Desenho II

Claudio da Costa Pereira Brandão

Versão: Junho/Julho de 2011

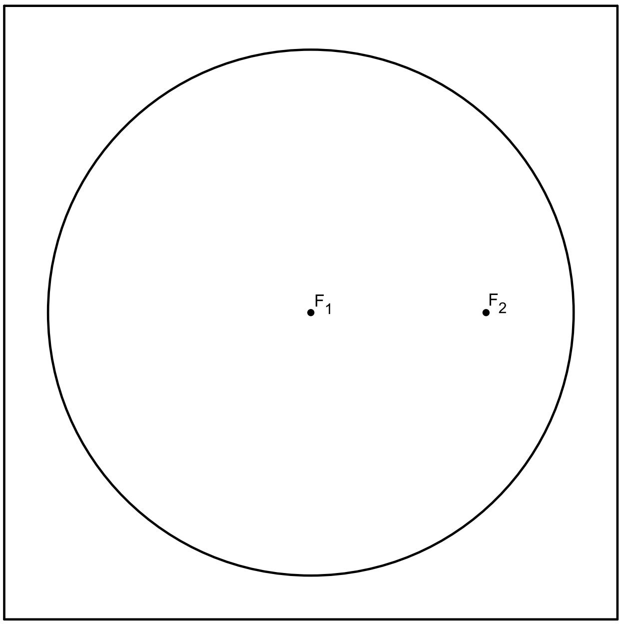
Capítulo 1

Elipse

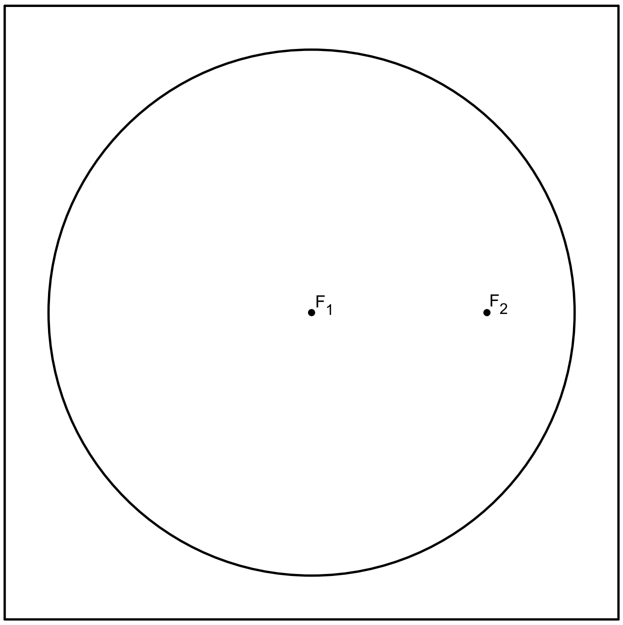
1.1 Exemplos

Exemplo E.1: Determine os pontos da elipse, dados os focos F_1 **e** F_2 **e o círculo diretor** $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.

E.2: Determine os eixos maior A_1A_2 **e menor** B_1B_2 **da elipse, dados os focos** F_1 **e** F_2 **e o círculo diretor** $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.



Exemplo E.1



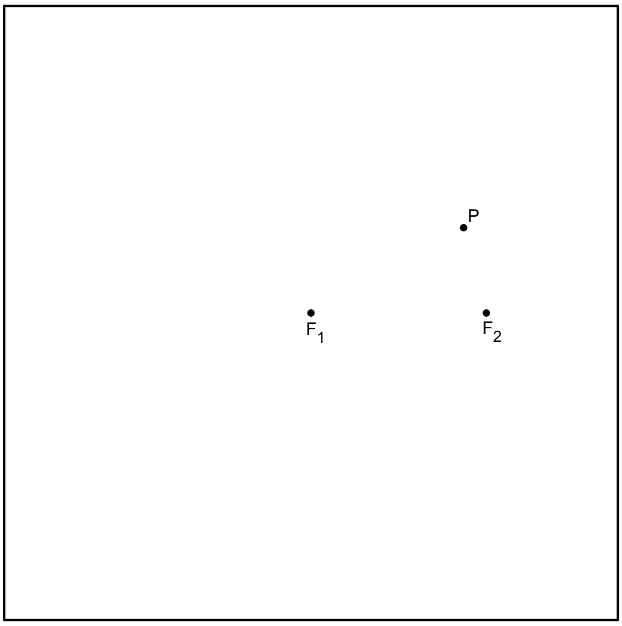
Exemplo E.2

Exemplo E.3: Determine os eixos maior A_1A_2 **e menor** B_1B_2 **da elipse, dados os focos** F_1 **e** F_2 **e o ponto** P **da curva.**

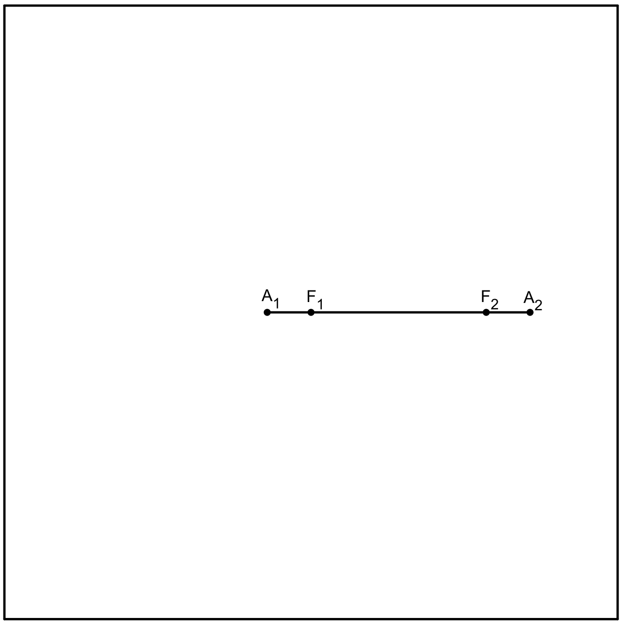
Exemplo E.4: Determine os pontos da elipse, dados os focos F_1 **e** F_2 **e o eixo maior** A_1A_2.

Exemplo E.5: Determine o eixo maior A_1A_2 **e os focos** F_1 **e** F_2 **da elipse, dados o eixo menor** B_1B_2 **e a excentricidade** $e = \frac{3}{5}$.

Exemplo E.6: Determine o parâmetro da elipse, dados os eixos maior A_1A_2 **e menor**

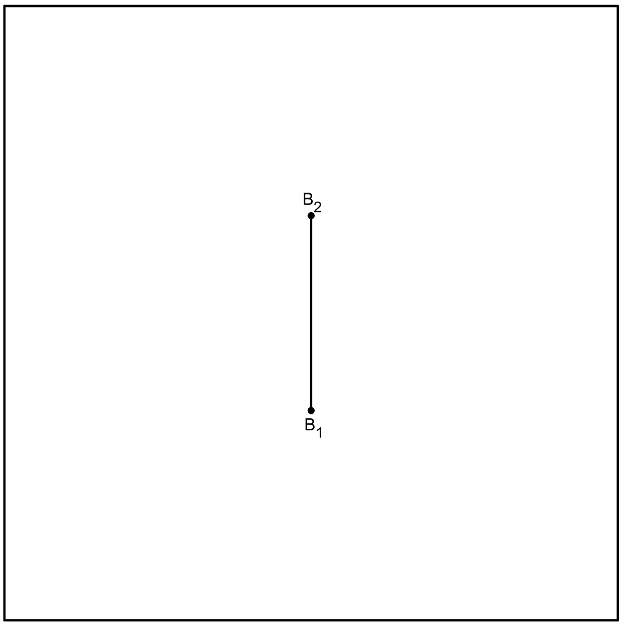


Exemplo E.3

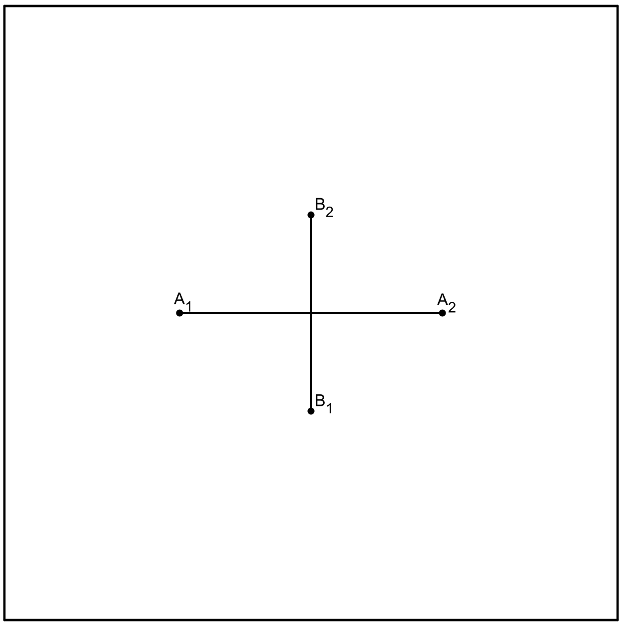


Exemplo E.4

B_1B_2.



Exemplo E.5



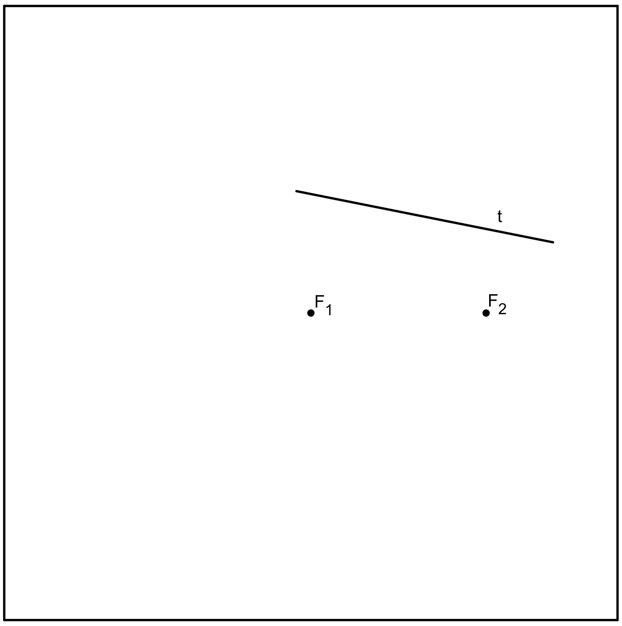
Exemplo E.6

Exemplo E.7: Determine o ponto de tangência P e os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2 da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e a tangente t por P.

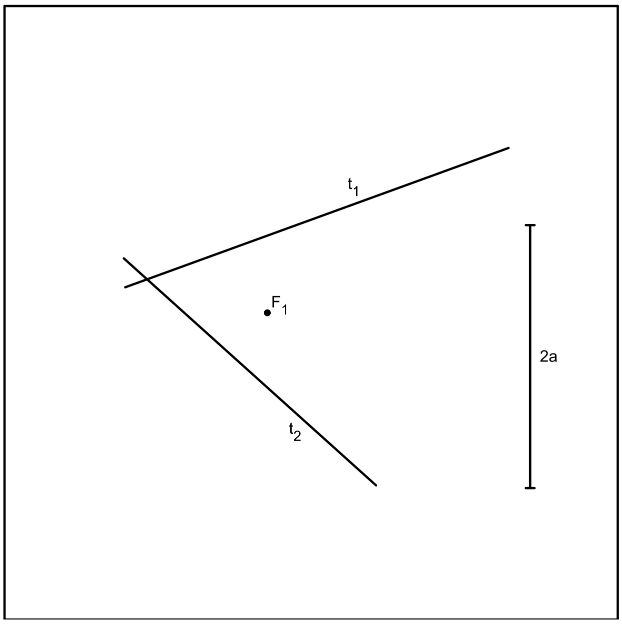
Exemplo E.8: Determine o outro foco F_2 da elipse, dados o foco F_1, as tangentes t_1 e t_2 e o comprimento $2a$ do eixo maior.

Exemplo E.9: Determine o outro foco F_2 da elipse, dados o foco F_1 e as tangentes t_1, t_2 e t_3.

Exemplo E.10: Determine as tangentes t_1 e t_2 da elipse paralelas à reta r, dados os

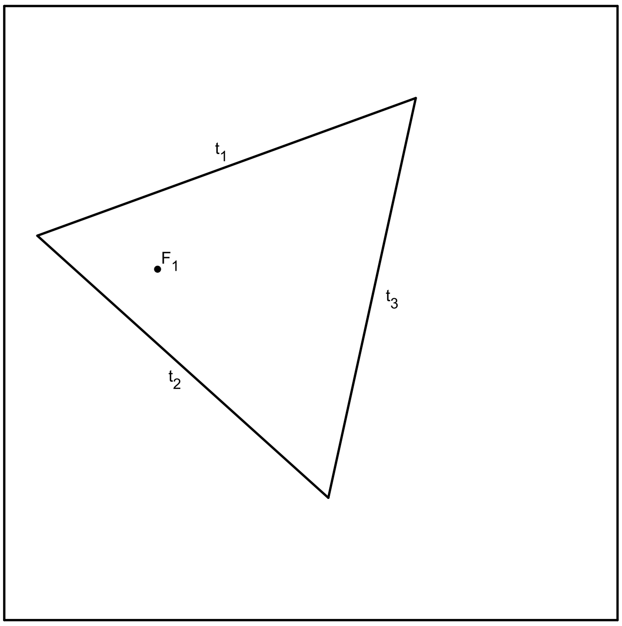


Exemplo E.7

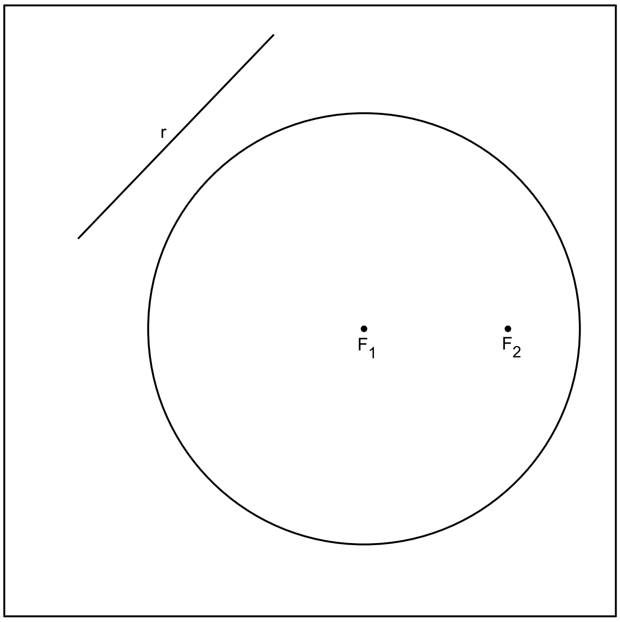


Exemplo E.8

focos F_1 e F_2, o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$ e a reta r.



