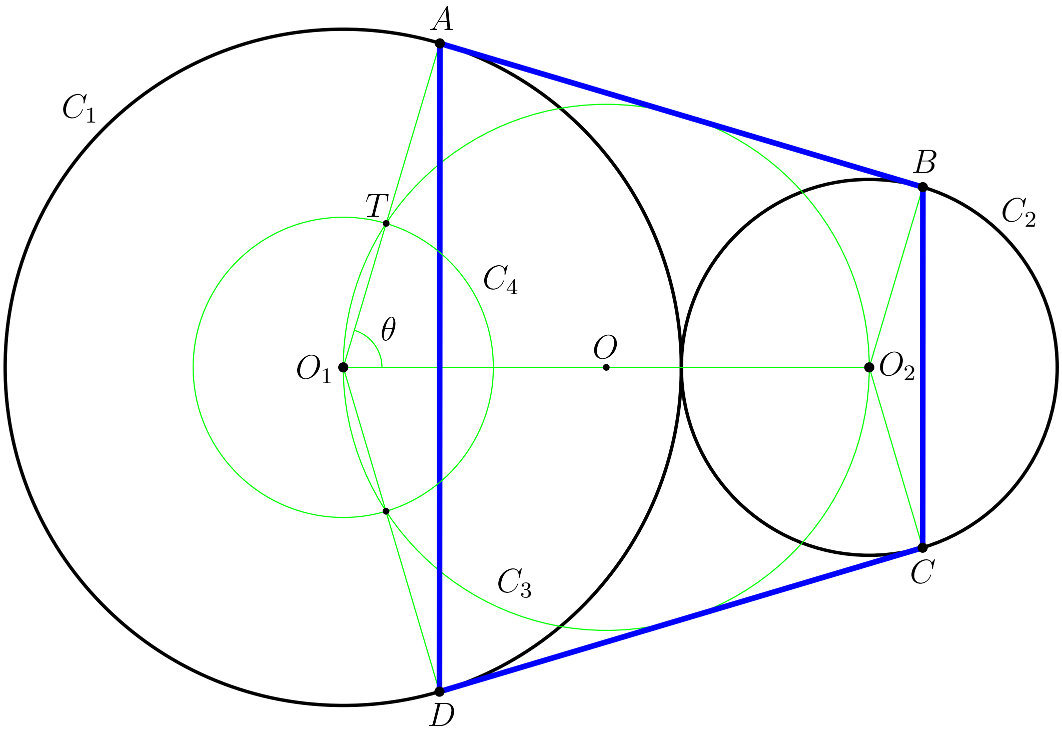


IME 1965/1966, Questão 1, Item (d): Solução.

IME 1965/1966, Questão 2, Item A: Os vértices de um trapézio são os pontos de contatos das tangentes comuns exteriores a duas circunferências tangentes entre si, cujos centros estão afastados de 7 cm, sendo 9 cm o diâmetro de uma delas. Pedem-se:

(a) Desenhar o trapézio.

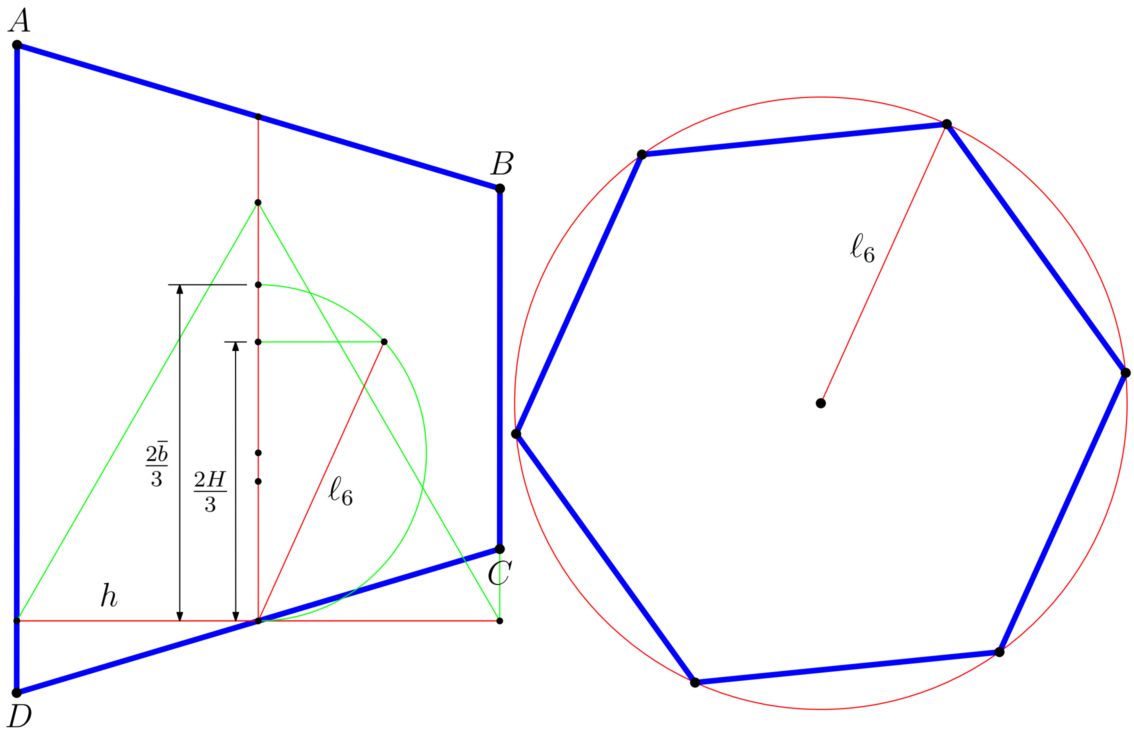
(b) Determinar o hexágono regular cuja área seja equivalente à do trapézio.



IME 1967/1966, Questão 2, Item A(a): Solução.

Construção (item (a)): (i) Marque $O_1O_2 = 7$ cm e trace $C_1 \equiv \mathcal{C}(O_1, r_1)$ e $C_2 \equiv \mathcal{C}(O_2, r_2)$, com $r_1 = 4{,}5$ cm e $r_2 = 2{,}5$ cm; (ii) Trace $C_3 \equiv \mathcal{C}(O, OO_1)$, onde o ponto O é médio de O_1O_2; (iii) Trace $C_4 \equiv \mathcal{C}(O_1, r)$, com $r = 2$ cm, cujas interseções com C_3 determinam os ângulos $\pm\theta$ dos segmentos O_1A, O_2B, O_2C e O_1D que definem o trapézio $ABCD$ desejado.

Justificativa: Seja T a interseção, sobre O_1A, de C_3 e C_4. Como o triângulo ΔO_1TO_2 está inscrito na semi-circunferência C_3, então $O_1T \perp TO_2$. Como $AB \parallel TO_2$, pois $TA = O_2B = r_2$ e $TA \parallel O_2B$, então $O_1A \perp AB$, como desejado. Um raciocínio análogo verifica que $O_2B \perp AB$, $O_1D \perp DC$ e $O_2C \perp DC$.

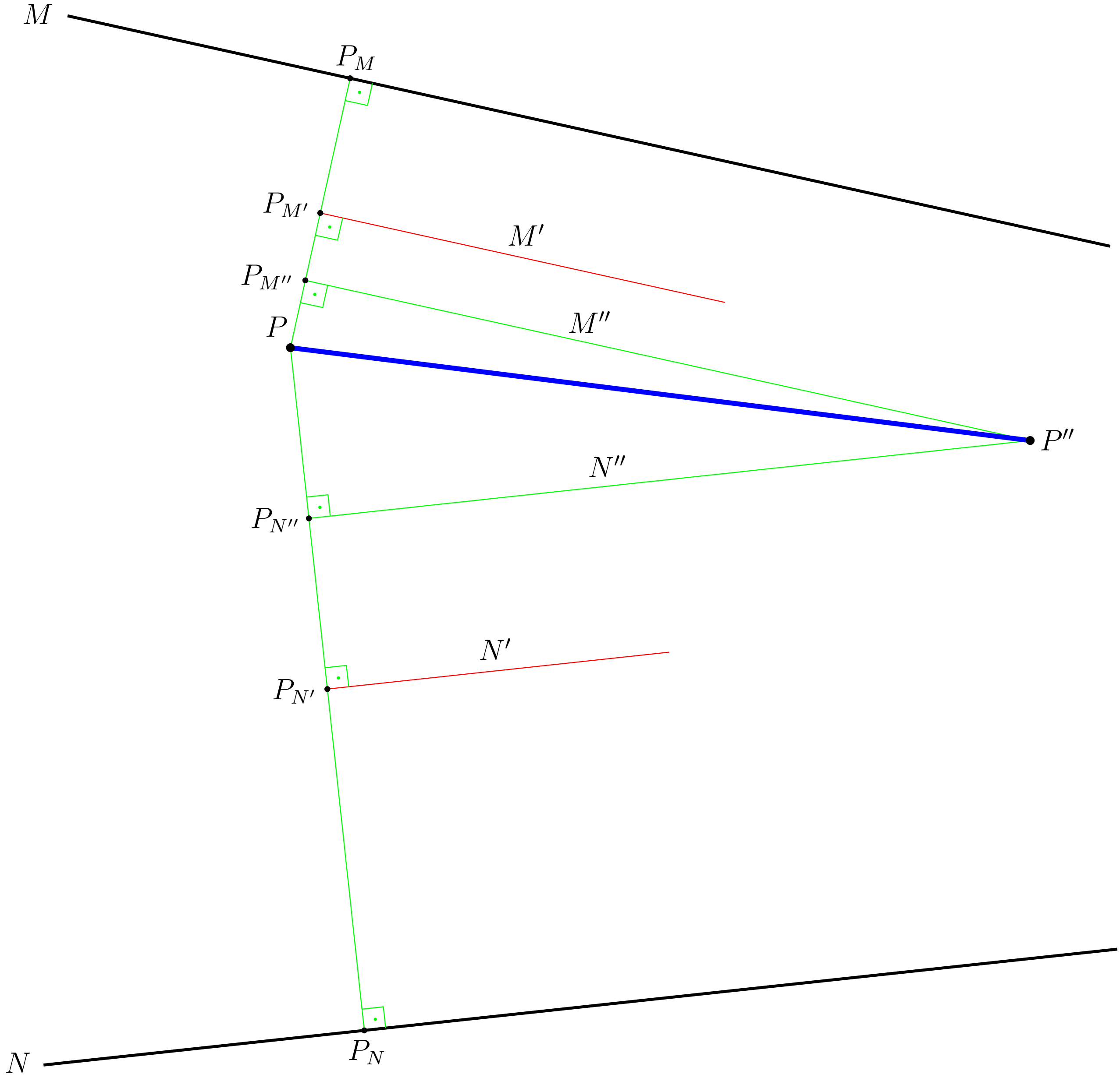


IME 1967/1966, Questão 2, Item A(b): Solução.