Exemplo E.9

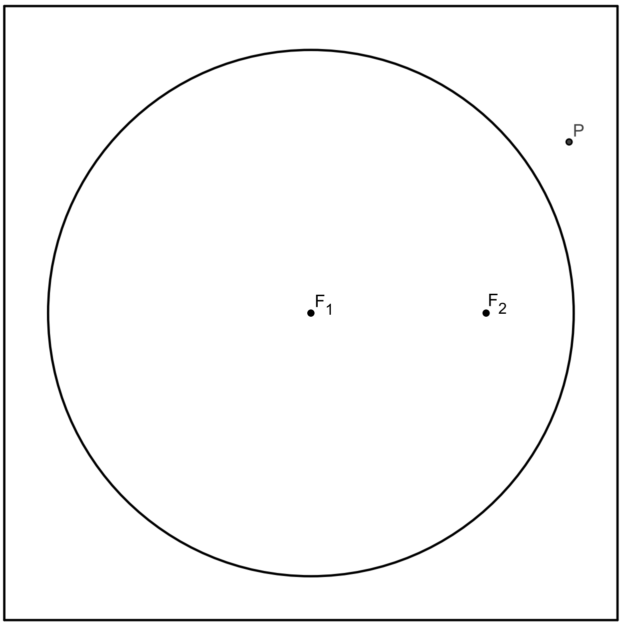


Exemplo E.10

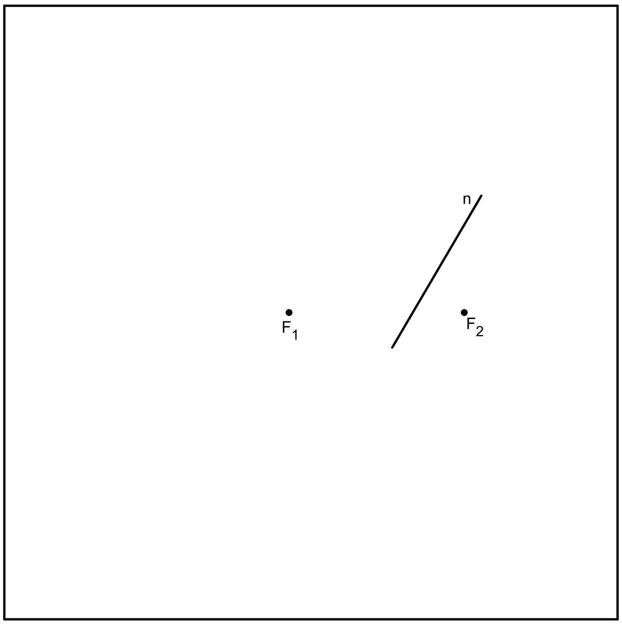
Exemplo E.11: Determine as tangentes t_1 e t_2 da elipse, dados os focos F_1 e F_2, o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$ e o ponto P externo à elipse e pertencente às tangentes t_1 e t_2.

Exemplo E.12: Determine os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2 da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e a normal n.

Exemplo E.13: Determine o lugar geométrico dos focos F_1 e F_2 da elipse, dados o



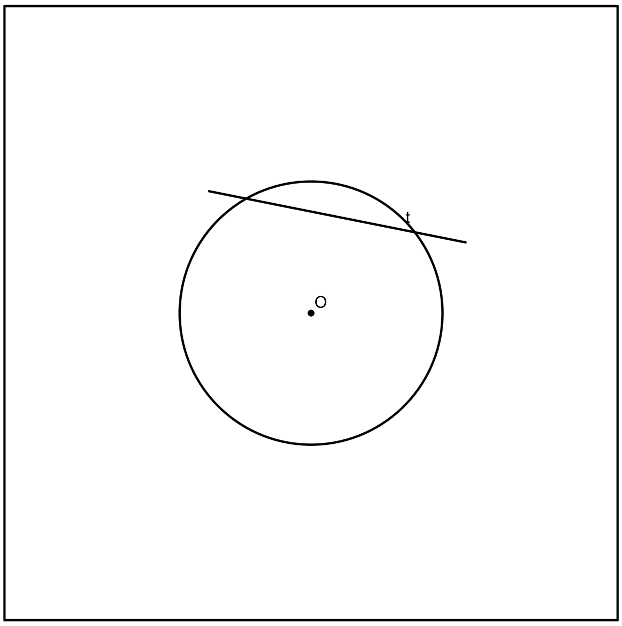
Exemplo E.11



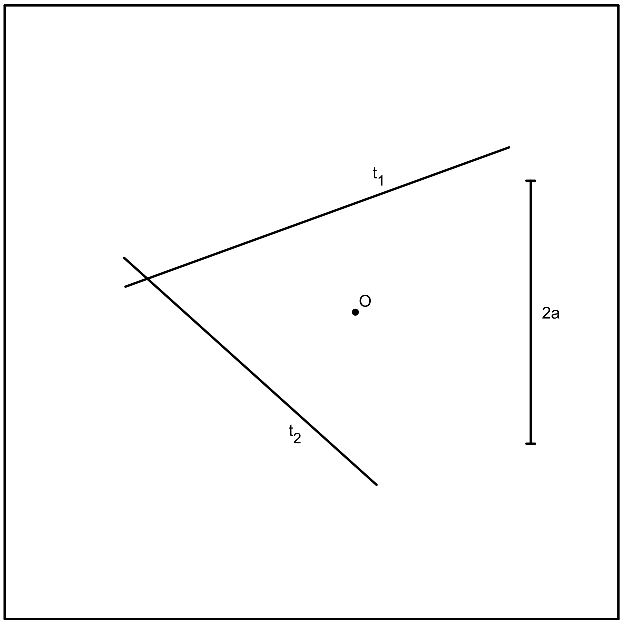
Exemplo E.12

círculo principal maior $C_o \equiv (O, a)$ e a tangente t.

Exemplo E.14: Determine os focos F_1 e F_2 da elipse, dados o centro O, o comprimento $2a$ do eixo maior e as tangentes t_1 e t_2.



Exemplo E.13

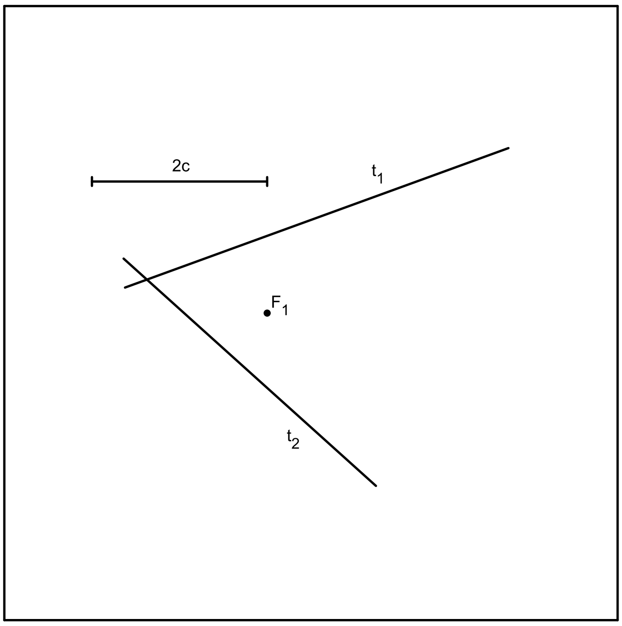


Exemplo E.14

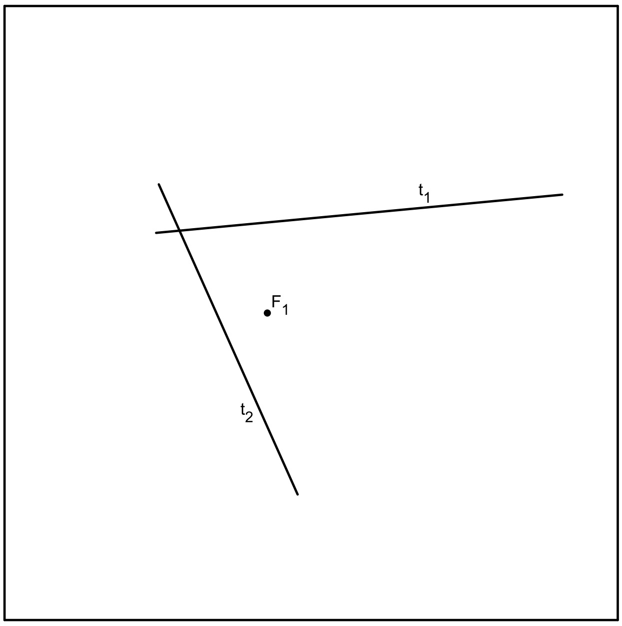
Exemplo E.15: Determine o outro foco F_2 da elipse, dados o foco F_1, as tangentes t_1 e t_2 e a distância focal $2c$.

Exemplo E.16: Determine o lugar geométrico do centro O da elipse, dados o foco F_1 e as tangentes t_1 e t_2.

Exemplo E.17: Determine o outro foco F_2 da elipse, dados o foco F_1, os pontos P_1



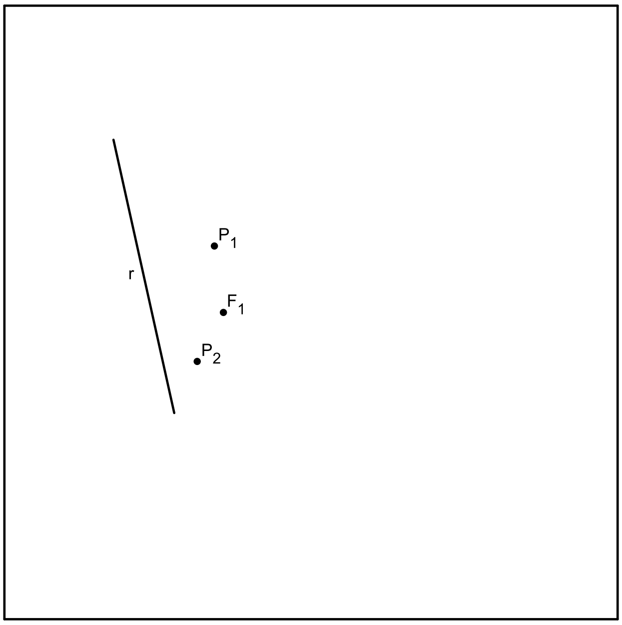
Exemplo E.15



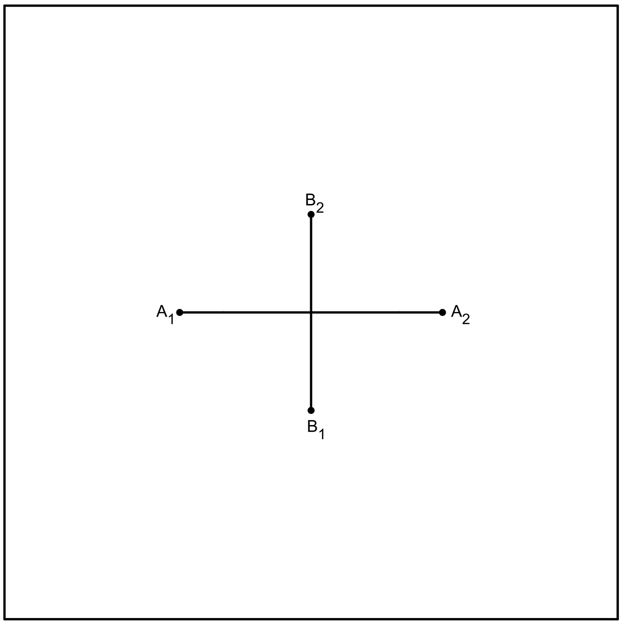
Exemplo E.16

e P_2 de contato das tangentes t_1 e t_2, respectivamente, cuja interseção pertence à reta r também dada.

Exemplo E.18: Determine o círculo ortótico C da elipse, dados os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.



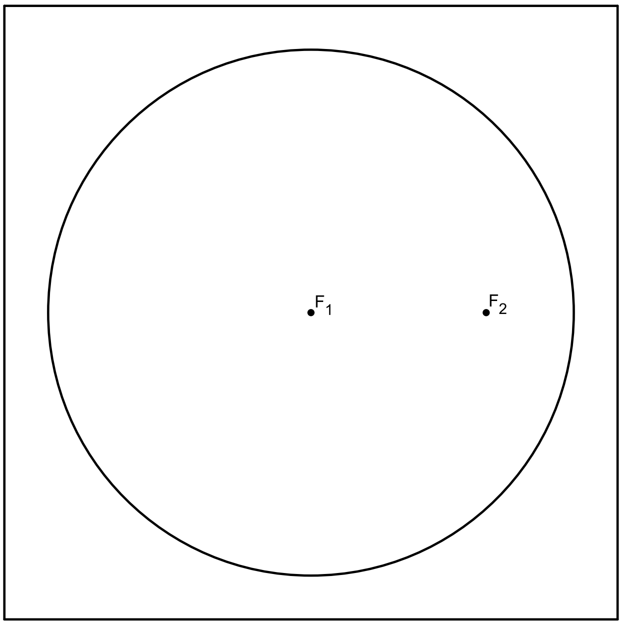
Exemplo E.17



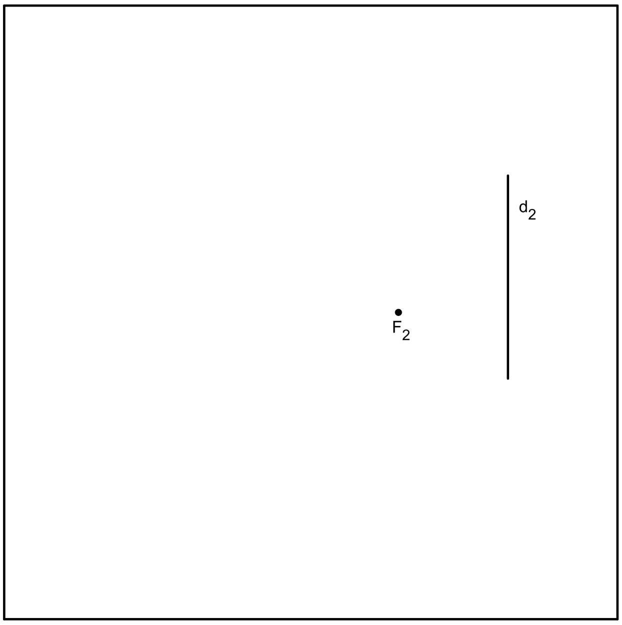
Exemplo E.18

Exemplo E.19: Determine as diretrizes da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.

Exemplo E.20: Determine a elipse cuja razão das distâncias de seus pontos ao ponto F_2 e à reta d_2 é igual a $\frac{2}{3}$.