Construção (item (b)): (i) Seja o trapézio $ABCD$ determinado no item anterior, de altura h e base média $\bar{b}$; (iii) Construa um triângulo equilátero de lado h cuja altura é $H = \frac{h\sqrt{3}}{2}$; (iv) Determine a grandeza $\ell_6 = \sqrt{\frac{2\bar{b}}{3}\frac{2H}{3}}$; (v) Trace circunferência de raio ℓ_6 e trace hexágono inscrito de lado também ℓ_6.
Justificativa: A equivalência das áreas S_T do trapézio, de base média $\bar{b}$ e altura h, e S_H do hexágono, de semi-perímetro p_6, apótema a_6 e lado ℓ_6, é obtida para

$$\begin{cases} S_T = \bar{b}h \\ S_H = p_6 a_6 = 3\ell_6 \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \ell_6 = \frac{\sqrt{2\bar{b}h\sqrt{3}}}{3}$$

IME 1967/1968, Questão 1, Item 1 [valor 0,5]: Pelo ponto P, traçar uma reta que passe pelo ponto de concorrência das retas M e N que não podem ser prolongadas.

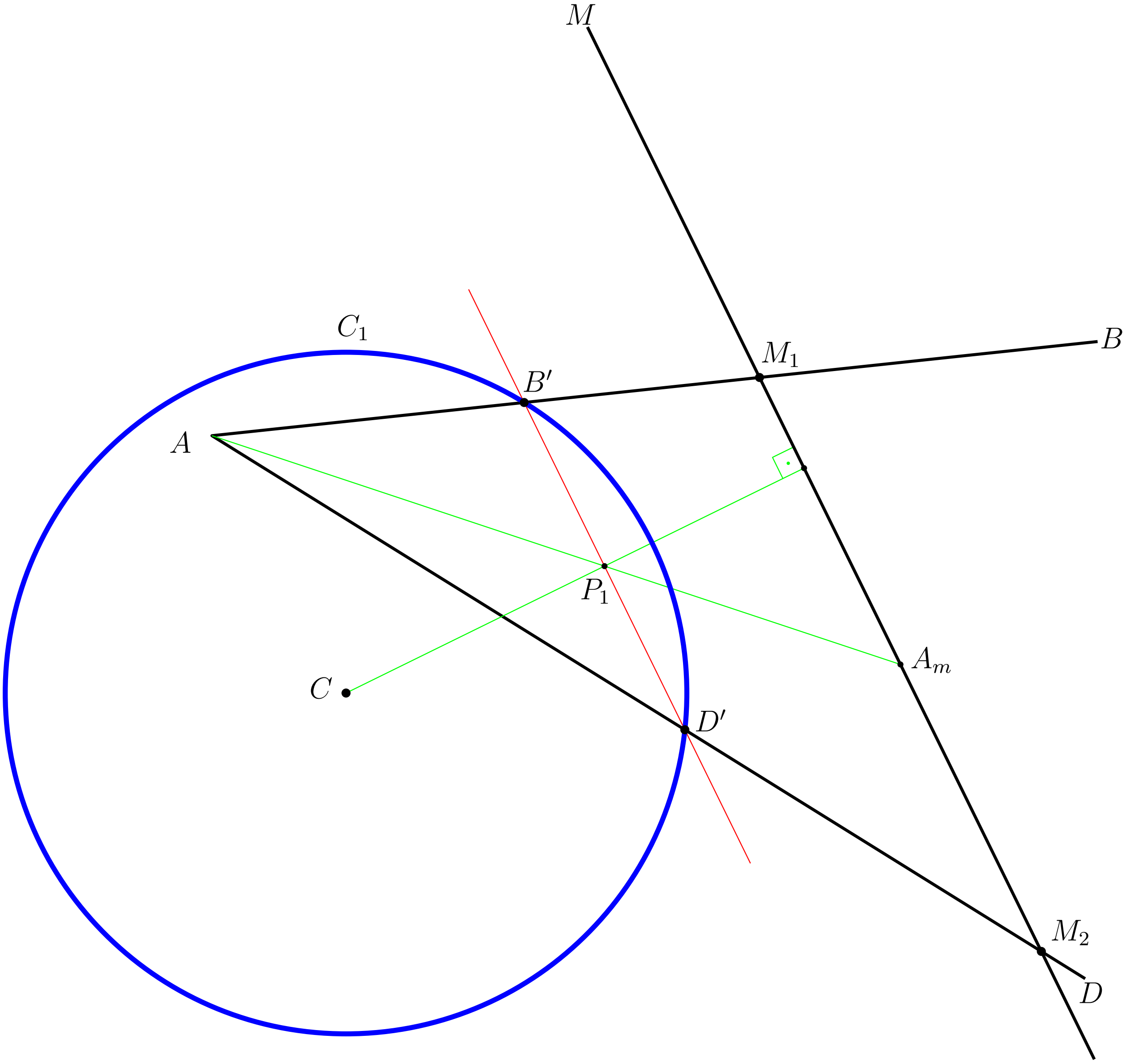


IME 1967/1968, Questão 1, Item 1: Solução.

Construção: (i) Trace por P as perpendicular às retas M e N, cujas interseções com estas mesmas retas determinam, respectivamente, os pontos P_M e P_N; (ii) Trace as mediatrizes M' de PP_M e N' de PP_N, cuja interseção é o ponto P' (que não cabe na folha de resposta); (iii) Sejam $P_{M'}$ e $P_{N'}$ as projeções de P em M' e N', respectivamente. Trace as mediatrizes M'' de $PP_{M'}$ e N'' de $PP_{N'}$, cuja interseção é o ponto P''; (iv) Trace a reta PP'' desejada.
Justificativa: Seja Q o ponto de interseção das retas M e N. Como $P\hat{P_M}Q = P\hat{P_N}Q = 90^{\circ}$, então o quadrilátero PP_MP_NQ é inscritível num círculo, de diâmetro PQ, que é também o círculo circunscrito ao triângulo ΔPP_MP_N, cujo centro é determinado pela interseção das mediatrizes M' de PP_M e N' de PP_N. No caso, esta interseção é indeterminada. Assim, devemos repetir o procedimento usando as retas M' e N' em substituição às retas M e N, respectivamente.

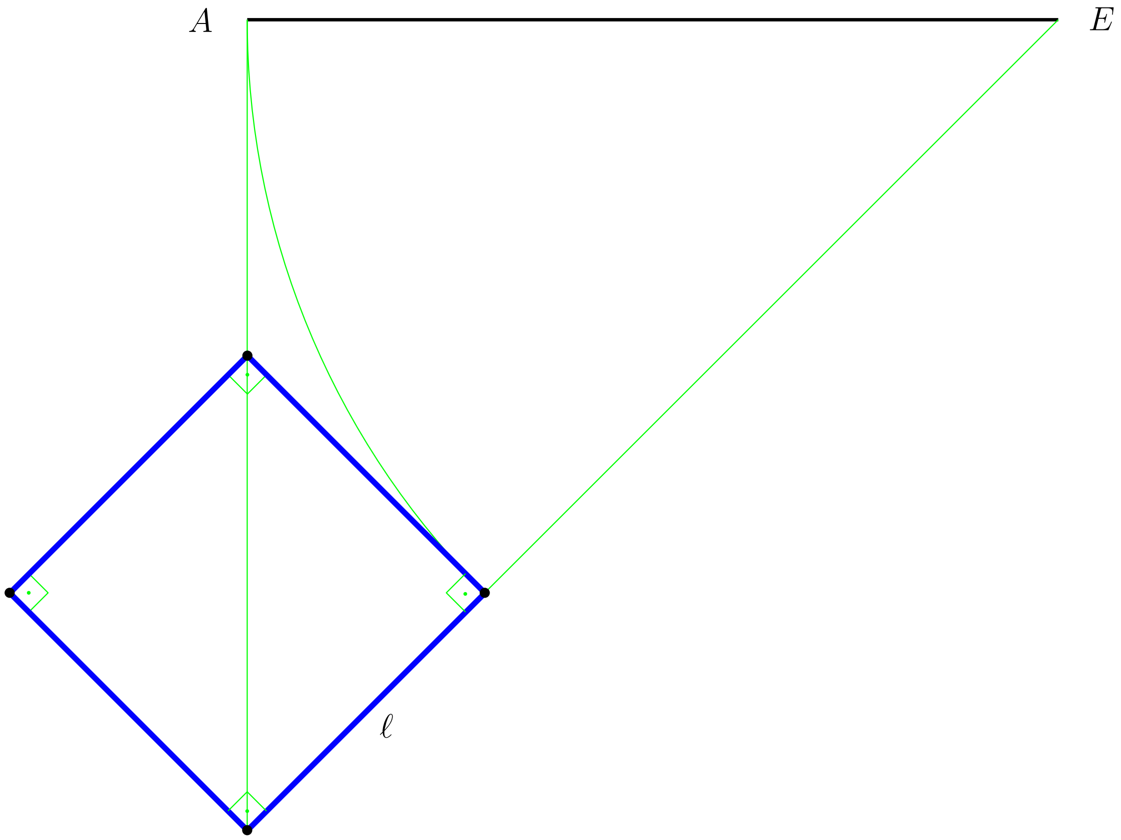
IME 1967/1968, Questão 1, Item 2 [valor 0,5]: Do ponto C como centro, traçar uma circunferência que corte os lados do ângulo BAD, de modo que a corda obtida seja paralela à reta M.

Construção: (i) Trace a mediana AA_m, onde A_m é o ponto médio de M_1M_2, que são as interseção da reta M com os lados AB e AD, respectivamente; (ii) Trace pelo ponto C uma perpendicular à reta M, cuja interseção com a mediana AA_m é o ponto P_1; (iii) Trace por P_1 uma paralela à reta M, cujas interseções com os lados AB e AD são os pontos B' e D', respectivamente; (iv) Trace a circunferência desejada $C_1 \equiv \mathcal{C}(C, CB')$.
Justificativa: Da construção acima, tem-se $B'D' \parallel M_1M_2$. Assim, pela semelhança dos triângulos $\Delta AB'D'$ e ΔAM_1M_2, como A_m é médio de M_1M_2, então P_1 é médio de $B'D'$. Além disto, como $CP_1 \perp M$, então $CP_1 \perp B'D'$, de forma que CP_1 é mediatriz de $B'D'$. Logo, B' e D' pertencem a uma mesma circunferência de centro C.



IME 1967/1968, Questão 1, Item 2: Solução.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: O segmento de reta AE representa a soma da diagonal e do lado de um quadrado. Pede-se construir o quadrado.



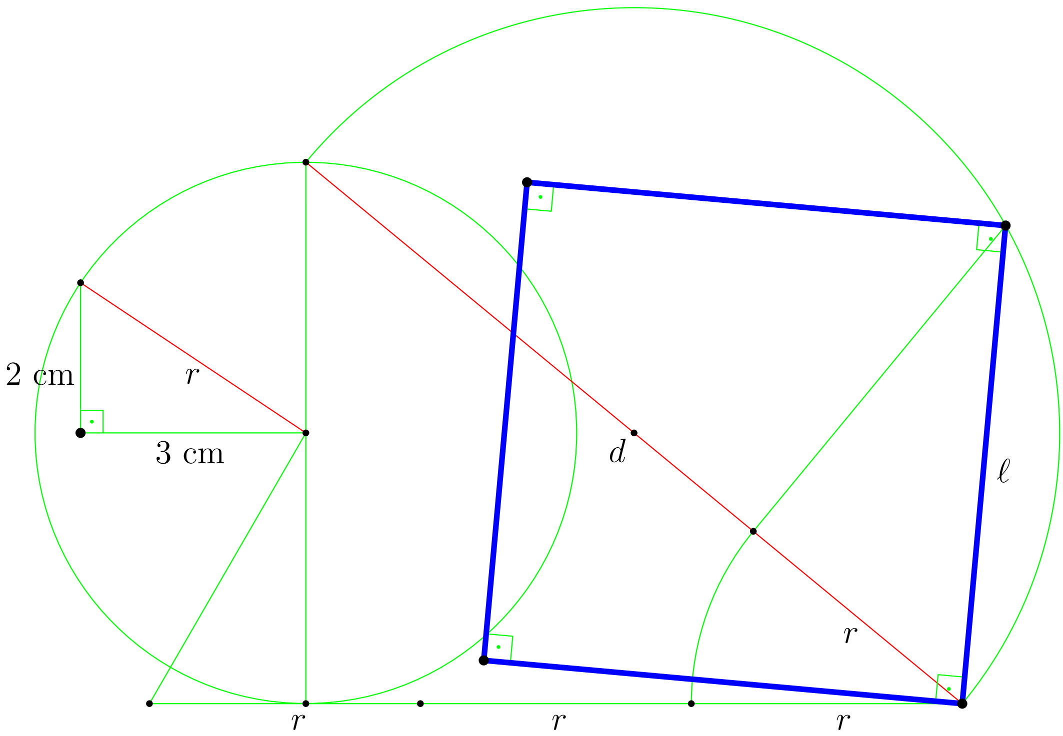
IME 1967/1968, Questão 1, Item 3: Solução.

Construção: (i) Determine $\ell = (AE\sqrt{2} - AE)$; (ii) Trace o quadrado de lado ℓ.

Justificativa: Do enunciado,

$$AE = \ell\sqrt{2} + \ell \Rightarrow \ell = AE(\sqrt{2} - 1)$$

IME 1967/1968, Questão 1, Item 4 [valor 1,0]: Construir um quadrado, equivalente a um círculo cuja área é a soma das áreas de dois círculos de raios 3 e 2 cm.

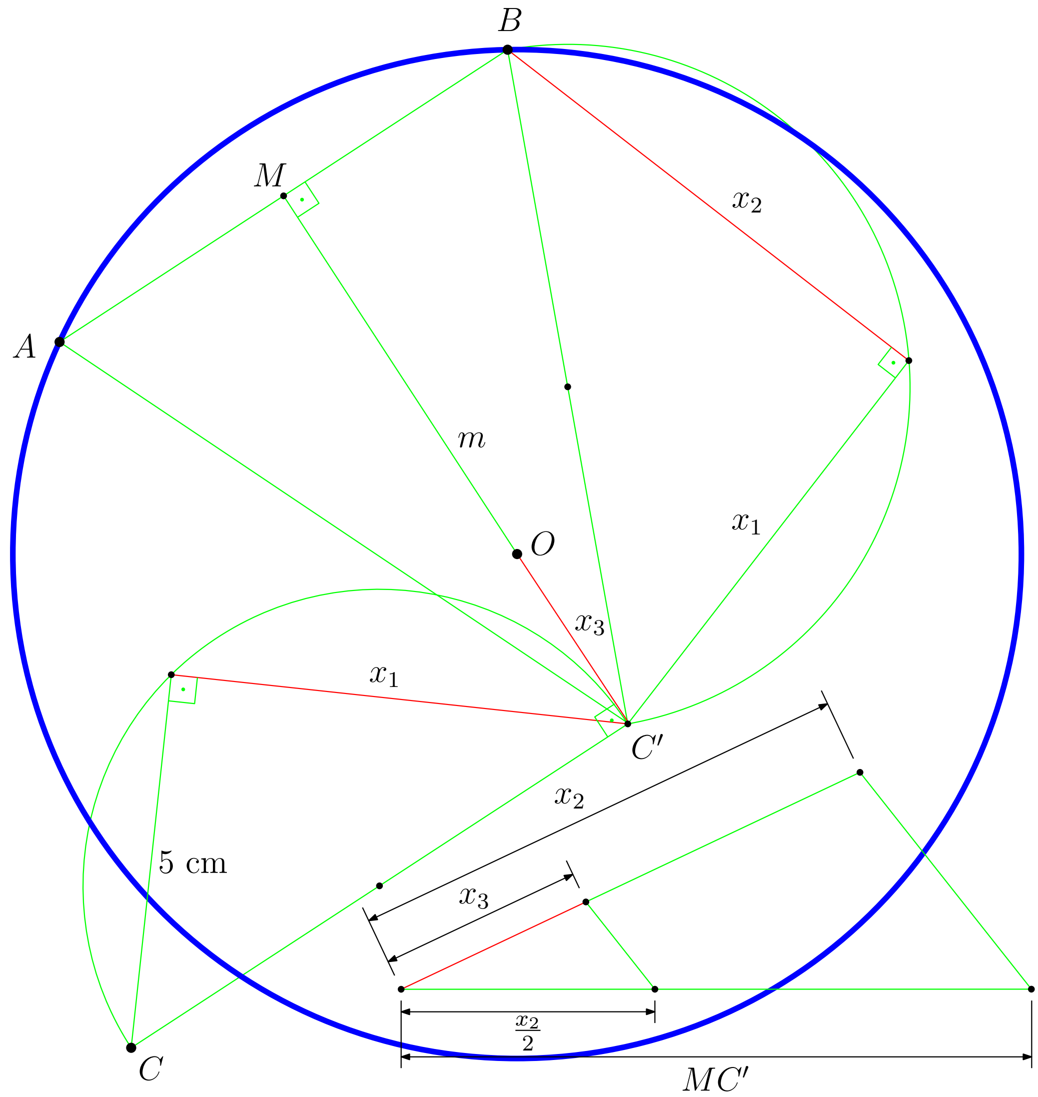


IME 1967/1968, Questão 1, Item 4: Solução.

Construção: (i) Trace um triângulo retângulo de catetos 3 e 2 cm, determinando a hipotenusa $r = \sqrt{3^2 + 2^2}$ cm; (ii) Retifique o semi-círculo de raio r, determinando a distância $d \approx \pi r$ cm; (iii) Determine a média geométrica $\ell = \sqrt{dr} \approx \sqrt{\pi r^2}$ cm^2; (iv) Trace o quadrado de lado ℓ.
Justificativa: Sendo $r = \sqrt{3^2 + 2^2}$ cm, tem-se

$$\ell^2 = \pi r^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{\pi r r}$$

IME 1968/1969, Questão 1, Item 1 [valor 1,0]: Dados os três pontos A, B e C, passar por A e B uma circunferência tal que a tangente tirada por C tenha um comprimento de 5 cm.



IME 1968/1969, Questão 1, Item 1: Solução.

Construção: (i) Determine a projeção C' de C sobre a mediatriz m de AB; (ii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa CC' e cateto de 5 cm, determinando o outro cateto x_1; (iii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa BC' e cateto x_1, determinando o outro cateto x_2; (iv) Determine a quarta proporcional $MC' : x_2 = \frac{x_2}{2} : x_3$, onde M é o ponto médio de AB; (v) Trace a circunferência desejada $C_1 \equiv \mathcal{C}(O, OA)$, com O entre M e C' é tal que $OC' = x_3$.
Justificativa: Como a tangente por C mede 5 cm, tem-se

$$5^2 + R^2 = OC^2 = OC'^2 + CC'^2 \Rightarrow R^2 = OC'^2 + (CC'^2 - 5^2) = OC'^2 + x_1^2$$

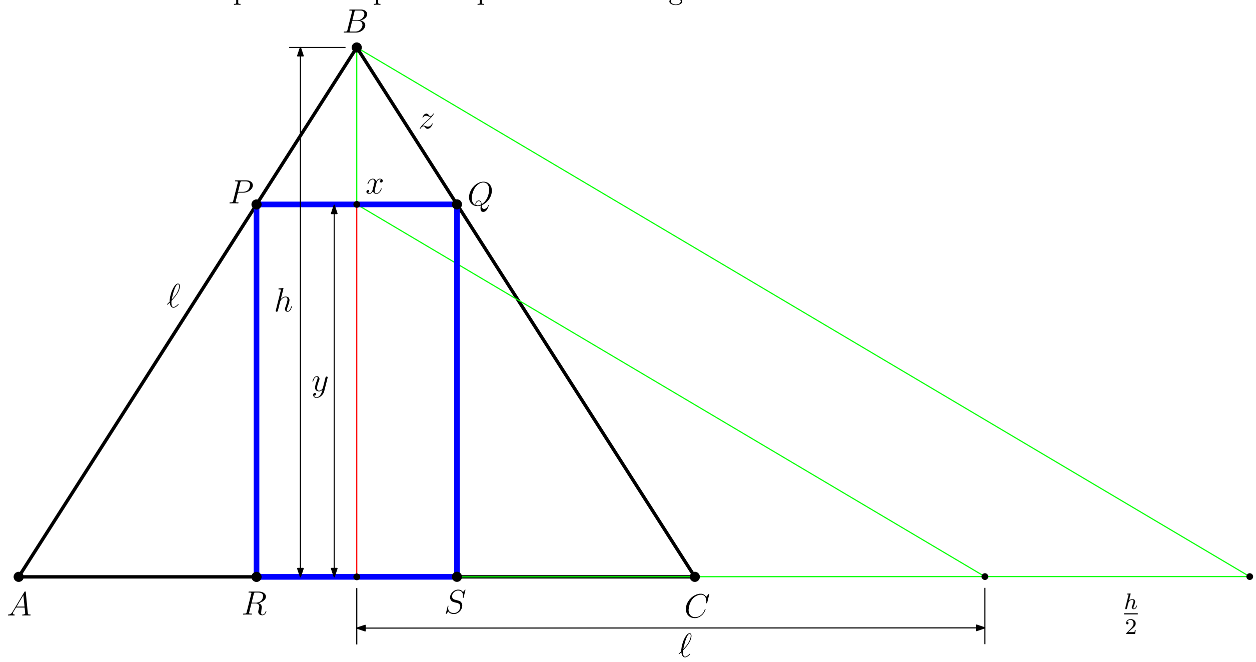
Além disto, do triângulo retângulo ΔOMB, tem-se

$$OM^2 + MB^2 = (MC' - OC')^2 + MB^2 = R^2$$

de modo que

$$OC' = \frac{(MC'^2 + MB^2) - x_1^2}{2MC'} = \frac{BC'^2 - x_1^2}{2MC'} = \frac{x_2^2}{2MC'}$$

IME 1968/1969, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: No triângulo isósceles ABC, inscrever um retângulo cujo perímetro seja duplo do perímetro do triângulo isósceles que fica na parte superior do retângulo.



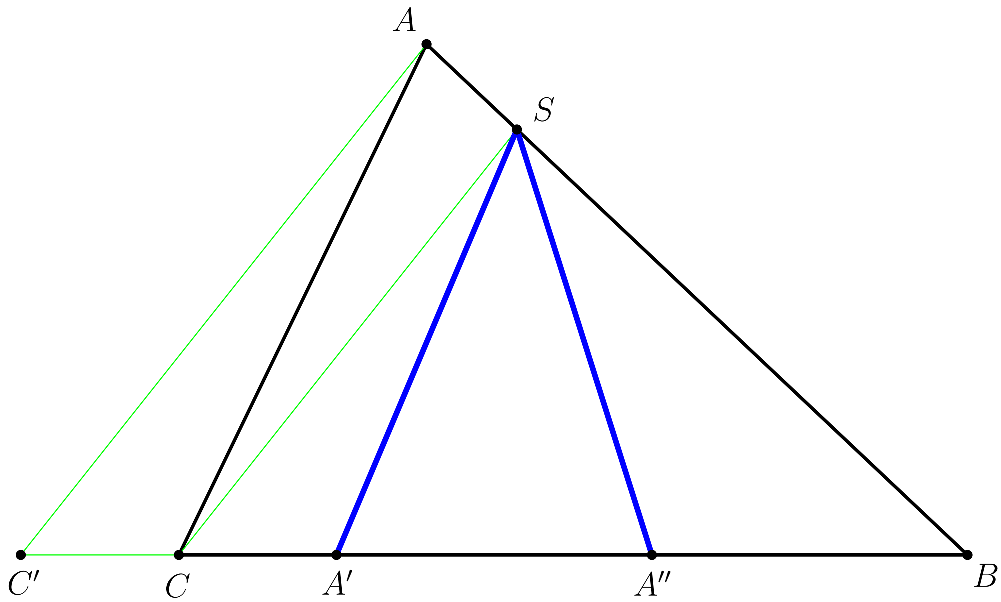
IME 1968/1969, Questão 1, Item 2: Solução.