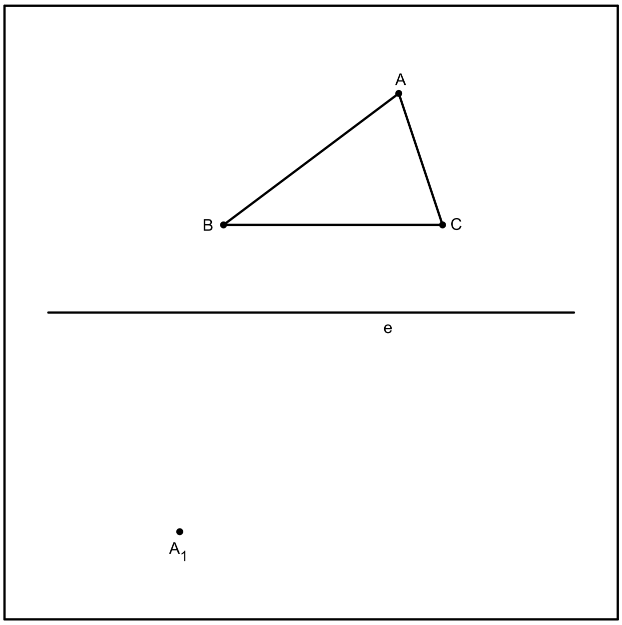
Exemplo E.19



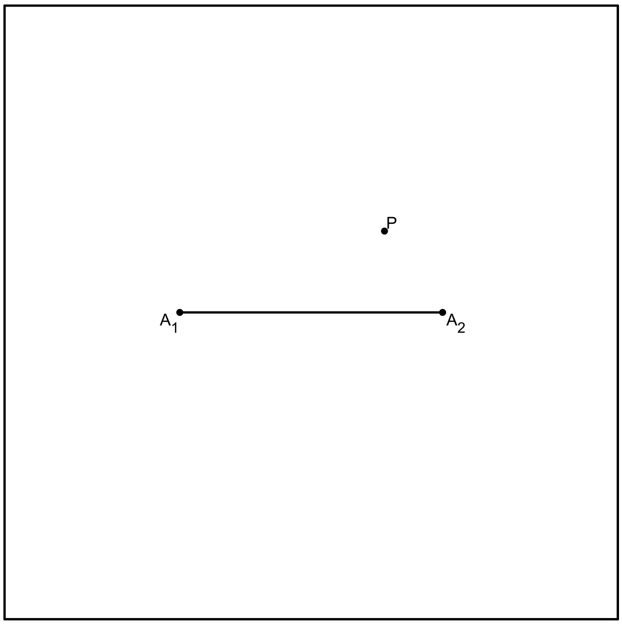
Exemplo E.20

Exemplo E.21b: Determine a transformada afim do triângulo ΔABC, dado que o ponto A_1 é a transformada do vértice A.

Exemplo E.22: Determine a tangente t e o eixo menor B_1B_2 da elipse, dados o ponto P de tangência de t e o eixo maior A_1A_2.



Exemplo E.21b

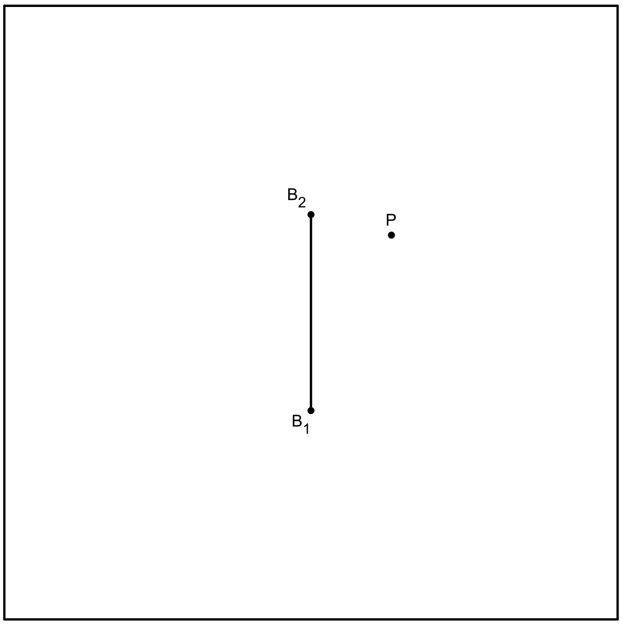


Exemplo E.22

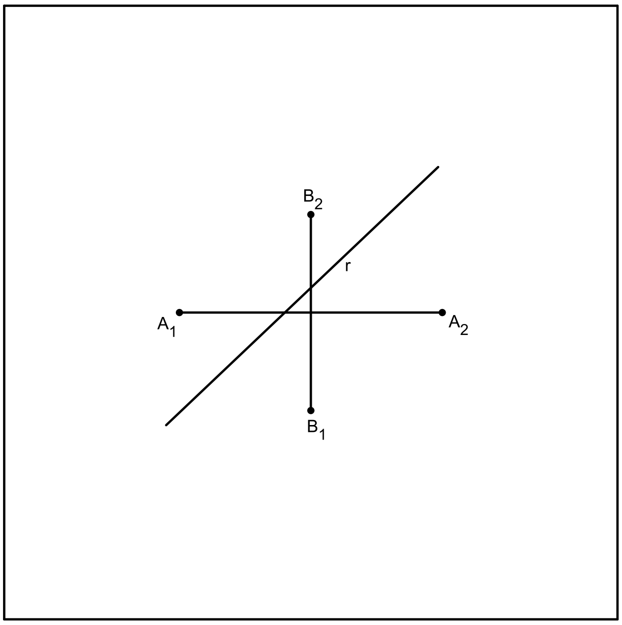
Exemplo E.23: Determine a tangente t e o eixo maior A_1A_2 da elipse, dados o ponto P de tangência de t e o eixo menor B_1B_2.

Exemplo E.24: Determine as interseções da reta r com a elipse definida por seus

eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.



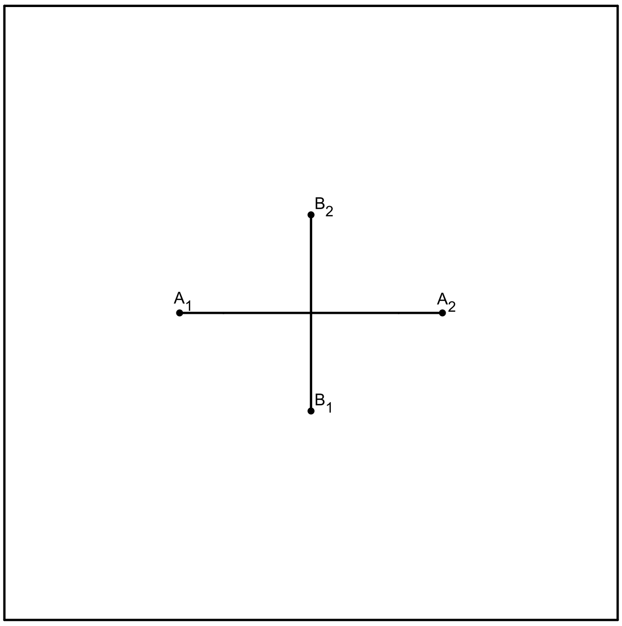
Exemplo E.23



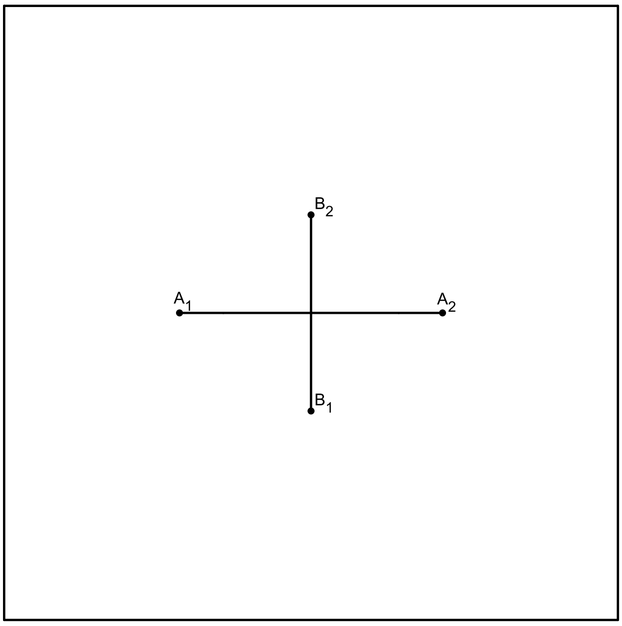
Exemplo E.24

Exemplo E.25: Determine os pontos da elipse, dados os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

Exemplo E.26: Determine dois diâmetros conjugados g_1 e g_2 da elipse, dados os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.



Exemplo E.25

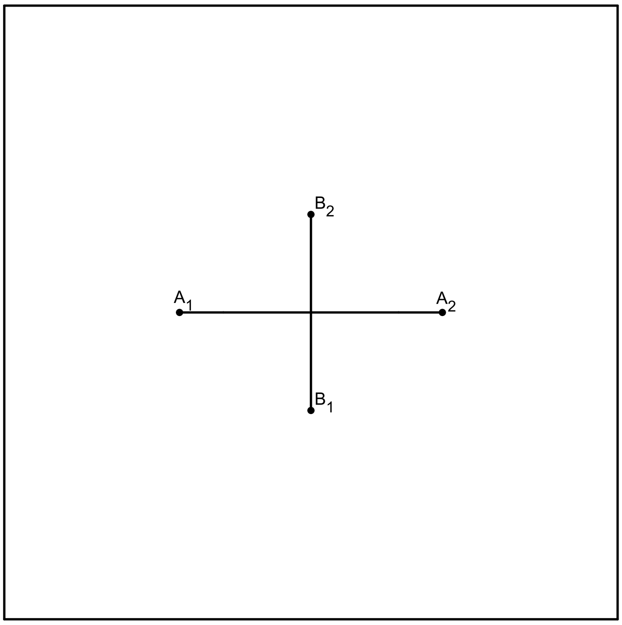


Exemplo E.26

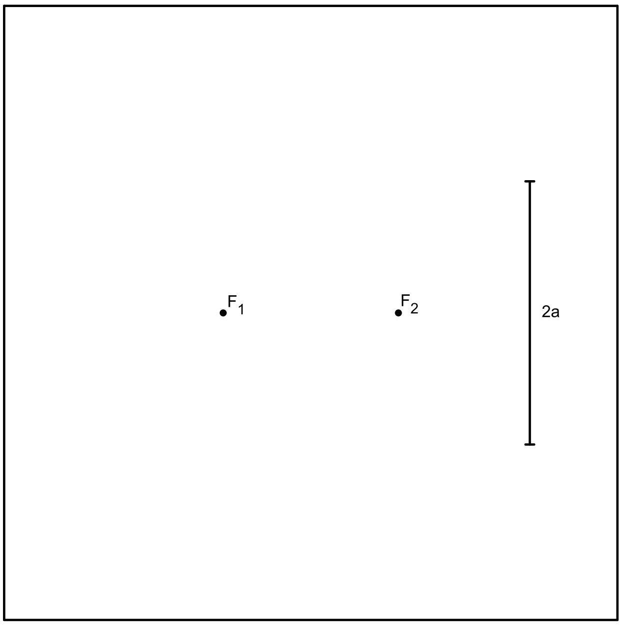
1.2 Exercícios

Exercício E.1: Determine os focos F_1 e F_2 da elipse, dados os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

Exercício E.2: Determine os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2 da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e o comprimento $2a$ do eixo maior A_1A_2.



Exercício E.1



Exercício E.2

Exercício E.3: Determine o eixo menor B_1B_2 da elipse, dados o eixo maior A_1A_2 e a distância focal $2c$.

Exercício E.4: Determine o eixo maior A_1A_2 da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e o comprimento $2b$ do eixo menor B_1B_2.

Exercício E.5: Determine o foco F_1 da elipse, dados o outro foco F_2, o extremo B_2 do eixo menor e o ponto P pertencente à curva.

Exercício E.6: Determine a tangente t e a normal n à elipse, dados o ponto de tangência P e os focos F_1 e F_2.

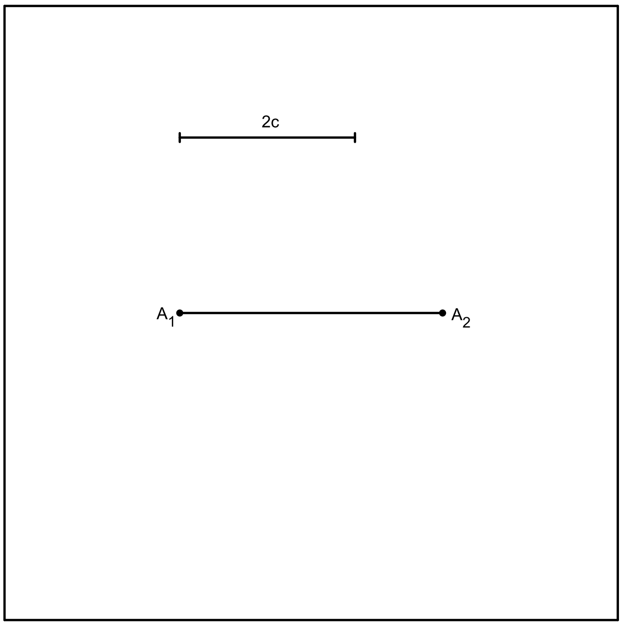
Exercício E.7: Determine o ponto de tangência P e o eixo maior A_1A_2 da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e a tangente t por P.

Exercício E.8: Determine o outro foco F_2 da elipse, dados o foco F_1, a tangente t, o comprimento $2a$ do eixo maior e o ponto P pertencente à curva.

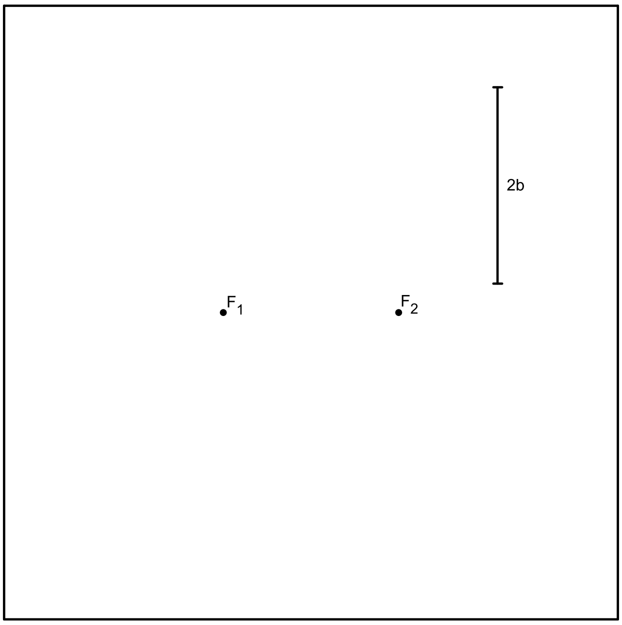
Exercício E.9: Determine o outro foco F_2 e os pontos de tangência P_1, P_2 e P_3 da elipse, dados o foco F_1 e as tangentes t_1, t_2 e t_3.

Exercício E.10: Determine os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2 da elipse, dados o foco F_1, as tangentes t_1 e t_2 e o ponto de tangência P_1 de t_1.

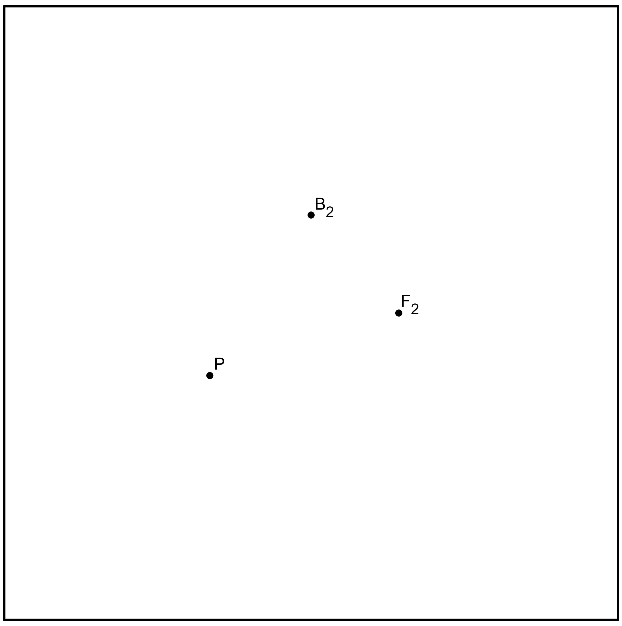
Exercício E.11: Determine os focos F_1 e F_2 e o ponto de tangência P da elipse, dados



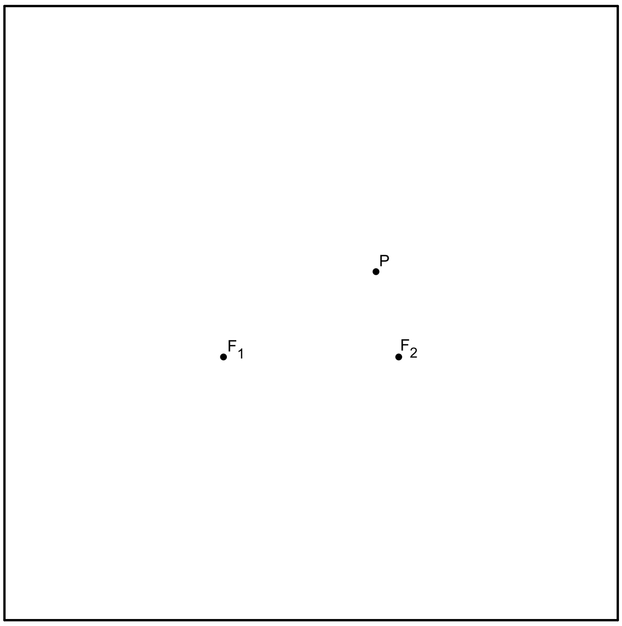
Exercício E.3



Exercício E.4



Exercício E.5



Exercício E.6

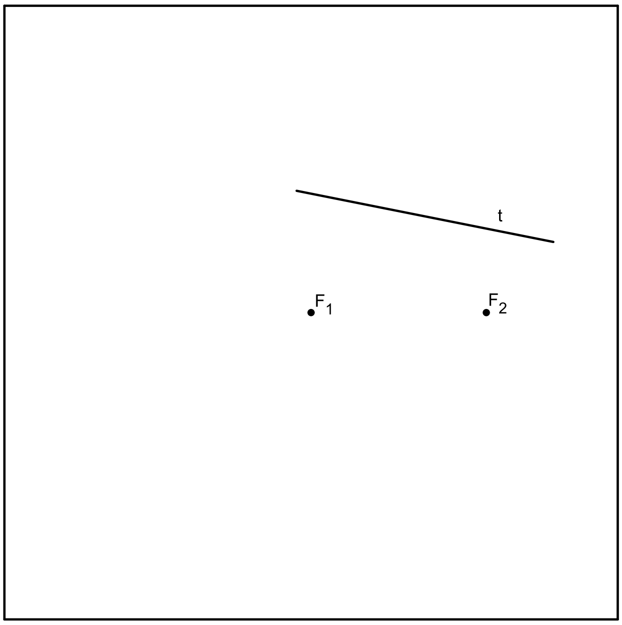
o eixo maior A_1A_2 e a tangente t por P.

Exercício E.12: Determine o eixo maior A_1A_2 da elipse, dados o foco F_1, o extremo A_1 do eixo maior e a tangente t.

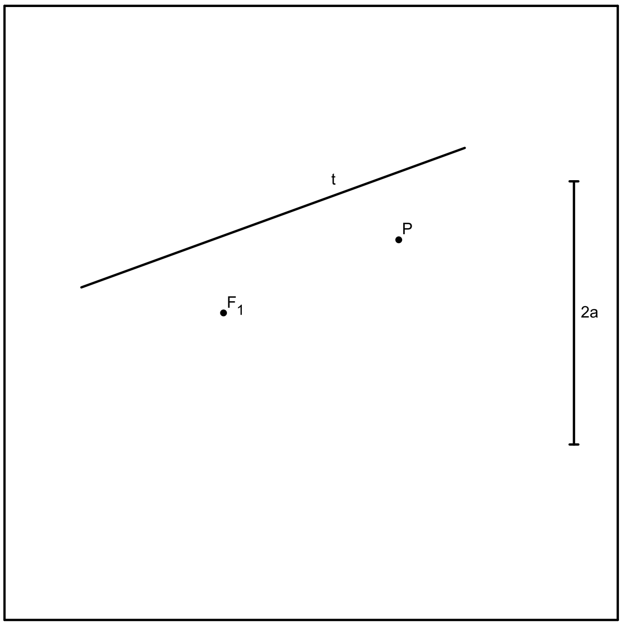
Exercício E.13: Determine o outro foco F_2 da elipse, dados o foco F_1, o extremo B_1 do eixo menor e a tangente t.

Exercício E.14: Determine os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2 da elipse, dados a reta suporte x do eixo maior, o foco F_1 e as tangentes t_1 e t_2.

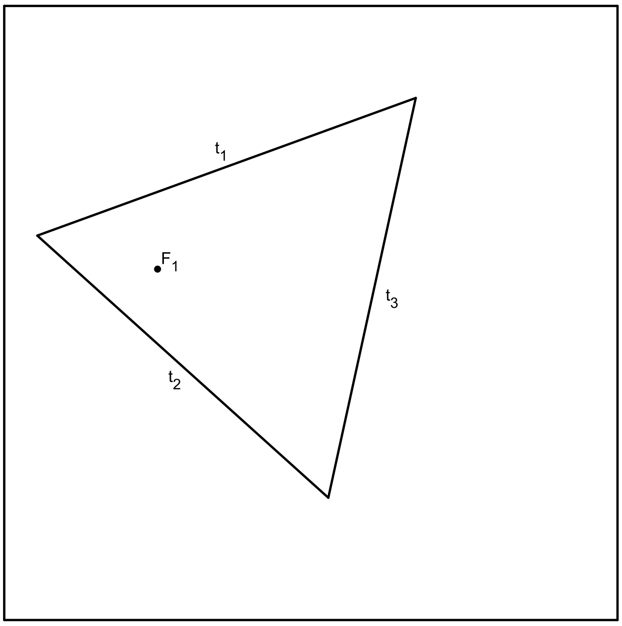
Exercício E.15: Determine a tangente t à elipse, dados o foco F_1, o eixo maior A_1A_2



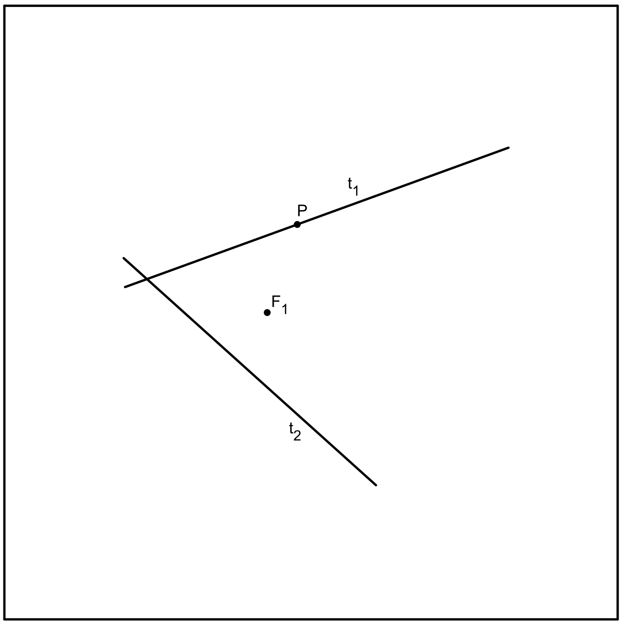
Exercício E.7



Exercício E.8



Exercício E.9



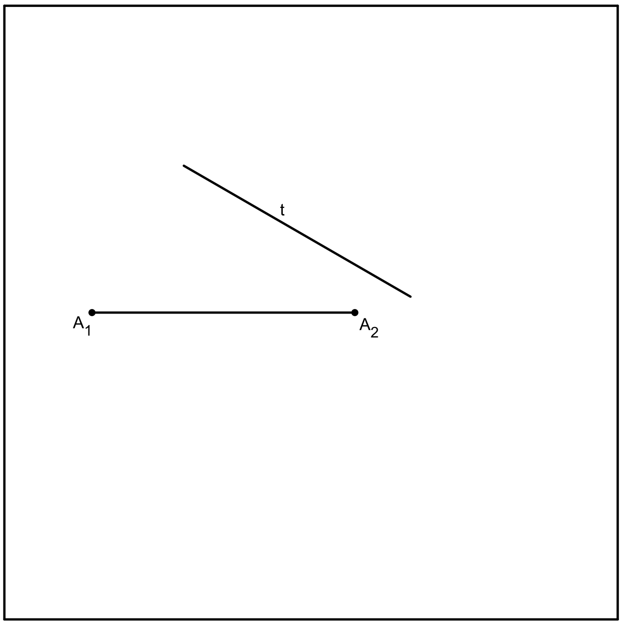
Exercício E.10

e a distância ℓ da tangente ao centro O da elipse.

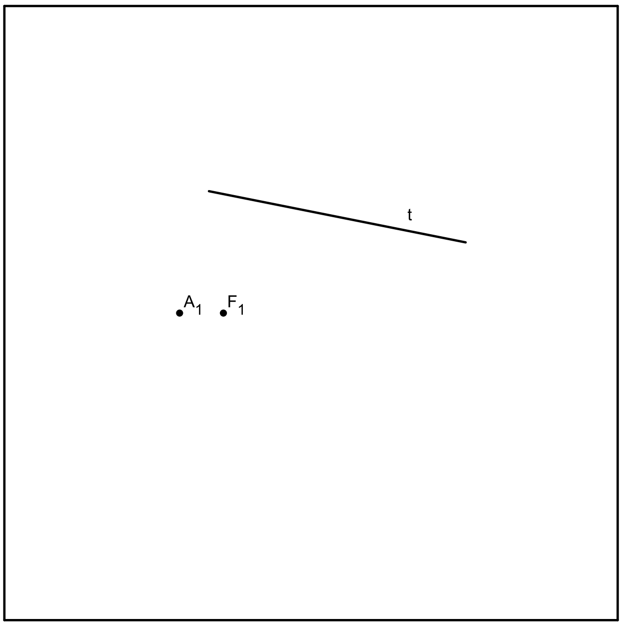
Exercício E.16: Determine as tangentes t_1 e t_2 comuns das elipses, dados os respectivos pares de focos (F_1, F_2) e (F_1, F_2') e os comprimentos dos semi-eixos maiores a e a'.

Exercício E.17: Determine o triângulo equilátero circunscrito à elipse, passando pelo extremo B_1 do eixo menor, dados os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

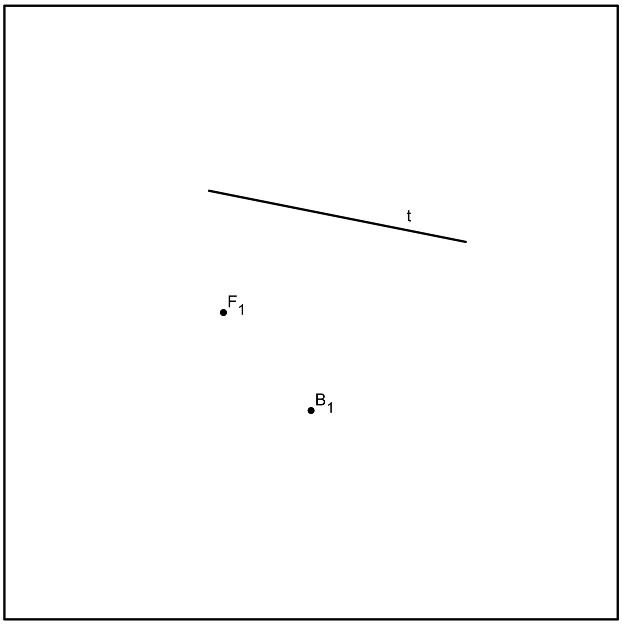
Exercício E.18: Determine os focos F_1 e F_2 e o eixo maior A_1A_2 da elipse, dados o eixo menor B_1B_2 e o ponto P pertencente à curva.



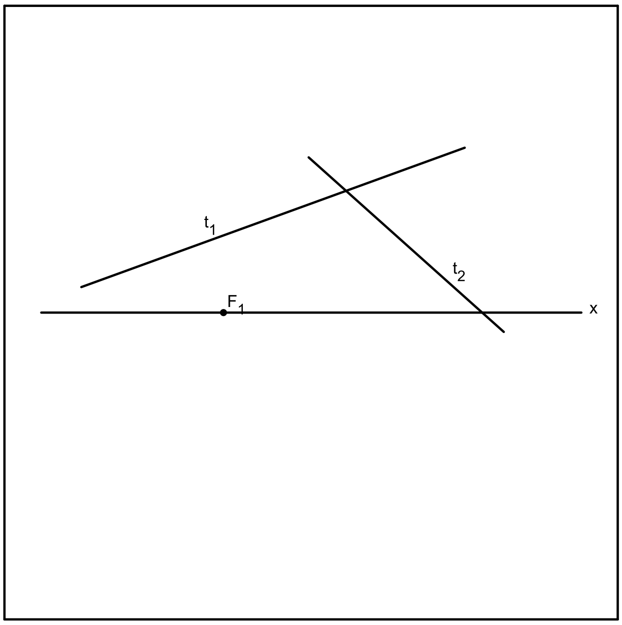
Exercício E.11



Exercício E.12



Exercício E.13



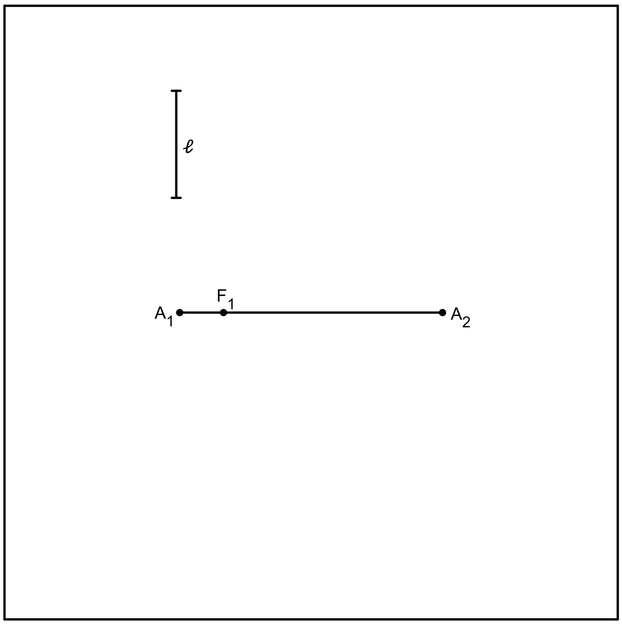
Exercício E.14

Exercício E.19: Determine a tangente t à elipse, dados o eixo menor B_1B_2 e o ponto P de tangência de t.