Construção: (i) Determine a quarta proporcional $\frac{h+2\ell}{2} : h = \ell : y$, onde ℓ e h são o lado e a altura do triângulo isósceles, respectivamente; (ii) Trace uma paralela à base do triângulo a uma distância y da mesma, cujas interseções com o triângulo determinam os vértices P e Q; (iii) Trace por A e B perpendiculares à base do triângulo, cujas interseções com a mesma determinam os outros dois vértices R e S do retângulo desejado.

Justificativa: Sejam x e y a base e a altura do retângulo desejado, respectivamente. Seja z o lado do triângulo isósceles, de perímetro $(2p)_T$, acima do retângulo desejado, de perímetro $(2p)_R$. Por semelhança de triângulos e para que $(2p)_R = 2(2p)_T$, têm-se

$$\begin{cases} \frac{\ell}{h} = \frac{z}{h-y} \\ 2x + 2y = 2(2z + x) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2\ell h}{h + 2\ell}$$

IME 1968/1969, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: Pelo ponto comum S dividir o triângulo ABC em três áreas iguais.

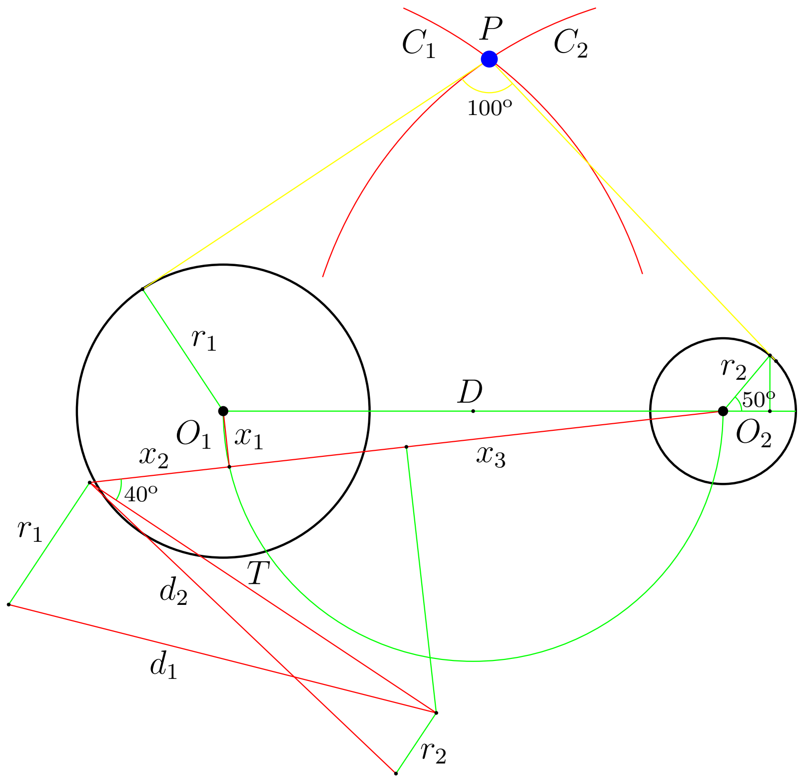


IME 1968/1969, Questão 1, Item 3: Solução.

Construção: (i) Trace por A uma paralela a SC, determinando o ponto C' sobre o prolongamento de BC; (ii) Divida BC' em três partes iguais, determinando os pontos A' e A'', que devem ser unidos a S.

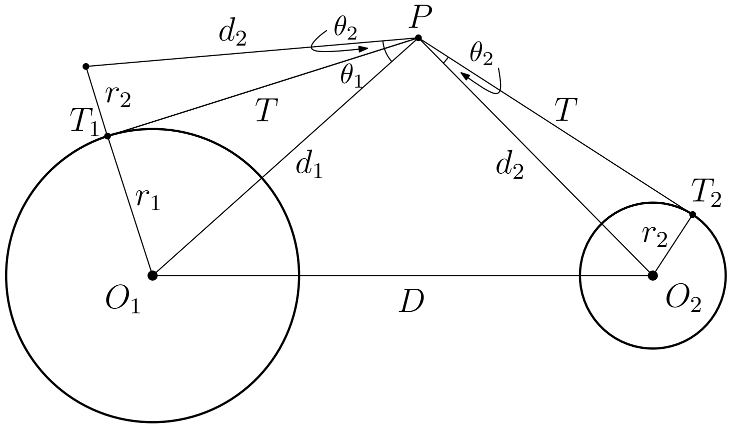
Justificativa: Como $AC' \parallel SC$, as alturas de A e C' em relação a SC são iguais. Assim, as áreas dos triângulos ΔACS e $\Delta C'CS$, que possuem a mesma base CS, são iguais, fazendo com que as áreas dos triângulos ΔACB e $\Delta SC'B$ sejam iguais. Dividindo a base $C'B$ em três partes iguais, dividimos o triângulo $\Delta SC'B$, e conseqüentemente o triângulo ΔACB, em três partes iguais.

IME 1969/1970, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: Os pontos O_1 e O_2 são os centros de duas circunferências de raios 2 cm e 1 cm respectivamente. Ache um ponto tal que as tangentes mais inclinadas, traçadas às circunferências, sejam iguais e formem um ângulo de 100º.



IME 1969/1970, Questão 1, Item 2.

Construção (Algébrica): (i) Determine $x_1 = (r_1 - r_2)\,\text{sen}\,50^{\text{o}} = r_2\,\text{sen}\,50^{\text{o}}$ e $x_2 = (r_1 + r_2)\cos 50^{\text{o}} = 3r_2 \cos 50^{\text{o}}$; (ii) Construa o triângulo retângulo de hipotenusa D e cateto x_1, determinando o outro cateto x_3; (iii) Construa o triângulo retângulo de cateto $\frac{x_2+x_3}{2}$ e ângulo adjacente 40º, determinando a hipotenusa T; (iv) Construa o triângulo retângulo de catetos T e r_1, determinando a hipotenusa d_1; (v) Construa o triângulo retângulo de catetos T e r_2, determinando a hipotenusa d_2; (vi) Trace os círculos $C_1 \equiv (O_1, d_1)$ e $C_2 \equiv (O_2, d_2)$, cuja interseção é o ponto P desejado.



IME 1969/1970, Questão 1, Item 2: Análise algébrica.

Justificativa (Algébrica): Sejam P a solução do problema, T_1 e T_2 os pontos de tangência por P aos círculos de centros O_1 e O_2, respectivamente. Sejam as distâncias $D = O_1O_2$, $T = PT_1 = PT_2$, $d_1 = PO_1$ e $d_2 = PO_2$. Justapondo os triângulos ΔPO_1T_1 e ΔPO_2T_2, têm-se, pela lei dos cossenos, que

$$\begin{cases} (r_1+r_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ D^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos(100^\text{o} - (\theta_1+\theta_2)) \end{cases}$$

Da primeira equação,

$$r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = (T^2 + r_1^2) + (T^2 + r_2^2) - 2d_1d_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$

de modo que

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \frac{T^2 - r_1r_2}{d_1d_2} \Rightarrow \text{sen}\,(\theta_1+\theta_2) = \sqrt{1 - \frac{(T^2-r_1r_2)^2}{(T^2+r_1^2)(T^2+r_2^2)}} = \frac{T(r_1+r_2)}{d_1d_2}$$

Com isto, da segunda equação do sistema acima, tem-se

$$\begin{aligned} D^2 &= d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)\cos 100^\text{o} + \text{ sen }(\theta_1+\theta_2)\text{ sen}\,100^\text{o}\right] \\ &= d_1^2 + d_2^2 - 2\left[(T^2 - r_1r_2)\cos 100^\text{o} + T(r_1+r_2)\text{ sen}\,100^\text{o}\right] \end{aligned}$$

de modo que o comprimento T das tangentes por P é solução de

$$2T^2(1 - \cos 100^\text{o}) - 2T(r_1+r_2)\text{ sen}\,100^\text{o} + (r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos 100^\text{o}) - D^2 = 0$$

Assim,

$$T = \frac{2(r_1+r_2)\,\text{sen}\,100^\text{o} \pm \sqrt{\Delta}}{4(1-\cos 100^\text{o})} = \frac{4(r_1+r_2)\,\text{sen}\,50^\text{o}\cos 50^\text{o} \pm \sqrt{\Delta}}{8\,\text{sen}^2 50^\text{o}}$$

pois $\operatorname{sen} 100^{\mathrm{o}} = 2\operatorname{sen} 50^{\mathrm{o}} \cos 50^{\mathrm{o}}$ e $(1 - \cos 100^{\mathrm{o}}) = 2\operatorname{sen}^2 50^{\mathrm{o}}$, com