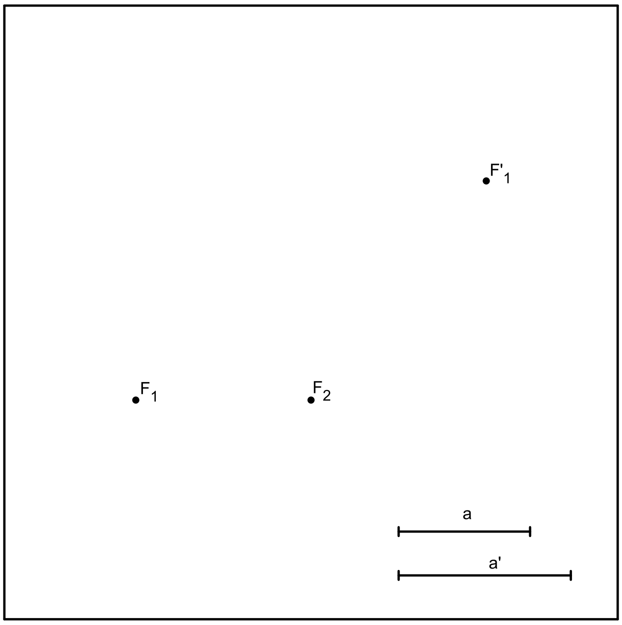
Exercício E.20: Determine os focos F_1 e F_2 e o eixo maior A_1A_2 da elipse, dados o eixo menor B_1B_2 e a tangente t.

Exercício E.21: Determine as interseções da reta r com a elipse definida por seus eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

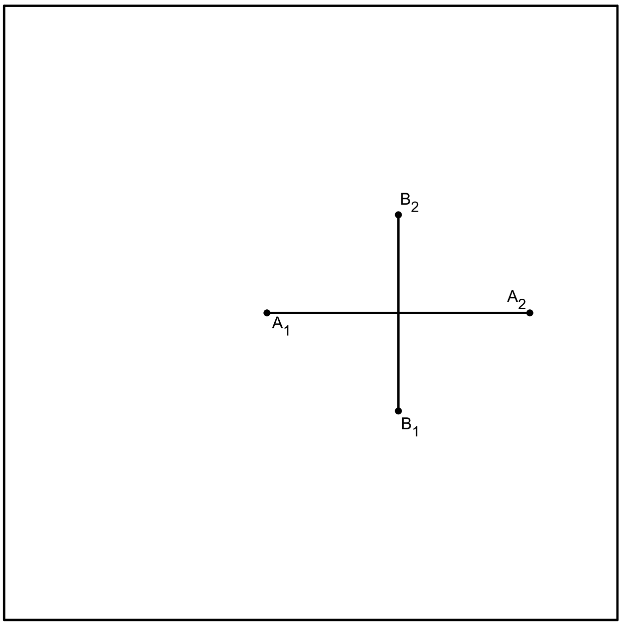
Exercício E.22: Determine os focos F_1 e F_2 da elipse, dados a reta suporte x do eixo



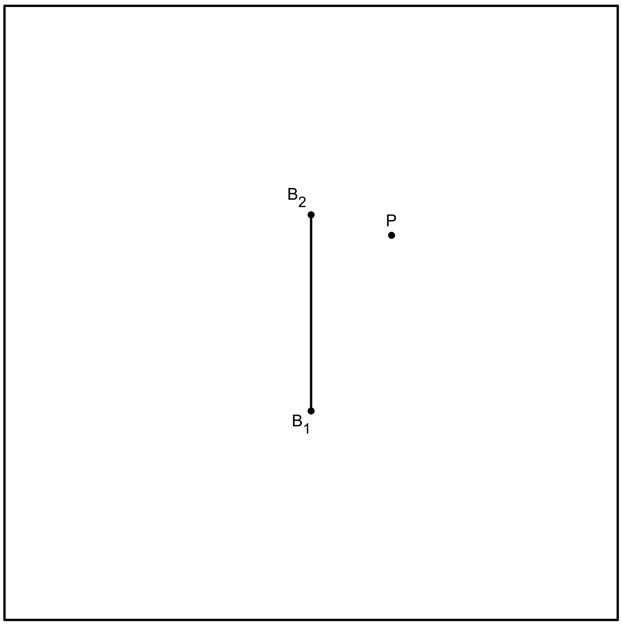
Exercício E.15



Exercício E.16



Exercício E.17



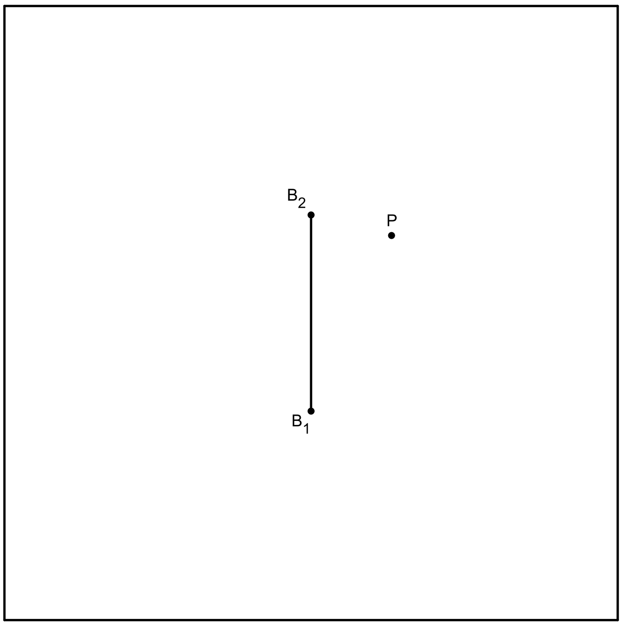
Exercício E.18

maior, a razão $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, a tangente t e o ponto P de tangência de t.

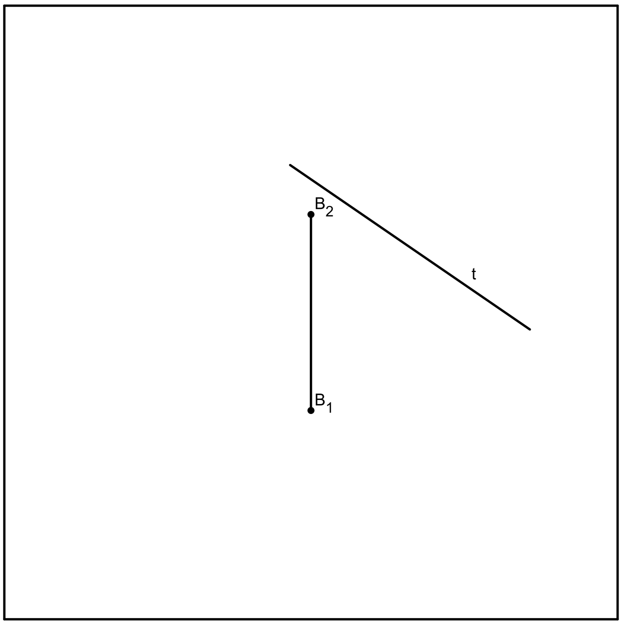
Exercício E.23: Determine o quadrado inscrito à elipse, com os lados paralelos aos eixos, dados os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

Exercício E.24: Determine os pontos de interseção das elipses, dados os respectivos pares de focos (F_1, F_2) e (F_2, F_3) e o comprimento comum $2a$ dos eixos maiores.

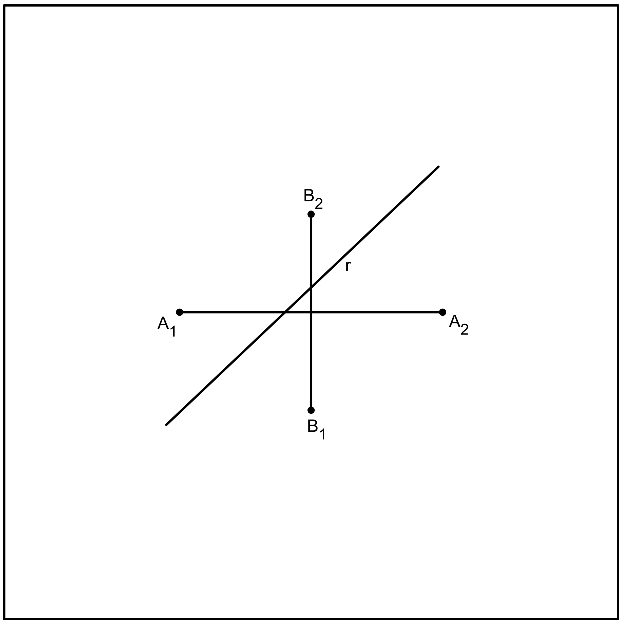
Exercício E.25: Determine os focos F_1 e F_2 da elipse, dados a diretriz d, os pontos P_1 e P_2 pertencentes à curva e a excentricidade $e = \frac{2}{3}$.



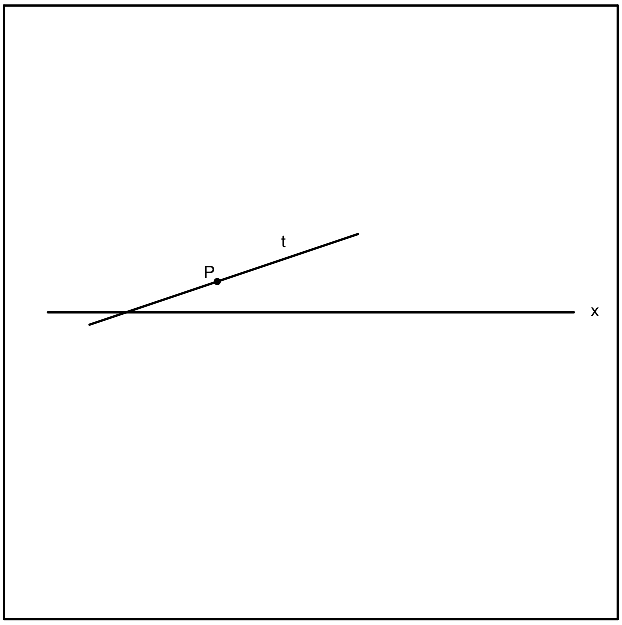
Exercício E.19



Exercício E.20



Exercício E.21



Exercício E.22

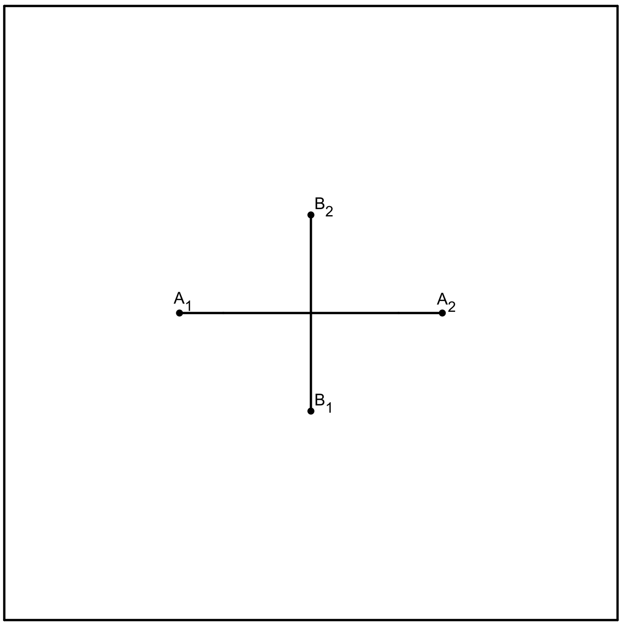
1.3 Soluções dos Exemplos

Exemplo E.1: Determine os pontos da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.

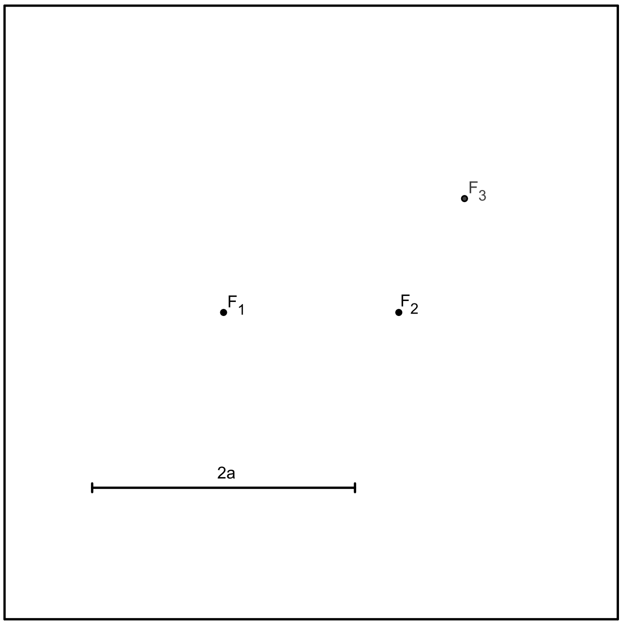
Solução: (i) Tome um ponto P' qualquer sobre $C_1 \equiv (F_1, 2a)$; (ii) Trace a mediatriz m do segmento $P'F_2$, determinando P, pertencente à elipse E, sobre F_1P'.

Justificativa: Como $P \in m$, então $PP' = PF_2$ e assim $F_1P' = F_1P + PP' = F_1P + PF_2 = 2a$, de modo que $P \in E$.

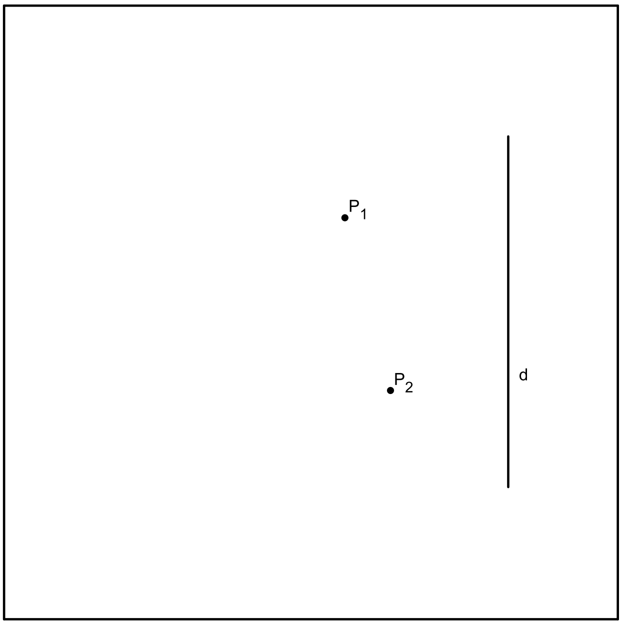
Exemplo E.2: Determine os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2 da elipse, dados os focos



Exercício E.23



Exercício E.24



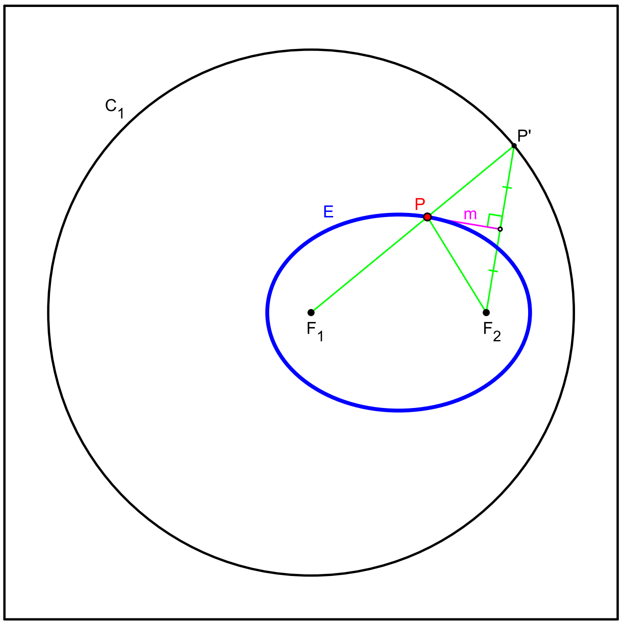
Exercício E.25

F_1 e F_2 e o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.

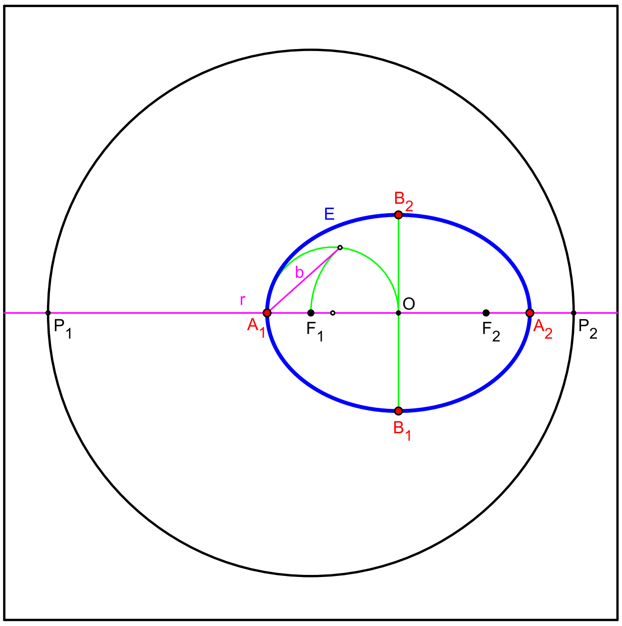
Solução: (i) Trace a reta r suporte de F_1F_2, determinando P_1 e P_2 sobre $C_1 \equiv (F_1, 2a)$; (ii) Determine os pontos A_1, médio de F_2P_1, e A_2, médio de F_2P_2; (iii) Determine o ponto O, médio de F_1F_2 e centro da elipse E; (iv) Determine o comprimento b do cateto do triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e outro cateto $OF_1 = c$; (v) Marque o eixo menor B_1B_2, sobre uma perpendicular a F_1F_2 por O, tal que $OB_1 = OB_2 = b$.

Justificativa: Como $F_1P_1 = F_1P_2 = 2a$ e $F_1F_2 = 2c$, então $F_2P_1 = (2a+2c)$ e $F_2P_2 = (2a-2c)$, de modo que $F_2A_1 = (a+c)$ e $F_2A_2 = (a-c)$, como desejado. Tendo $OA_1 = a$ e $OF_1 = c$, podemos determinar $OB_1 = OB_2 = b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Exemplo E.3: Determine os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2 da elipse, dados os focos



Solução do Exemplo E.1



Solução do Exemplo E.2

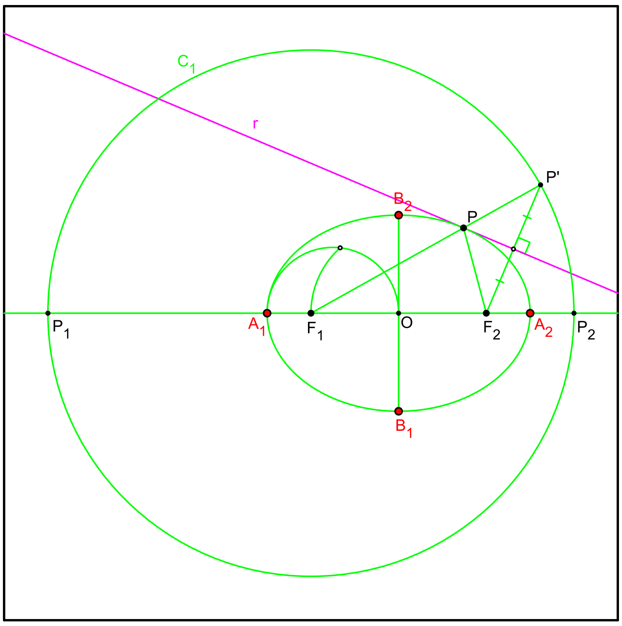
F_1 e F_2 e o ponto P da curva.

Solução: (i) Trace os raios vetores F_1P e F_2P e a bissetriz r destes segmentos (com F_1P devidamente prolongado); (ii) Determine o simétrico P' de F_2 em relação a r; (iii) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, F_1P')$, tornando a questão equivalente ao Exemplo E.2.

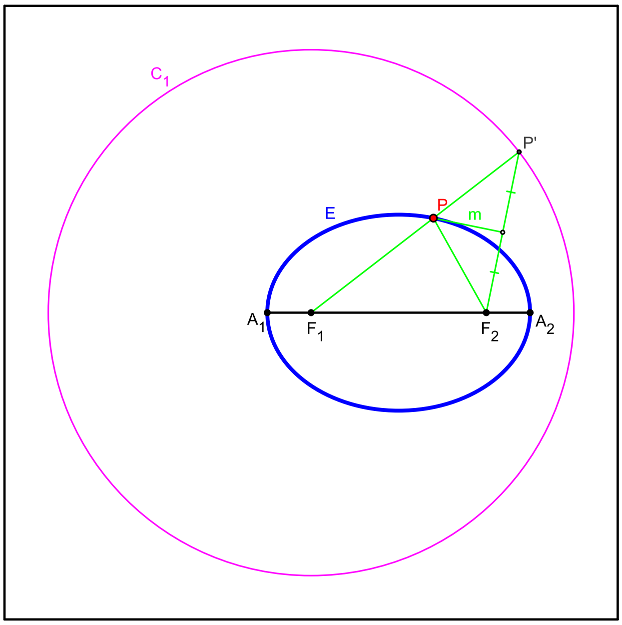
Justificativa:

Exemplo E.4: Determine os pontos da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e o eixo maior A_1A_2.

Solução: (i) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, A_1A_2)$, tornando a questão equivalente ao Exemplo E.1.



Solução do Exemplo E.3



Solução do Exemplo E.4

Exemplo E.5: Determine o eixo maior A_1A_2 e os focos F_1 e F_2 da elipse, dados o eixo menor B_1B_2 e a excentricidade $e = \frac{3}{5}$.

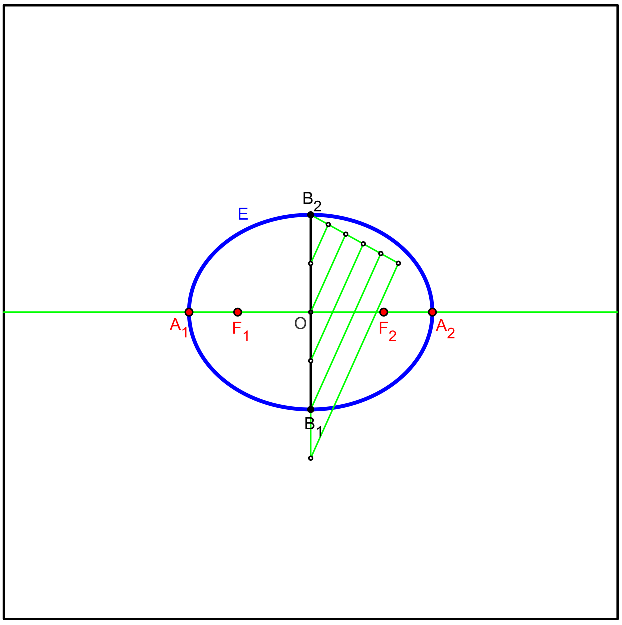
Solução: (i) Determine os comprimentos $2a = A_1A_2 = \frac{5B_1B_2}{4}$ e $2c = F_1F_2 = \frac{3B_1B_2}{4}$; (ii) Trace a mediatriz m de B_1B_2 a partir de seu centro O e marque $OA_1 = OA_2 = a$ e $OF_1 = OF_2 = c$ sobre m.

Justificativa: Como $c = ae$ e $a^2 = (b^2 + c^2)$, então $a = \frac{b}{\sqrt{1-e^2}}$. No caso, com $e = \frac{3}{5}$, têm-se $a = \frac{5b}{4}$ e $c = \frac{3b}{4}$.

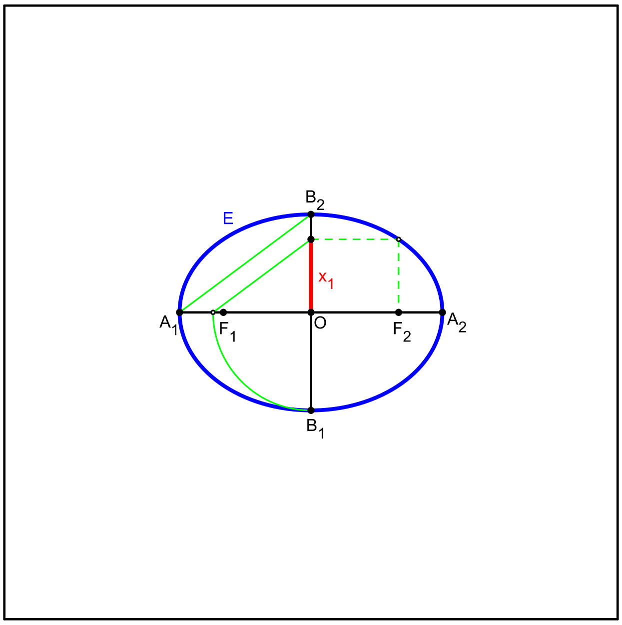
Exemplo E.6: Determine o parâmetro da elipse, dados os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

Solução: (i) Determine a 3ª proporcional $x_1 : b = b : a$,

Justificativa: Ver Teorema E.3.



Solução do Exemplo E.5



Solução do Exemplo E.6

Exemplo E.7: Determine o ponto de tangência P e os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2 da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e a tangente t por P.

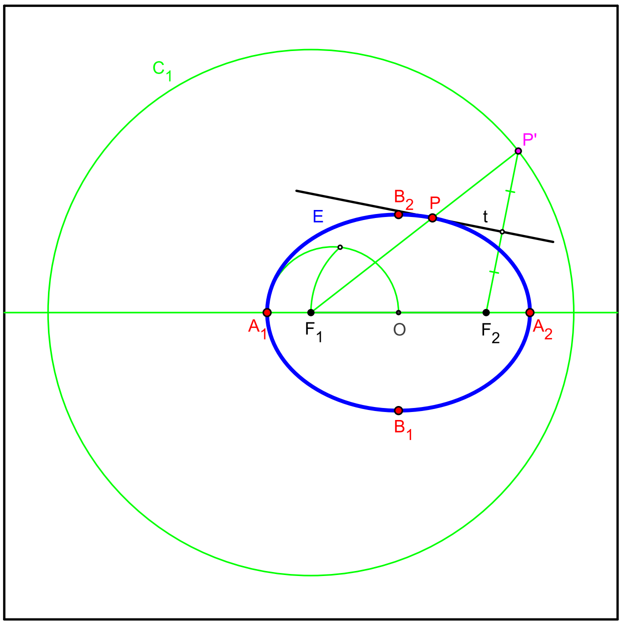
Solução: (i) Determine o simétrico P' de F_2 em relação a t; (ii) Trace o segmento F_1P', determinando o ponto de tangência P sobre t; (iii) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, F_1P')$, tornando a questão equivalente aos Exemplos E.2 ou E.3.

Justificativa: Ver Corolário C do Teorema E.4.

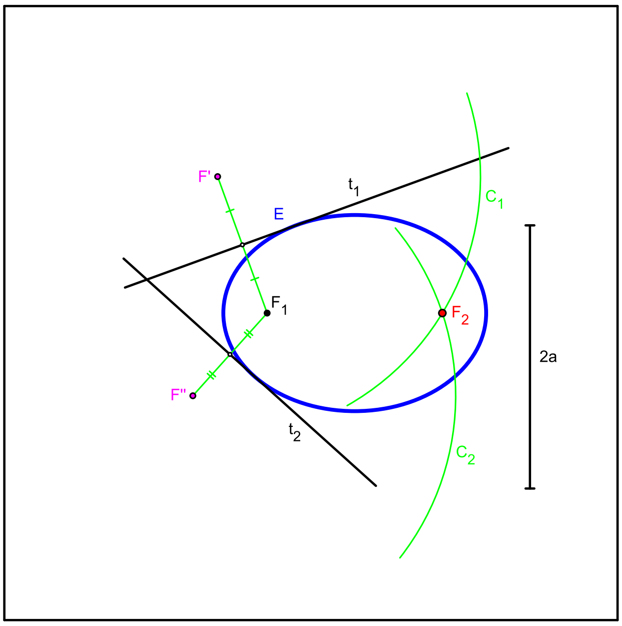
Exemplo E.8: Determine o outro foco F_2 da elipse, dados o foco F_1, as tangentes t_1 e t_2 e o comprimento $2a$ do eixo maior.

Solução: (i) Determine os simétricos F' e F'' de F_1 em relação às tangentes t_1 e t_2, respectivamente; (ii) Trace os círculos $C_1 \equiv (F', 2a)$ e $C_2 \equiv (F'', 2a)$, cuja interseção é o outro foco desejado (com duas possibilidades, claro).

Exemplo E.9: Determine o outro foco F_2 da elipse, dados o foco F_1 e as tangentes



Solução do Exemplo E.7



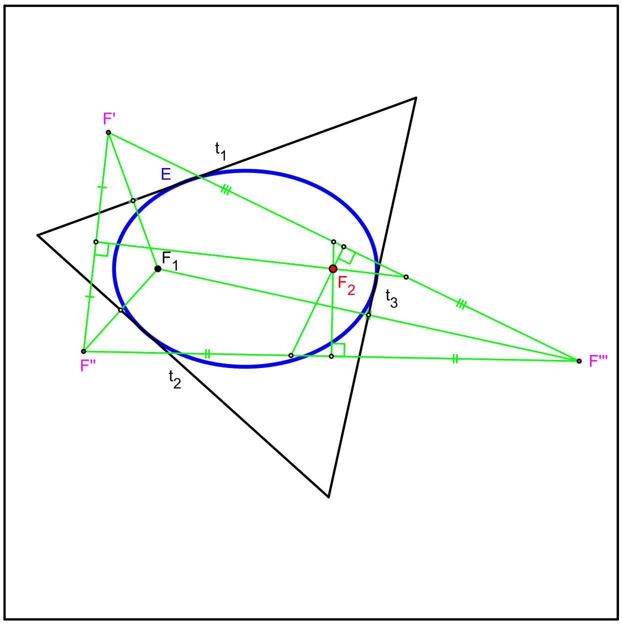
Solução do Exemplo E.8

t_1, t_2 e t_3.