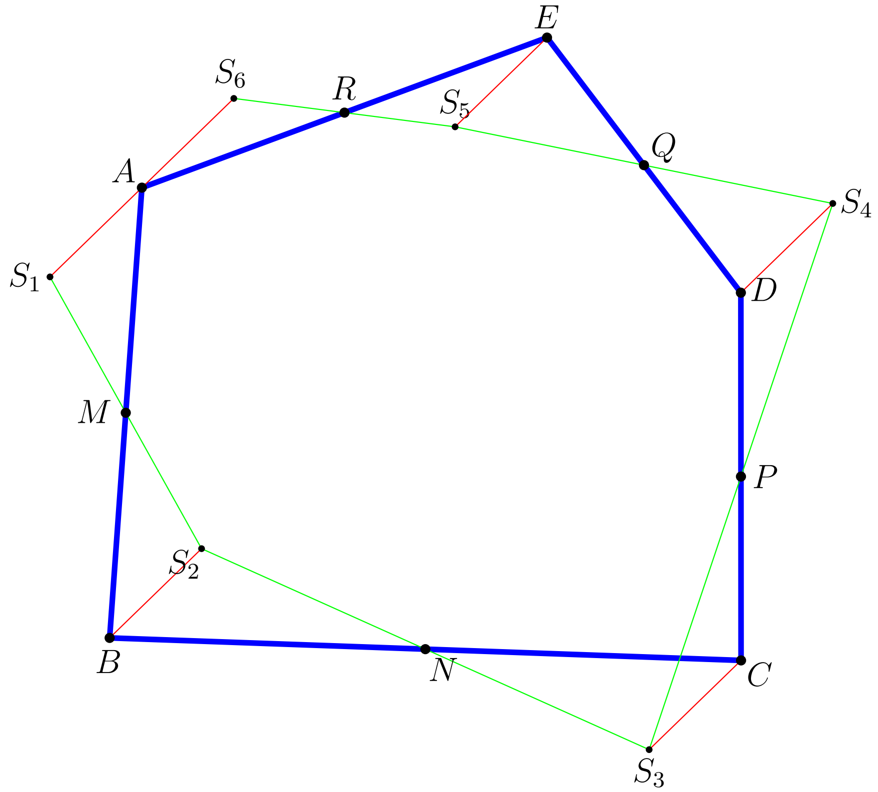
$$\begin{aligned}
\Delta &= 4(r_1+r_2)^2 \operatorname{sen}^2 100^{\mathrm{o}} - 8(1-\cos 100^{\mathrm{o}})(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos 100^{\mathrm{o}} - D^2) \\
&= 4(r_1+r_2)^2 - 4(r_1+r_2)^2\cos^2 100^{\mathrm{o}} - 8(r_1^2+r_2^2) - 16r_1r_2\cos 100^{\mathrm{o}} \\
&\quad +8(r_1^2+r_2^2)\cos 100^{\mathrm{o}} + 16r_1r_2\cos^2 100^{\mathrm{o}} + 8D^2(1-\cos 100^{\mathrm{o}}) \\
&= -4(r_1-r_2)^2 + 8(r_1-r_2)^2\cos 100^{\mathrm{o}} - 4(r_1-r_2)^2\cos^2 100^{\mathrm{o}} + 8D^2(1-\cos 100^{\mathrm{o}}) \\
&= -4(r_1-r_2)^2(1-\cos 100^{\mathrm{o}})^2 + 8D^2(1-\cos 100^{\mathrm{o}}) \\
&= 16\operatorname{sen}^2 50^{\mathrm{o}}[-(r_1-r_2)^2\operatorname{sen}^2 50^{\mathrm{o}} + D^2]
\end{aligned}$$

Logo,

$$T = \frac{(r_1+r_2)\cos 50^{\mathrm{o}} \pm \sqrt{-(r_1-r_2)^2\operatorname{sen}^2 50^{\mathrm{o}} + D^2}}{2\operatorname{sen} 50^{\mathrm{o}}}$$

IME 1969/1970, Questão 1, Item 3 [valor 0,5]: Os pontos M, N, P, Q e R são os pontos médios dos lados de um pentágono qualquer. Ache o pentágono.

Construção I: Ver [2], Exercício 5.59.

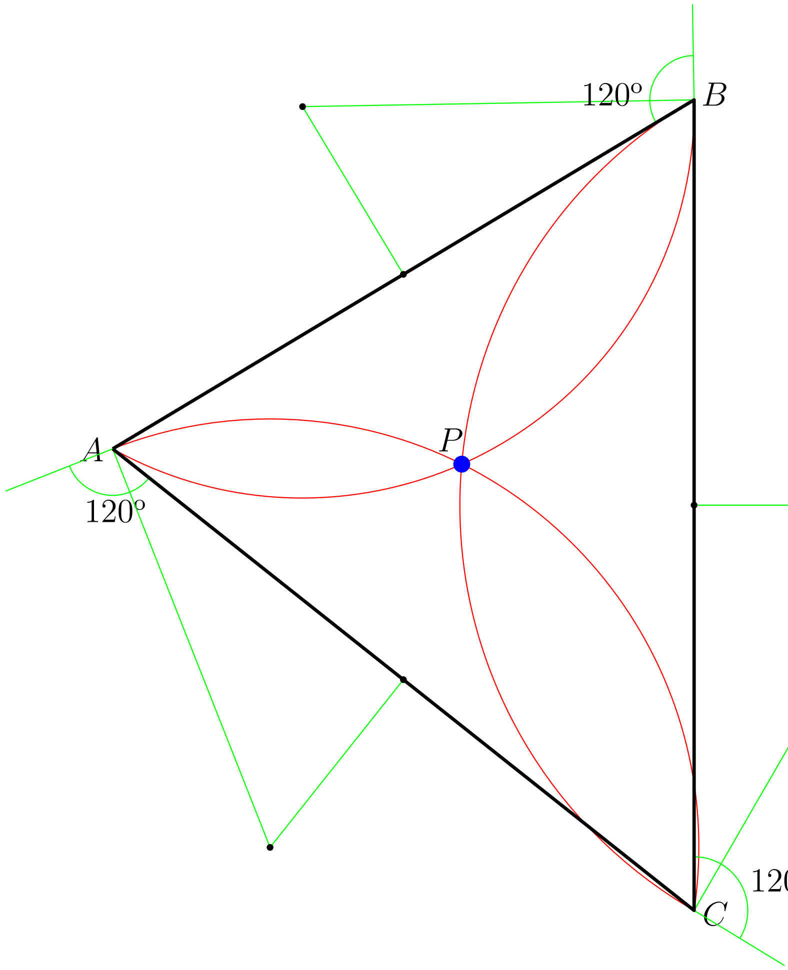


IME 1969/1970, Questão 1, Item 3: Solução II [6].

Construção II [6]: (i) Reflita um ponto S_1 qualquer pelos pontos M, N, P, Q e R dados, gerando os pontos S_2, S_3, S_4, S_5 e S_6, em seqüência; (ii) Determine o vértice A, ponto médio de S_1S_6; (iii) Reflita o ponto A pelos pontos M, N, P, Q e R dados, gerando os demais vértices B, C, D e E do pentágono desejado.

Justificativa II [6]: Os pontos S_2 e B são simétricos de S_1 e A, respectivamente, em relação ao ponto M. Logo, o segmento S_2B é paralelo e de mesmo tamanho que o segmento S_1A. Estendendo o raciocínio, o mesmo pode ser concluído para todos os segmentos S_1A, S_2B, S_3C, S_4D, S_5E e S_6A, de modo que o vértice A é ponto médio de S_1S_6.

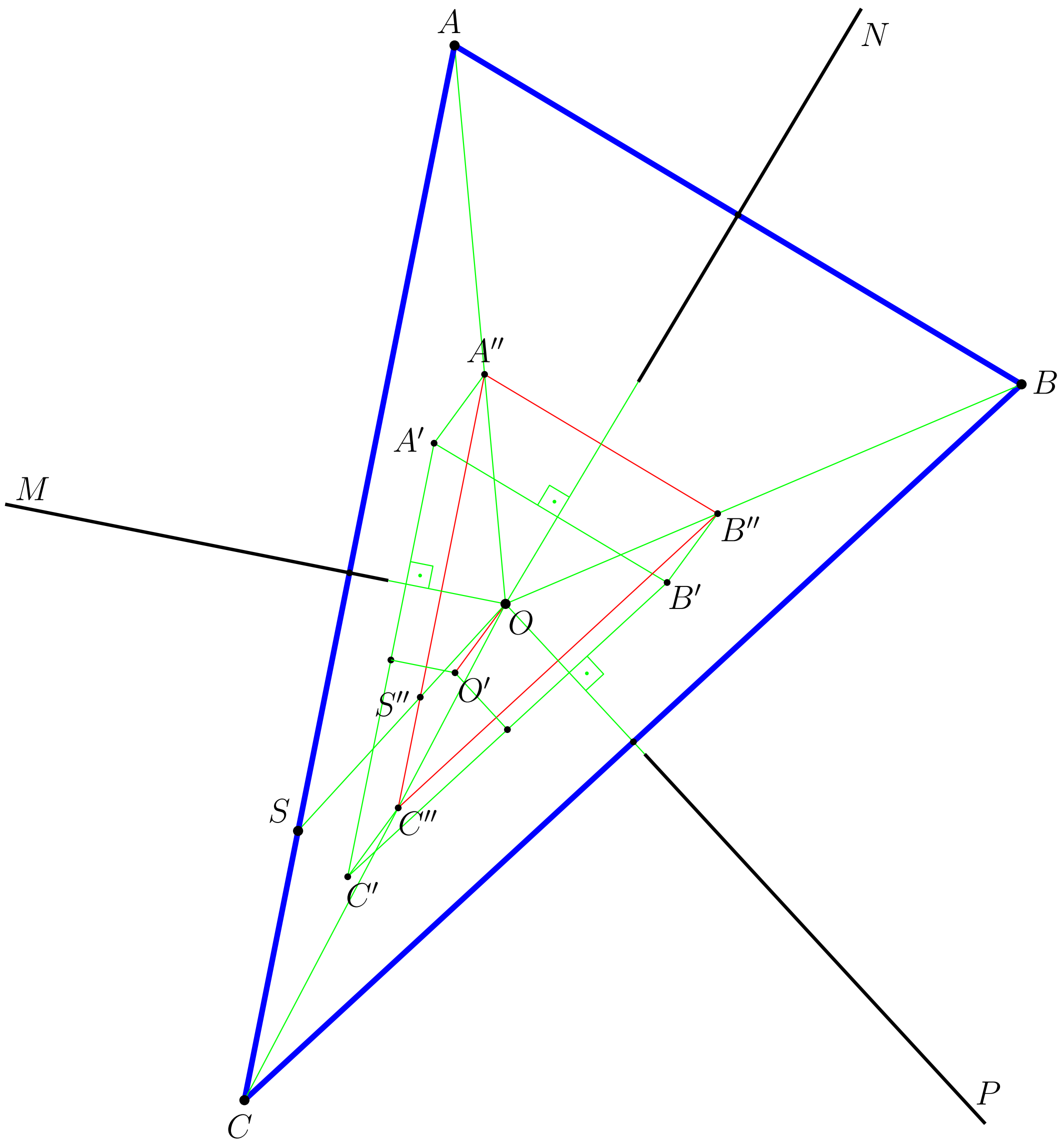
IME 1970/1971, Questão 1, Item 1 [valor 0,5]: Dado o triângulo ABC, ache no seu interior um ponto tal que a soma das distâncias aos três vértices seja mínima.



IME 1970/1971, Questão 1, Item 1: Solução.

Construção: (i) Trace os arcos-capazes do ângulo de 120º relativos a cada lado do triângulo dado, cuja interseção é o ponto P desejado.
Justificativa: Ver [7], pp. 430–434.
sln: Este ponto é chamado de *ponto de Fermat*, que foi quem primeiro teria proposto tal problema. Em [7], porém, este problema é atribuído a Steiner.

IME 1970/1971, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: As retas M, N e P são as mediatrizes de um triângulo. O ponto S está sobre um dos lados. Construa o triângulo.