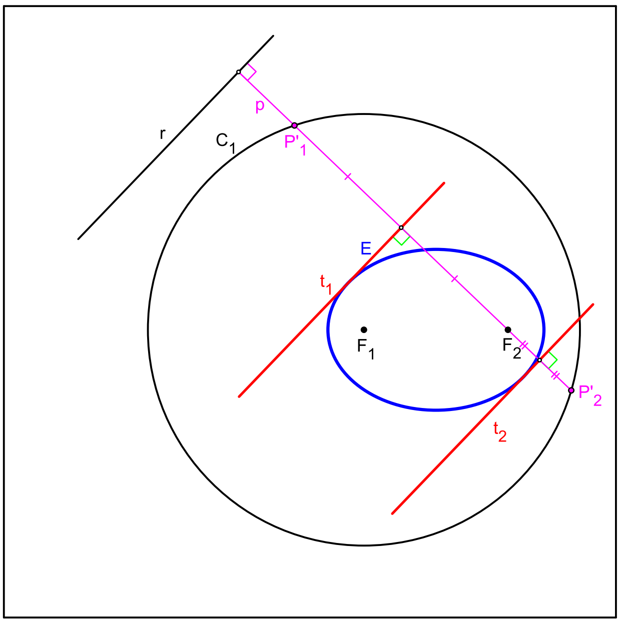
Solução: (i) Determine os simétricos F', F'' e F''' de F_1 em relação às tangentes t_1, t_2 e t_3, respectivamente; (ii) O foco F_2 desejado é o circuncentro (encontro das mediatrizes) do triângulo $\Delta F'F''F'''$.

Exemplo E.10: Determine as tangentes t_1 e t_2 da elipse paralelas à reta r, dados os focos F_1 e F_2, o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$ e a reta r.

Solução: (i) Trace a perpendicular p a r por F_2, determinando os pontos P_1' e P_2' sobre o círculo diretor C_1; (ii) Trace as mediatrizes t_1 de F_2P_1' e t_2 de F_2P_2', que são as tangentes desejadas.



Solução do Exemplo E.9



Solução do Exemplo E.10

Exemplo E.11: Determine as tangentes t_1 e t_2 da elipse, dados os focos F_1 e F_2, o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$ e o ponto P externo à elipse e pertencente às tangentes t_1 e t_2.

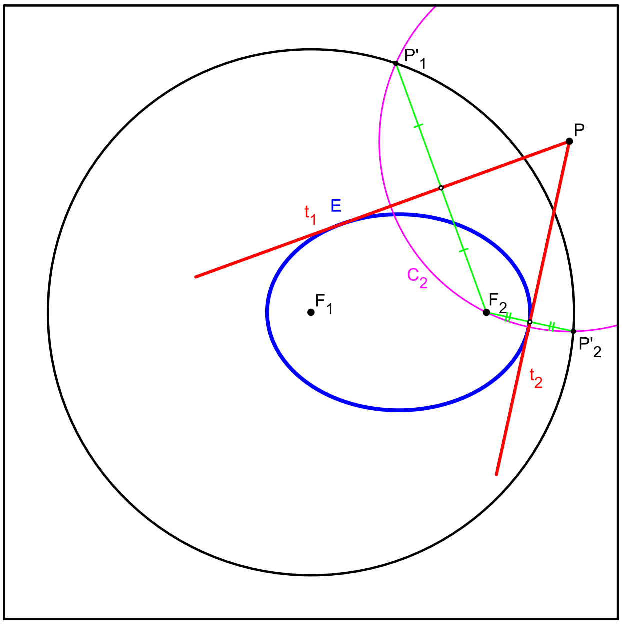
Solução: (i) Trace o círculo $C_2 \equiv (P, PF_2)$, determinando os pontos P_1' e P_2' sobre o círculo diretor C_1; (ii) Trace as mediatrizes t_1 de F_2P_1' e t_2 de F_2P_2', que são as tangentes desejadas.

Exemplo E.12: Determine os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2 da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e a normal n.

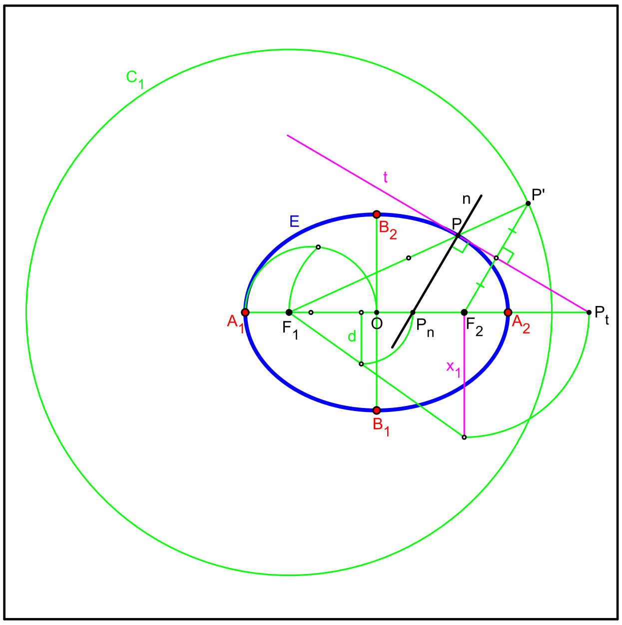
Solução: (i) Trace F_1F_2, determinando a interseção P_n com a normal n; (ii) Determine a 4ª proporcional $(2c - 2d) : d = 2c : x_1$, onde $d = F_2P_n$, e marque $F_2P_t = x_1$ sobre a reta suporte de F_1F_2 com F_2 entre P_n e P_t; (iii) Trace a perpendicular t à normal n por P_t, determinando a interseção P sobre n. No caso, P é o ponto de tangência de t à elipse E, o que torna a questão equivalente ao Exemplo E.7.

Justificativa: Pelo Corolário B do Teorema E.4,

$$\frac{F_1P_n}{F_2P_n} = \frac{F_1P_t}{F_2P_t} \Rightarrow \frac{2c-d}{d} = \frac{2c+x_1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{2cd}{2c-2d}.$$



Solução do Exemplo E.11



Solução do Exemplo E.12

Exemplo E.13: Determine o lugar geométrico dos focos F_1 e F_2 da elipse, dados o círculo principal maior $C_o \equiv (O, a)$ e a tangente t.

Solução: (i) Trace as perpendiculares p_1 e p_2 à tangente t pelos pontos de interseção, I e J de t com o círculo principal maior C_o. As porções destas perpendiculares internas a C_o constituem o lugar geométrico desejado.

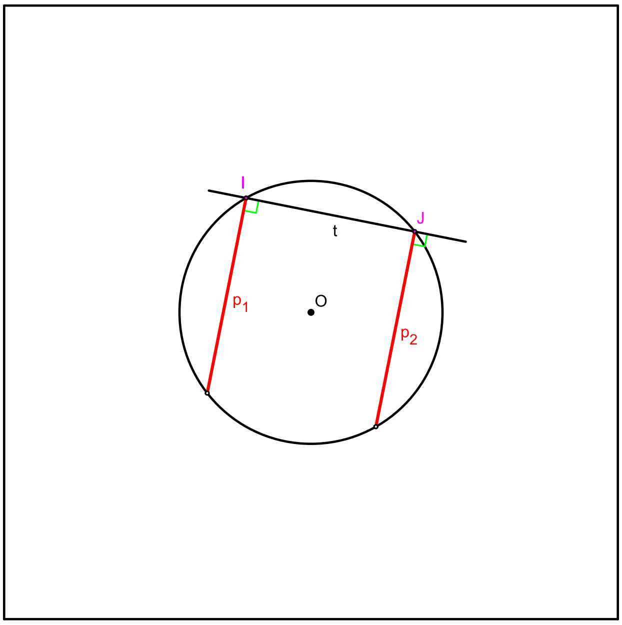
Justificativa: Pelo Teorema E.5, as perpendiculares p_1 e p_2 contém os pontos que ficam sobre C_o quando projetados na tangente t.

Exemplo E.14: Determine os focos F_1 e F_2 da elipse, dados o centro O, o comprimento $2a$ do eixo maior e as tangentes t_1 e t_2.

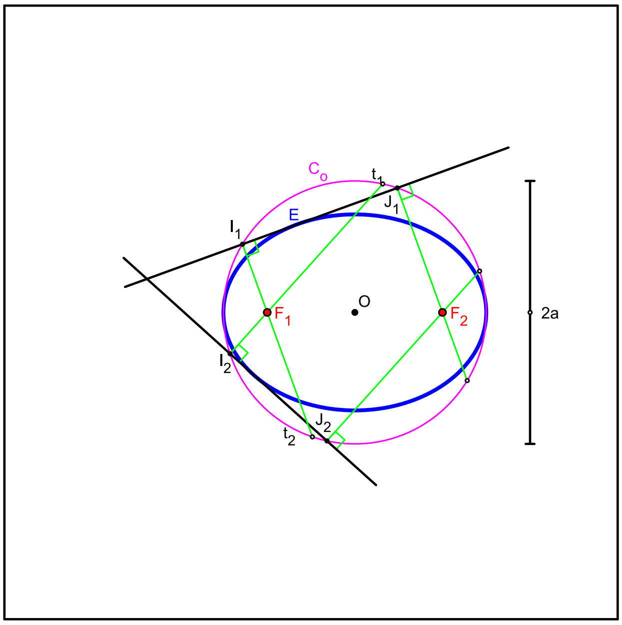
Solução: (i) Trace o círculo principal maior $C_o \equiv (O, a)$, determinando as interseções I_1 e

J_1 sobre t_1 e I_2 e J_2 sobre t_2; (ii) Trace perpendiculares a t_1 por I_1 e J_1 e a t_2 por I_2 e J_2, determinando as interseções F_1 e F_2, internas a C_o, que são os focos desejados.

Justificativa: Esta questão é similar ao Exemplo E.13, aplicado duas vezes em ambas as tangentes dadas, o que permite a determinação completa dos focos.



Solução do Exemplo E.13



Solução do Exemplo E.14

Exemplo E.15: Determine o outro foco F_2 da elipse, dados o foco F_1, as tangentes t_1 e t_2 e a distância focal $2c$.

Solução: (i) Trace a bissetriz b do ângulo entre as tangentes t_1 e t_2 dadas, cuja interseção é o ponto P'; (ii) Determine o simétrico F_1' de F_1 em relação à bissetriz b; (iii) Trace $C_1' \equiv (F_1, 2c)$, determinando o foco F_2 desejado sobre a reta suporte de $P'F_1'$.

Obs.: A reta suporte de $P'F_1'$ é também a mediatriz do segmento $F_1'F_1''$, onde F_1' e F_1'' são os simétricos de F_1 em relação às tangentes dadas.

Justificativa: Pelo Teorema de Poncelet, F_2P' faz um ângulo com uma tangente t_1 igual ao ângulo que F_1P' faz com a outra tangente t_2, de modo que F_2 deve estar sobre a reta suporte de $P'F_1'$. A determinação de F_2 é completa pelo fato de que $F_1F_2 = 2c$.

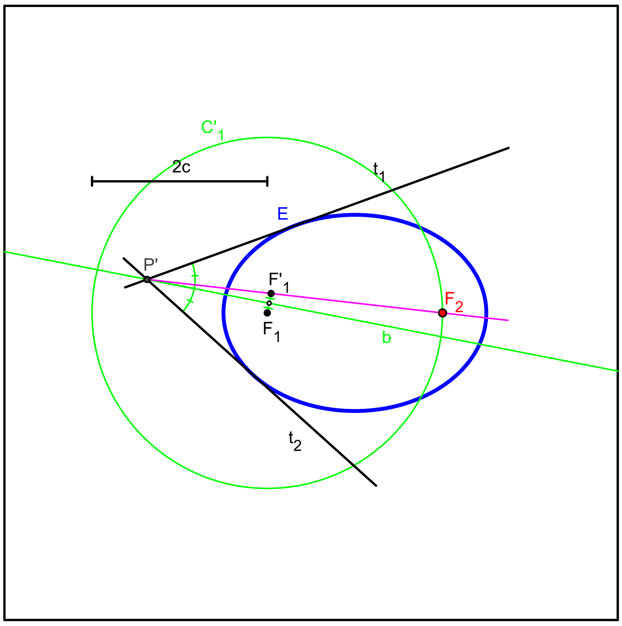
Exemplo E.16: Determine o lugar geométrico do centro O da elipse, dados o foco F_1 e as tangentes t_1 e t_2.

Solução: (i) Trace a bissetriz b do ângulo entre as tangentes t_1 e t_2 dadas; (ii) Determine o simétrico F_1' de F_1 em relação à bissetriz b; (iii) Determine a projeção F_1'' de F_1 sobre a reta suporte de $P'F_1'$, onde P' é a interseção das tangentes t_1 e t_2 dadas; (iv) Trace a mediatriz m de F_1F_1'', que é o lugar geométrico desejado.

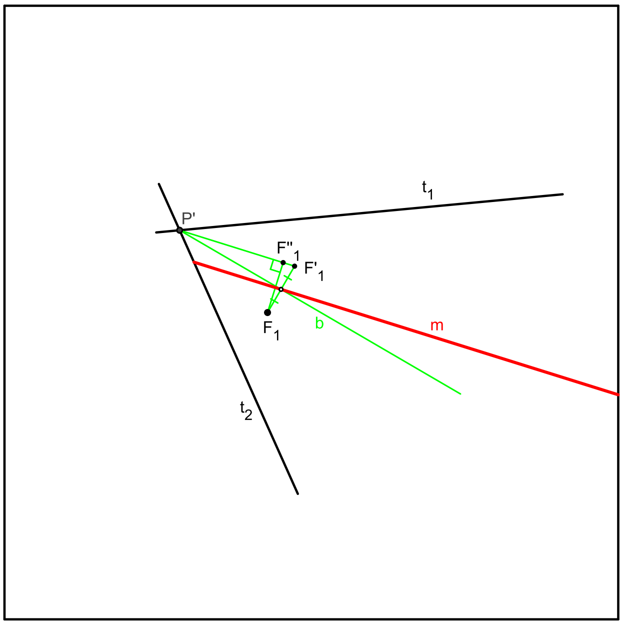
Justificativa: Pelo Exemplo E.15, F_2 está sobre a reta simétrica de $P'F_1$ em relação à bissetriz b de t_1 e t_2. Como o centro da elipse é médio de F_1F_2, então o lugar geométrico desejado é a mediatriz m descrita na solução.

Exemplo E.17: Determine o outro foco F_2 da elipse, dados o foco F_1, os pontos P_1 e P_2 de contato das tangentes t_1 e t_2, respectivamente, cuja interseção pertence à reta r também dada.

Solução: (i) Trace a bissetriz b de $\widehat{P_1F_1P_2}$, determinando o ponto P' de interseção das tangentes



Solução do Exemplo E.15



Solução do Exemplo E.16

sobre a reta r; (ii) Trace as tangentes t_1 e t_2, suportes dos segmentos $P'P_1$ e $P'P_2$; (iii) Determine os respectivos simétricos F_1' e F_1'' de F_1 em relação às tangentes t_1 e t_2; (iv) Trace as retas suportes de $F_1'P_1$ e de $F_1''P_2$ (ou a mediatriz m de $F_1'F_1''$, como colocado na **Obs.** do Exemplo E.15) cuja interseção é o foco F_2 desejado.

Justificativa: Pelo Teorema de Poncelet, item B, o ponto P' de interseção das tangentes t_1 e t_2 está na bissetriz de $\widehat{P_1F_1P_2}$, onde P_1 e P_2 são pontos de tangência dados. Pelo conceito de círculo diretor, o outro foco F_2 pertence à mediatriz de $F_1'F_1''$, simétricos de F_1 em relação às tangentes t_1 e t_2, respectivamente, e é colinear com $F_1'P_1$ ou $F_1''P_2$.