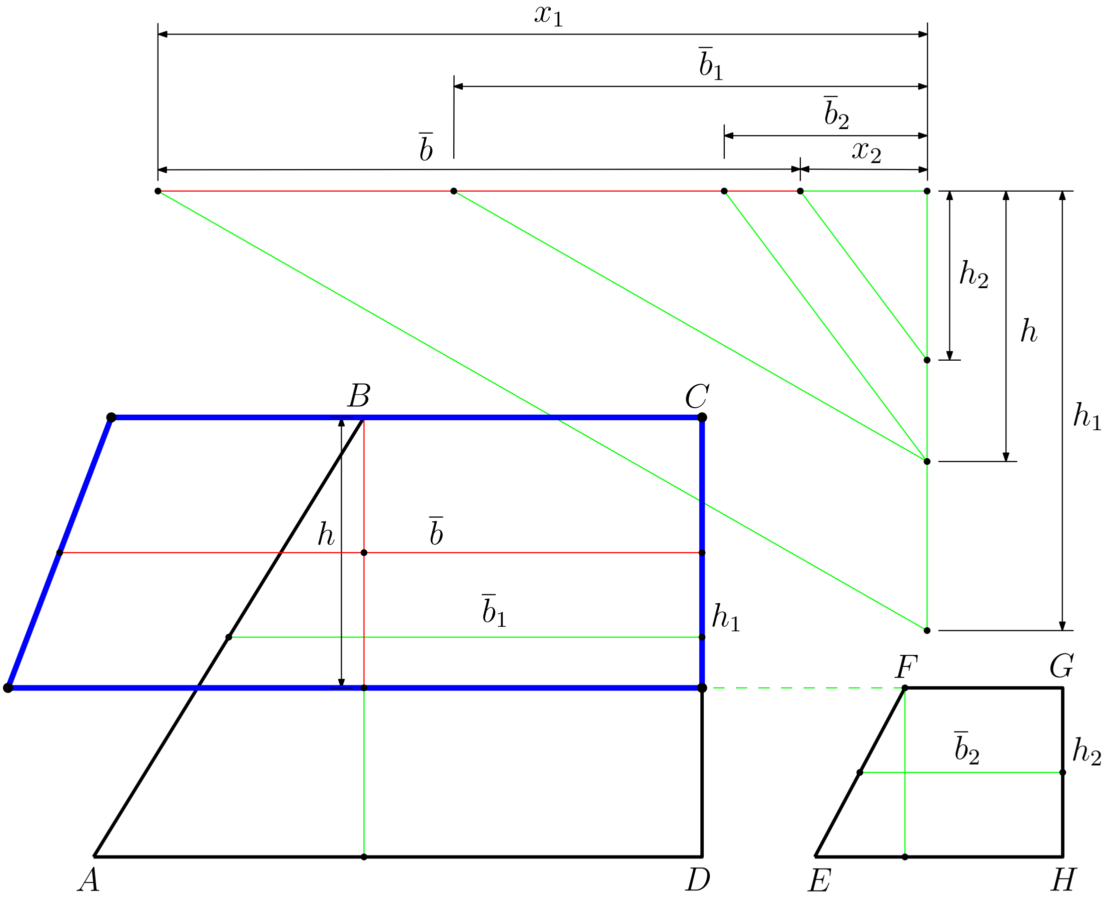
IME 1970/1971, Questão 1, Item 2: Solução.

Construção: (i) Prolongue as mediatrizes M, N e P, cuja interseção é o circuncentro O do triângulo desejado; (ii) Trace uma reta perpendicular qualquer para cada mediatriz dada, cujas interseções duas-a-duas determinam o triângulo auxiliar $\Delta A'B'C'$; (iii) Determine o circuncentro O' do triângulo $\Delta A'B'C'$, ponto de encontro de suas mediatrizes ([2], Exercício 1.3); (iv) Aplique uma translação $O'O$ no triângulo $\Delta A'B'C'$, determinando o triângulo $\Delta A''B''C''$, cujo circuncentro é O; (v) Trace o segmento OS, cuja interseção com o triângulo $\Delta A''B''C''$ é o ponto S''; (vi) Aplique uma homotetia, de centro O e razão $\frac{OS}{OS''}$, no triângulo $\Delta A''B''C''$, determinando o triângulo desejado ΔABC.
Justificativa: Os lados dos triângulos $\Delta A'B'C'$ e ΔABC são ortogonais às respectivas mediatrizes M, N e P dadas. Assim, os triângulos $\Delta A''B''C''$ (obtido pela translação $O'O$ do triângulo $\Delta A'B'C'$) e ΔABC possuem os mesmos ângulos internos, os respectivos lados paralelos e o mesmo circuncentro O. Logo, o triângulo ΔABC pode ser obtido por uma transformação de homotetia, de centro O, do triângulo $\Delta A''B''C''$. A razão de homotetia é determinada para que o ponto S pertença ao triângulo ΔABC desejado.

IME 1970/1971, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: Construa um trapézio retângulo que satisfaça as seguintes condições:

(i) Altura igual à diferença das alturas dos trapézios $ABCD$ e $EFGH$.

(ii) Área igual à diferença das áreas dos trapézios $ABCD$ e $EFGH$.



IME 1970/1971, Questão 1, Item 3: Solução.

Construção: (i) Determine a quarta proporcional $h : \overline{b}_1 = h_1 : x_1$; (ii) Determine a quarta proporcional $h : \overline{b}_2 = h_2 : x_2$; (iii) Trace um trapézio de altura $h = (h_1 - h_2)$ e base média $\overline{b} = (x_1 - x_2)$.

Justificativa: Pela relação das áreas, tem-se

$$\frac{h\overline{b}}{2} = \frac{h_1\overline{b}_1}{2} - \frac{h_2\overline{b}_2}{2} \Rightarrow \overline{b} = \frac{h_1\overline{b}_1 - h_2\overline{b}_2}{h_1 - h_2}$$

sln: Existem infinitas soluções que satisfazem as condições do problema.

IME 1971/1972, Questão 6 [valor 1,0]: Um feixe de círculos F é dado por: um círculo de centro O, com dois centímetros de raio; eixo radical e, distante quatro centímetros de O e comum a todos os círculos de F. Pedem-se:

(a) Construir o menor círculo que seja ortogonal a todos os círculos de F.

(b) Construir um círculo de F tangente a uma reta r perpendicular ao eixo radical e e distante seis centímetros de O.

Construção (item (a)): (i) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(P, 2\sqrt{3})$, onde P é a interseção do eixo radical e com a reta t suporte dos centros dos círculos de F;

Justificativa (item (a)): Os centros dos círculos do feixe F estão todos sobre a reta t passando pelo ponto O e ortogonal ao eixo radical e. Seja P a interseção do eixo radical e com esta reta t. O eixo radical é o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais aos círculos do feixe F.

Seja um círculo C_1, de raio r_1 e centro O_1 sobre e, ortogonal aos círculos do feixe F, inclusive ao círculo de centro O e raio de 2 cm. Assim,

$$\begin{cases} O_1O^2 = r_1^2 + 2^2 \\ O_1O^2 = O_1P^2 + OP^2 \end{cases} \Rightarrow r_1^2 = O_1P^2 + 4^2 - 2^2 = O_1P^2 + 12$$

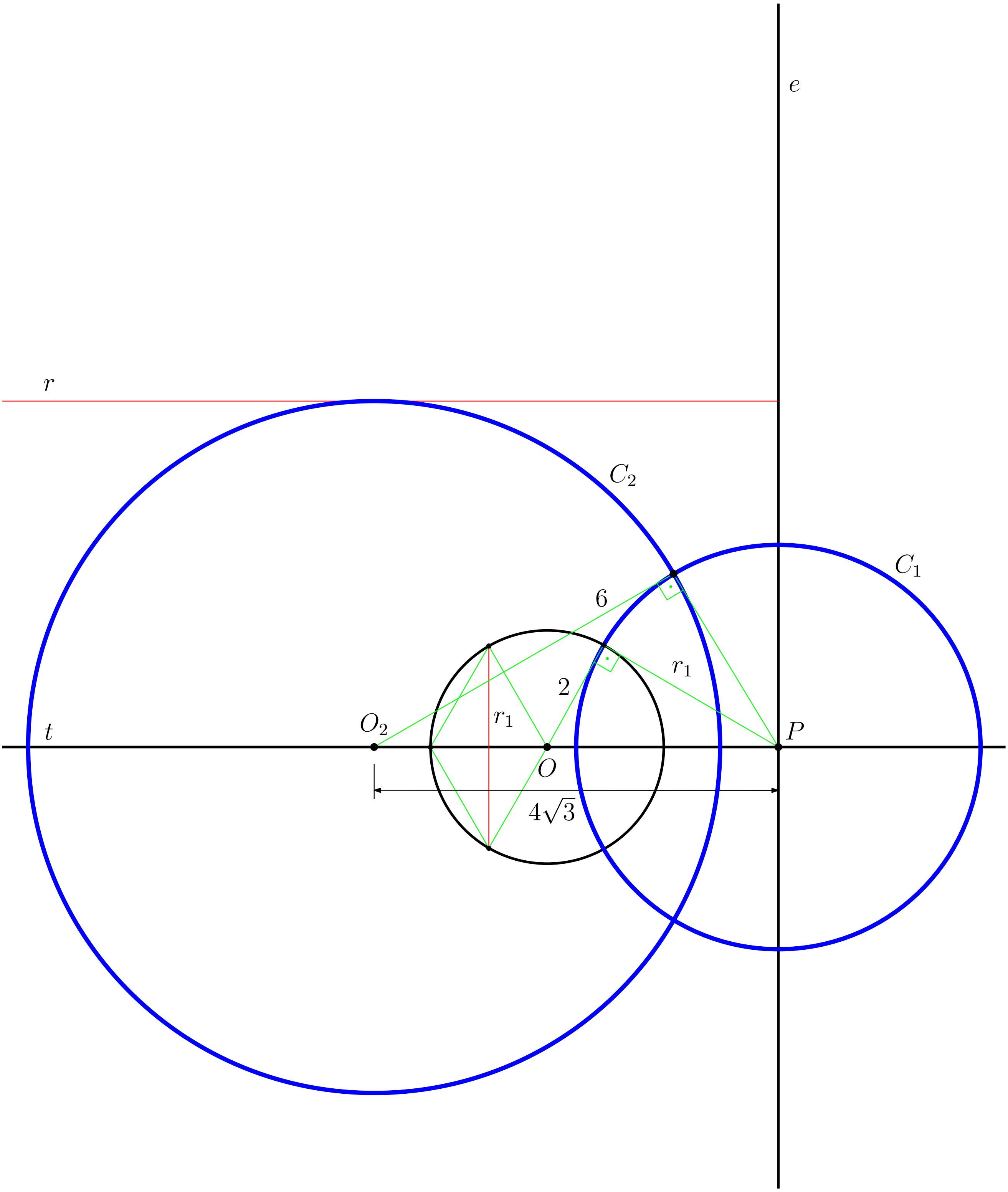
Logo, o círculo C_1 de raio mínimo é tal que $O_1 \equiv P$ e $r_1 = 2\sqrt{3}$.

Construção (item (b)): (i) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(O_2, r_2)$, onde $r_2 = 6$ cm e O_2 pertence a t e é tal que $O_2P = 4\sqrt{3}$

Justificativa (item (b)): O círculo desejado deve ter raio $r_2 = 6$ cm e deve ser ortogonal ao círculo C_1 determinado no item anterior. Logo,

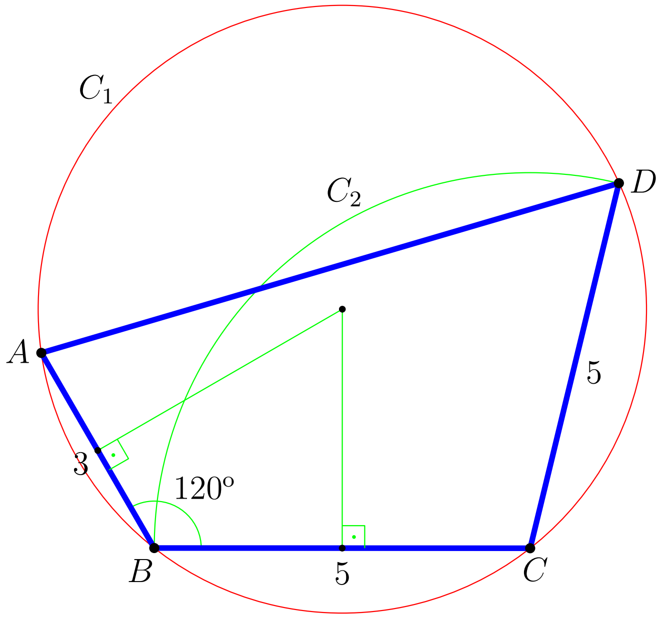
$$O_2P^2 = r_2^2 + r_1^2 = 48 \Rightarrow O_2P = 4\sqrt{3}$$

sln: O enunciado é dúbio, não deixando claro quem está a seis centímetros de O: a reta r ou o círculo desejado. Pela problema, conclui-se que deve ser a reta r.



IME 1971/1972, Questão 6: Solução.

IME 1971/1972, Questão 7 [valor 1,0]: Construir um quadrilátero inscritível convexo cujos lados medem $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 5$ cm e $DA = 8$ cm.



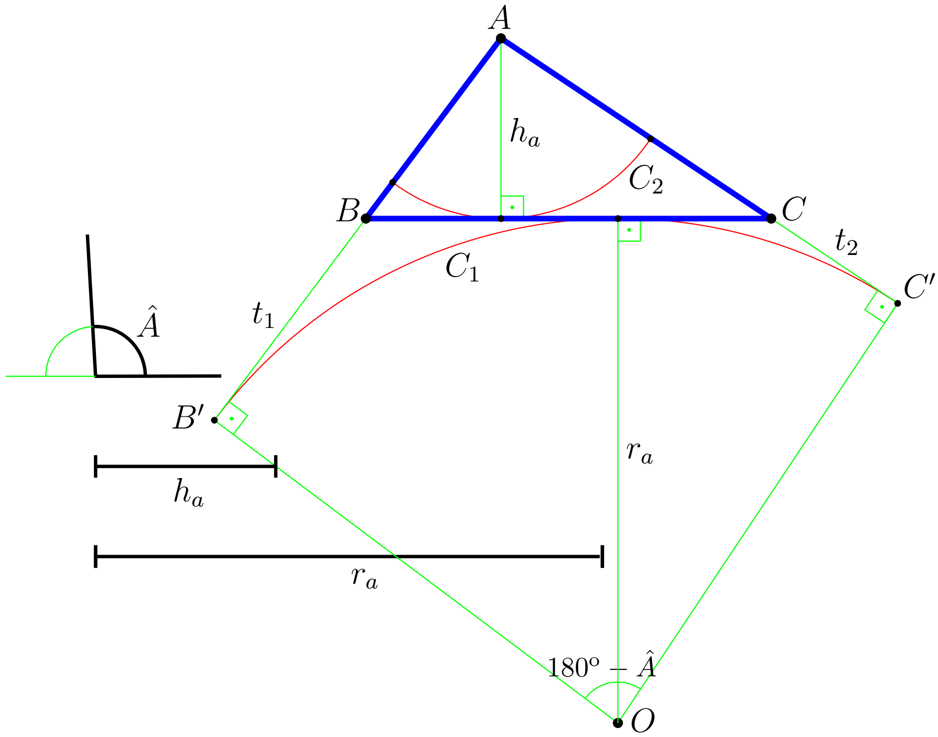
IME 1971/1972, Questão 7: Solução.

Construção: (i) Trace o ângulo $\hat{B} = 120^o$ e marque $AB = 3$ cm e $BC = 5$ cm sobre seus lados; (ii) Determine o círculo C_1 circunscrito ao triângulo ΔABC ([2], Exercício 1.3); (iii) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(C, CB)$, cuja interseção com C_1 (distinta do vértice B) é o vértice D.
Justificativa: Da Lei dos Cossenos, a diagonal AC é tal que

$$\begin{cases} AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos\hat{B} = 9 + 25 - 30\cos\hat{B} \\ AC^2 = DA^2 + CD^2 - 2DA.CD\cos(180^o - \hat{B}) = 64 + 25 + 80\cos\hat{B} \end{cases}$$

Logo, $\cos\hat{B} = -\frac{1}{2}$ e então $\hat{B} = 120^o$.

IME 1982/1983, Questão 4, Item (a) [valor 0,8]: Em um triângulo ABC dão-se o ângulo $\hat{A}$, o raio do círculo ex-inscrito r_a (relativo ao ângulo $\hat{A}$) e a altura h_a (relativa ao lado a). Indique a construção do triângulo ABC e conclua daí a condição que deve haver entre os elementos dados para que a construção seja possível, isto é, para que exista o triângulo ABC, escaleno.



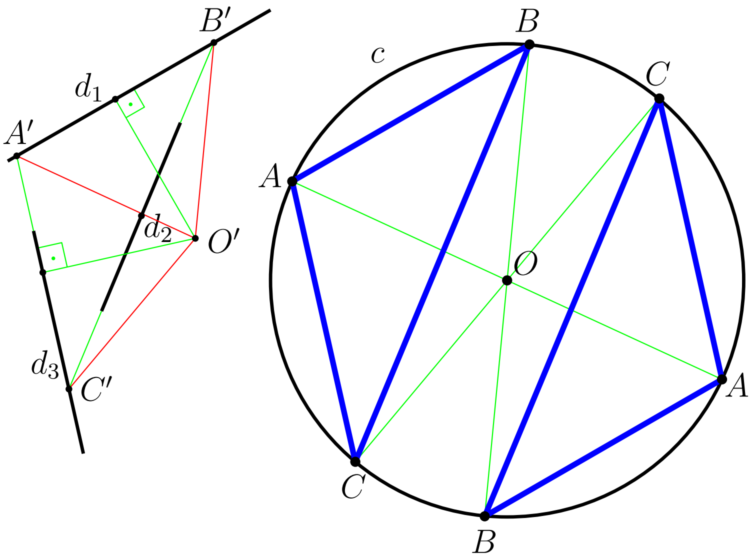
IME 1982/1983, Questão 4, Item (a): Solução.

Construção: (i) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(O, r_a)$, e marque o ângulo central $B'\hat{O}C' = (180^o - \hat{A})$, com B' e C' sobre C_1; (ii) Trace por B' e C', respectivamente, as tangentes t_1 e t_2 a C_1, cuja interseção determina o vértice A; (iii) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(A, h_a)$; (iv) Trace uma tangente interna comum a C_1 e C_2 (ver [2], Exercício 1.11), cujas interseções com as tangentes t_1 e t_2 são os vértices B e C, respectivamente.

Justificativa: Da construção acima, $B'\hat{A}C' = \hat{A}$ e $h_a \parallel r_a$. Para haver solução escalena, deve existir a tangente comum interna a C_1 e C_2. Assim, do triângulo $\Delta AB'O$, tem-se que

$$\begin{cases} \text{sen } \frac{\hat{A}}{2} = \frac{r_a}{AO} \\ AO > r_a + h_a \end{cases} \Rightarrow r_a > \frac{h_a \text{ sen } \frac{\hat{A}}{2}}{1 - \text{ sen } \frac{\hat{A}}{2}}$$

IME 1983/1984, Questão 5 [valor 0,6]: Dão-se um círculo c, de centro O, e três direções d_1, d_2 e d_3. Inscreva em c os triângulos cujos lados AB, BC e CA têm, respectivamente, as direções d_1, d_2 e d_3 e cujos vértices A, B e C se sucedem no círculo c, no sentido do movimento dos ponteiros do relógio.



IME 1983/1984, Questão 5: Solução.

Construção: (i) Prolongue d_1, d_2 e d_3, determinando o triângulo auxiliar $\Delta A'B'C'$, com $A'B'$ sobre d_1, $B'C'$ sobre d_2 e $A'C'$ sobre d_3; (ii) Determine o circuncentro O' (encontro das mediatrizes) do triângulo $\Delta A'B'C'$ (ver [2], Exercício 1.3); (iii) Trace retas paralelas a $O'A'$, $O'B'$ e $O'C'$ por O, cujas respectivas interseções com o círculo c dado determinam os triângulos ΔABC desejados.

Justificativa: Por paralelismo, $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$, $B\hat{O}C = B'\hat{O}'C'$ e $C\hat{O}A = C'\hat{O}'A'$. Logo, uma relação similar se aplica aos ângulos inscritos nos respectivos círculos circunscritos aos triângulos, isto é, $A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$, $B\hat{C}A = B'\hat{C}'A'$ e $C\hat{A}B = C'\hat{A}'B'$. Assim, os lados dos triângulos ΔABC são paralelos aos lados do triângulo $\Delta A'B'C'$, como desejado.

IME 1984/1985, Questão 2, Item (a) [valor 0,5]: Em um triângulo ABC são dados o lado a, a soma dos outros dois lados, $b+c=\ell$, e a área S. Construa o triângulo com régua e compasso.

Construção: (i) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa ℓ e cateto a, determinando o outro cateto $x_1 = \sqrt{\ell^2 - a^2}$; (ii) Determine a terceira proporcional x_2 de $2\sqrt{S}$ e x_1; (iii) Trace o triângulo retângulo de cateto adjacente $x_2 = \frac{x_1^2}{2\sqrt{S}}$ e cateto oposto $2\sqrt{S}$, determinando o ângulo $\frac{\hat{A}}{2}$; (iv) Trace o arco-capaz C_1 do ângulo $\frac{\hat{A}}{2}$ relativo à corda $BC = a$; (v) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(C, \ell)$, cuja interseção com C_1 determina o ponto auxiliar B'; (vi) Trace a mediatriz de BB', cuja interseção com CB' é o vértice A.
Justificativa: Como

$$S = \frac{bc}{2} \operatorname{sen} \hat{A} \Rightarrow bc = \frac{2S}{\operatorname{sen} \hat{A}}$$

Além disto, da Lei dos Cossenos,

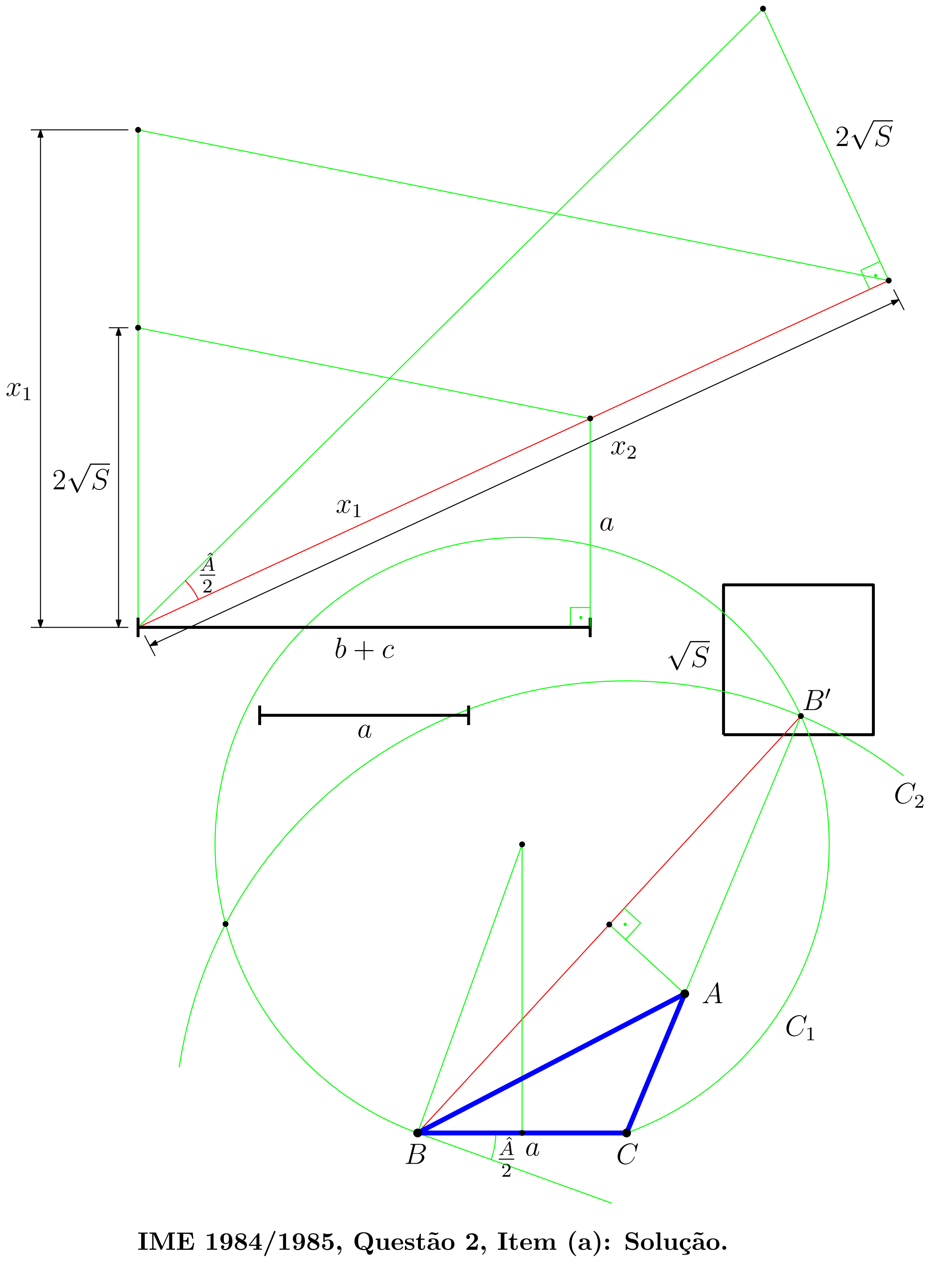
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} = (b+c)^2 - 2bc(1+\cos\hat{A}) = \ell^2 - \frac{(1+\cos\hat{A})}{\operatorname{sen}\hat{A}} 4S$$

de forma que

$$\frac{\ell^2 - a^2}{4S} = \frac{1+\cos\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{\sqrt{(1+\cos\hat{A})^2}}{\sqrt{(1-\cos^2\hat{A})}} = \frac{\sqrt{1+\cos\hat{A}}}{\sqrt{1-\cos\hat{A}}} = \frac{\sqrt{2\cos^2\frac{\hat{A}}{2}}}{\sqrt{2\operatorname{sen}^2\frac{\hat{A}}{2}}} = \operatorname{cotg}\frac{\hat{A}}{2}$$

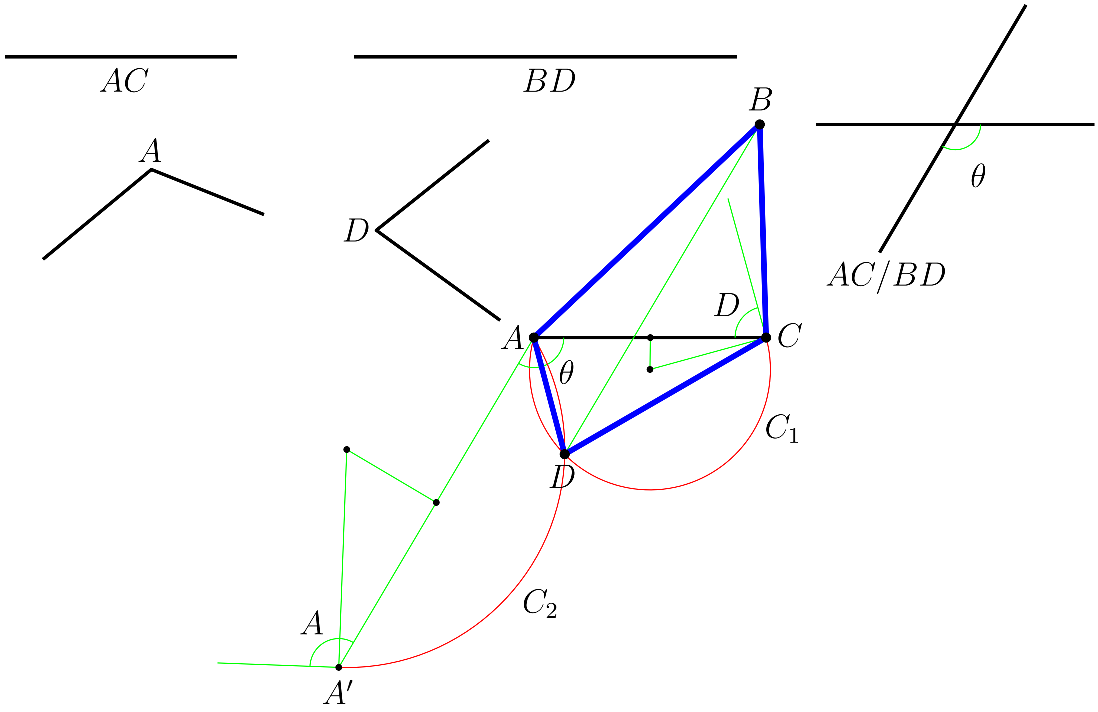
o que permite determinar o ângulo $\hat{A}$. Desta forma, o problema se transforma no Exercício 1.24 de [2], onde são conhecidos a, $(b+c)$ e $\hat{A}$.
sln: Um outro desenvolvimento algébrico, bem mais elaborado, é mostrado para este problema em [3], onde se conclui que

$$\operatorname{sen} A = \frac{8S(\ell^2 - a^2)}{(\ell^2 - a^2)^2 + 16S^2}$$



IME 1984/1985, Questão 2, Item (a): Solução.

IME 1984/1985, Questão 8, Item (a) [valor 0,5]: Construa um quadrilátero convexo $ABCD$, dados: os comprimentos das diagonais AC e BD; o ângulo de AC com BD; os ângulos adjacentes A e D.



IME 1984/1985, Questão 8, Item (a).

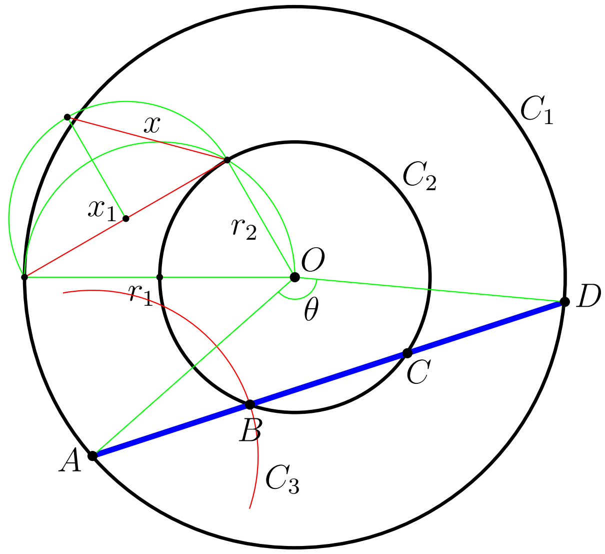
Construção: (i) Trace AC e marque A' tal que $AA' = BD$ e $A'\hat{A}C = \theta$; (ii) Trace o arco-capaz C_1 do ângulo D relativo à corda AC; (iii) Trace o arco-capaz C_2 do ângulo A relativo à corda $AA' = BD$, cuja interseção com C_1 é o vértice D; (iv) Trace por D uma reta fazendo um ângulo θ com AC e marque DB, determinando o vértice B.

Justificativa: No quadrilátero $ABCD$, o vértice D pertence ao arco-capaz do ângulo D relativo à corda AC. Além disto, da construção acima, $AA' = BD$ e $AA' \parallel BD$, de forma que o quadrilátero $ABDA'$ é um paralelogramo. Assim, $A\hat{D}A'$ e $B\hat{A}D$ são ângulos alternos internos à reta AD interceptando as paralelas AB e $A'D$. Logo, o ponto D está também sobre o arco-capaz do ângulo $A\hat{D}A' = B\hat{A}D = A$ relativo à corda AA'.

sln: A chave para a solução deste problema é dada em [1] e utilizada em [2], Exercícios 5.21 e 5.22.

sln: Uma construção para este problema, por incrível que pareça, baseada em um desenvolvimento fundamentalmente algébrico, pode ser encontrada em [3].

IME 1984/1985, Questão 8, Item (b) [valor 0,5]: São dados dois círculos concêntricos, C_1 e C_2, de raios r_1 e r_2 ($r_1 > r_2$) e centro O. Por um ponto A de C_1 determine uma corda AD de C_1, que corta C_2 em B e C, tal que $AD = 3BC$. Discuta a possibilidade e o número de soluções.



IME 1984/1985, Questão 8, Item (b).

Construção: (i) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa r_1 e cateto r_2, determinando o outro cateto x_1; (ii) Determine a grandeza $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1$ e trace $C_3 \equiv \mathcal{C}(A, x)$, cuja interseção com C_2 determina o ponto B; (iii) Prolongue AB, cujas interseções com C_2 e C_1 são, respectivamente os pontos C e D.

Justificativa: Como $AD = (AB+BC+BD) = (2AB+BC)$ e, pelo enunciado, $AD = 3BC$, então é desejado que $AB = BC = CD = x$. Desta forma, a potência do ponto C relativa a C_1 é tal que

$$\text{Pot}\, C = -x \times 2x = -(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \Rightarrow 2x^2 = r_1^2 - r_2^2$$

Do triângulo ΔAOD,

$$(3x)^2 = r_1^2 + r_1^2 - 2r_1^2 \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{2r_1^2 - 9x^2}{2r_1^2} = \frac{9r_2^2 - 5r_1^2}{4r_1^2}$$

Assim, para haver solução,

$$-1 \leq \cos\theta < 1 \Rightarrow r_2 < r_1 \leq 3r_2$$

Em geral há duas soluções, determinadas pelas interseções de C_3 e C_2. O caso $r_1 = 3r_2$ gera apenas uma solução, diâmetro de C_1 por A.

Referências

[1] E. Wagner (com J. P. Q. Carneiro), *Construções Geométricas*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 5ª ed., 2000.

[2] S. L. Netto, *Problemas Selecionados de Desenho Geométrico - Parte I*, www.lps.ufrj.br/profs/sergioln/geometria.html, versão 3, Outubro 2007.

[3] S. L. Netto, *A Matemática no Vestibular do IME*, www.lps.ufrj.br/˜sergioln/ime/index.html, versão 12, Junho 2007.

[4] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Random House, New York, 1967.

[5] A. C. Morgado, E. Wagner e M. Jorge, *Geometria II*, Francisco Alves Ed., Rio de Janeiro, 1974.

[6] I. M. Yaglom, *Geometric Transformations I*, Mathematical Association of America, 1962.

[7] R. Courant e H. Robbins, *O Que É Matemática?*, Ciência Moderna Ed., Rio de Janeiro, 2000.

[8] R. C. Barbosa, *Desenho Geométrico Plano*, Nossa Editora, Rio de Janeiro, 1977.