Exemplo E.18: Determine o círculo ortótico C da elipse, dados os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

Solução: (i) Determine o comprimento r_O da hipotenusa do triângulo retângulo de catetos $OA_1 = a$ e $OB_1 = b$, onde O é o centro da elipse; (ii) Trace o círculo ortótico $C \equiv (O, r_O)$.

Exemplo E.19: Determine as diretrizes da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.

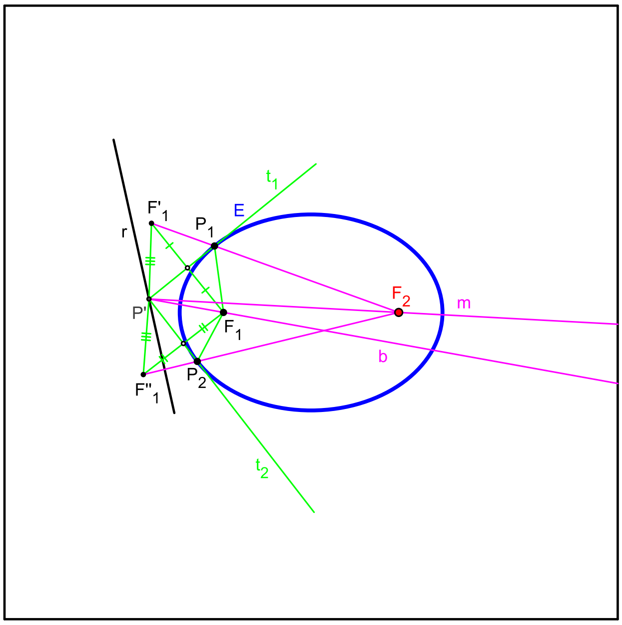
Solução: (i) Determine a 3ª proporcional $c : a = a : x_1$ e marque os pontos $OD_1 = OD_2 = x_1$ sobre a reta suporte f de F_1F_2, onde O é o centro da elipse; (ii) Trace as perpendiculares d_1 e d_2 por D_1 e D_2, respectivamente, à reta f, que são as diretrizes desejadas.

Exemplo E.20: Determine a elipse cuja razão das distâncias de seus pontos ao ponto F_2 e à reta d_2 é igual a $\frac{2}{3}$.

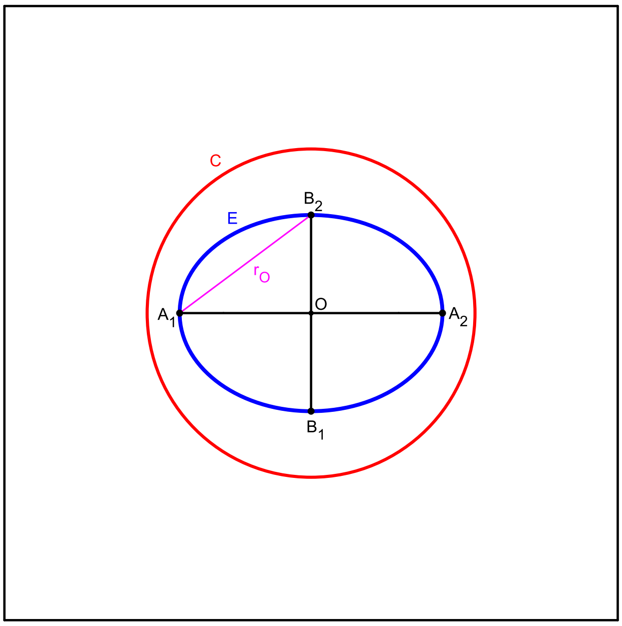
Solução: (i) Determine a distância x do ponto F_2 à reta d_2; (ii) Marque o centro O tal que $OF_2 = \frac{4x}{5} = c$ e o outro foco F_1 tal que $OF_1 = OF_2$, com O entre F_1 e F_2; (iii) Marque os semi-eixos principais $OA_1 = OA_2 = \frac{6x}{5} = a$; (iv) Marque os semi-eixos secundários $OB_1 = OB_2 = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Justificativa: Dos Teoremas E.9 e E.10, têm-se

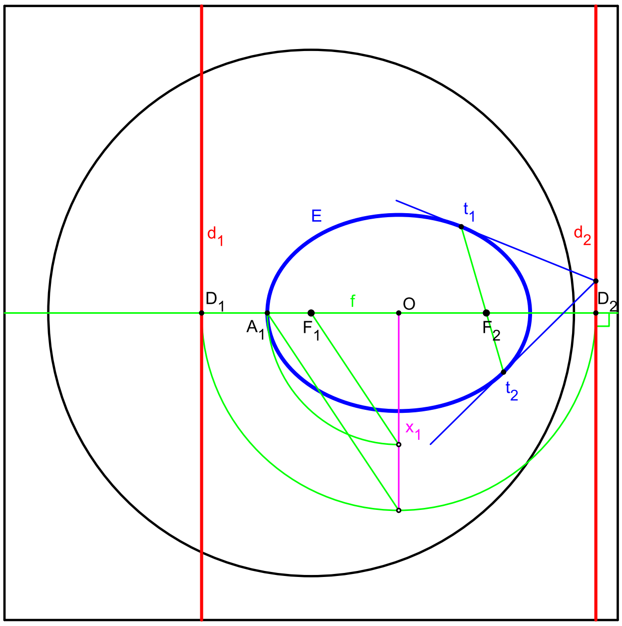
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a^2}{c} - c \\ e = \frac{c}{a} \end{array} \right. \Rightarrow x = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{(1 - e^2)a}{e} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{ex}{1-e^2} = \frac{6x}{5} \\ c = \frac{e^2x}{1-e^2} = \frac{4x}{5} \end{array} \right. .$$



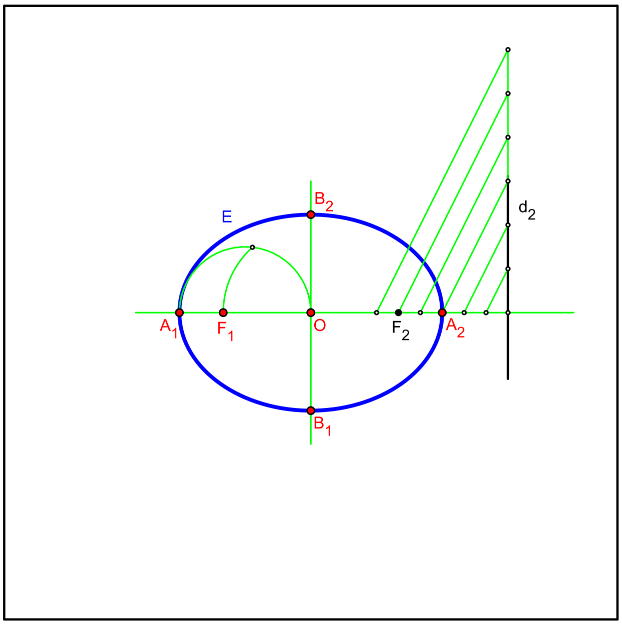
Solução do Exemplo E.17



Solução do Exemplo E.18



Solução do Exemplo E.19



Solução do Exemplo E.20

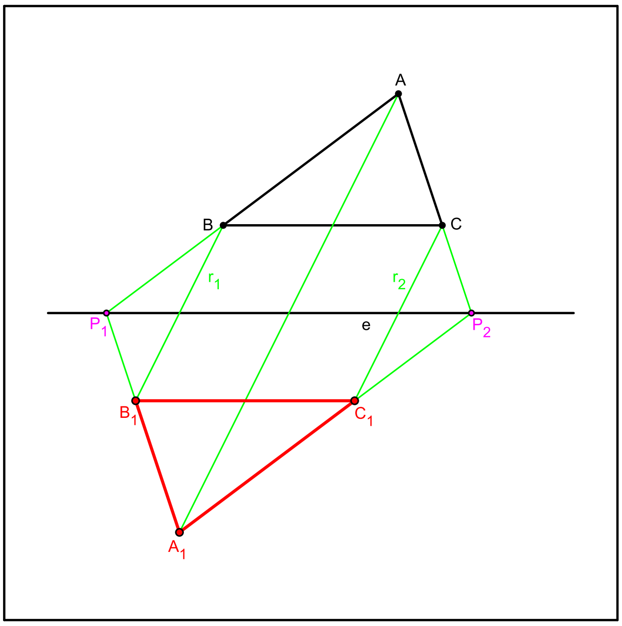
Exemplo E.21b: Determine a transformada afim do triângulo ΔABC, dado que o ponto A_1 é a transformada do vértice A.

Solução: (i) Prolongue os lados AB e AC determinando as respectivas interseções P_1 e P_2 com o eixo de afinidade e; (ii) Trace a reta r_1 paralela a AA_1 por B, determinando a transformação afim B_1 do vértice B sobre a reta P_1A_1; (iii) Trace a reta r_2 paralela a AA_1 por C, determinando a transformação afim C_1 do vértice C sobre a reta P_2A_1.

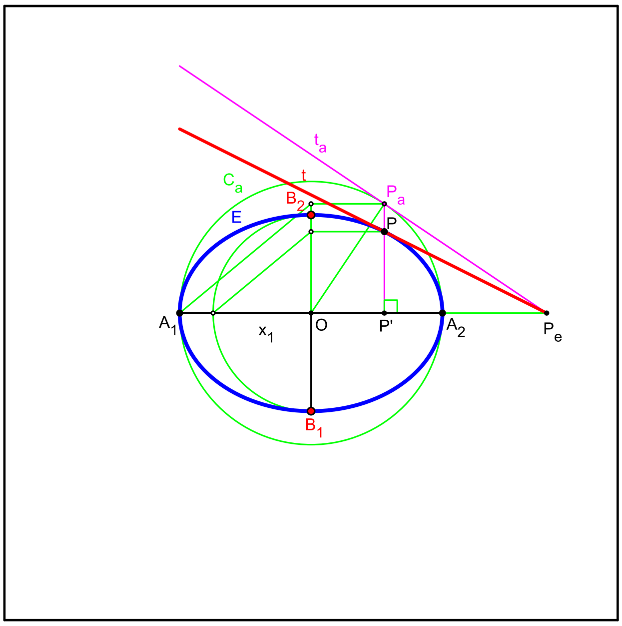
Exemplo E.22: Determine a tangente t e o eixo menor B_1B_2 da elipse, dados o ponto P de tangência de t e o eixo maior A_1A_2.

Solução: (i) Trace o círculo principal maior $C_a \equiv (O, OA_1)$, onde O é o centro da elipse;

(ii) Trace uma perpendicular a A_1A_2 por P, determinando P' sobre A_1A_2 e P_a sobre C_a; (iii) Determine a 4ª proporcional $P'P_a : P'P = OA_1 : x_1$, tal que $x_1 = b$, o que permite determinar o eixo menor $B_1B_2 = 2b$ da elipse; (iv) Trace a tangente t_a a C_a por P_a (reta ortogonal a OP_a por P_a), determinando o ponto P_e sobre o prolongamento de A_1A_2; (v) Trace P_eP que constitui a tangente t desejada.



Solução do Exemplo E.21b



Solução do Exemplo E.22

Exemplo E.23: Determine a tangente t e o eixo maior A_1A_2 da elipse, dados o ponto P de tangência de t e o eixo menor B_1B_2.

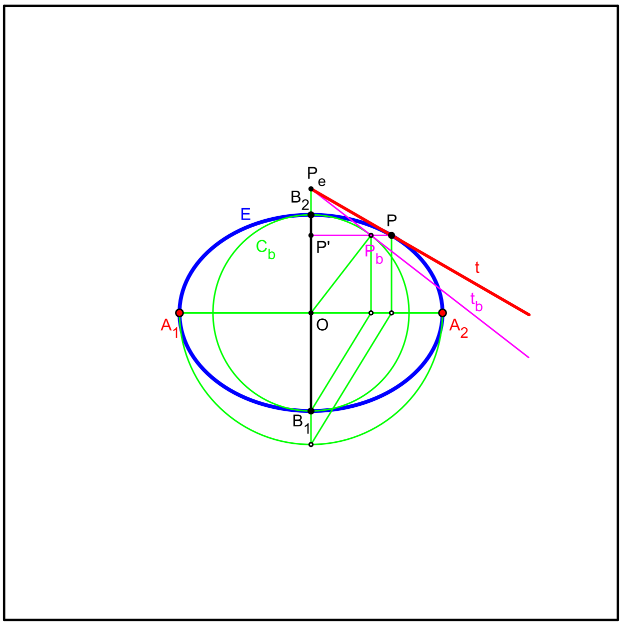
Solução: (i) Trace o círculo principal menor $C_b \equiv (O, OB_1)$, onde O é o centro da elipse; (ii) Trace uma perpendicular a B_1B_2 por P, determinando P' sobre B_1B_2 e P_b sobre C_b; (iii) Determine a 4ª proporcional $P'P_b : P'P = OB_1 : x_1$, tal que $x_1 = a$, o que permite determinar o eixo maior $A_1A_2 = 2a$ da elipse; (iv) Trace a tangente t_b a C_b por P_b (reta ortogonal a OP_b por P_b), determinando o ponto P_e sobre o prolongamento de B_1B_2; (v) Trace P_eP que constitui a tangente t desejada.

Exemplo E.24: Determine as interseções da reta r com a elipse definida por seus eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

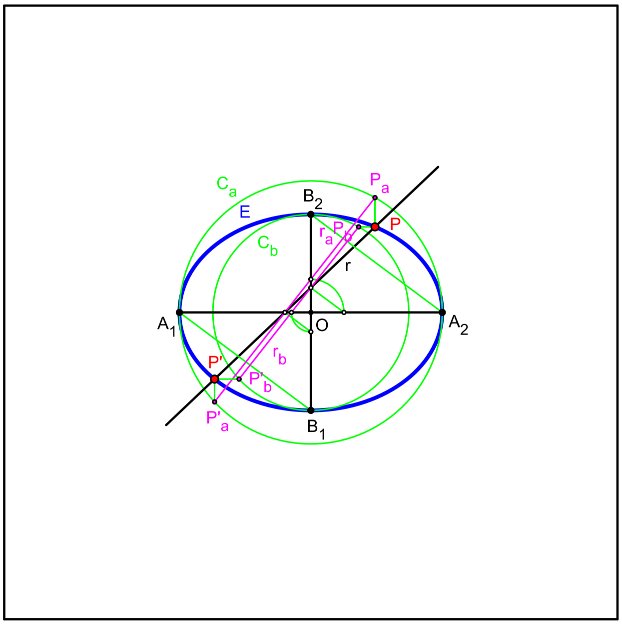
Solução: (i) Trace os círculos principais maior $C_a \equiv (O, OA_1)$ e menor $C_b \equiv (O, OB_1)$, onde O é o centro da elipse; (ii) Obtenha a transformação afim r_a da reta r com eixo A_1A_2 e razão $k = \frac{a}{b}$ (note que esta transformação não altera o ponto que a reta cruza o eixo A_1A_2), determinando as interseções P_a e P'_a com C_a; (iii) Obtenha a transformação afim r_b da reta r com eixo B_1B_2 e razão $k = \frac{a}{b}$ (note que esta transformação não altera o ponto que a reta cruza o eixo B_1B_2), determinando as interseções P_b e P'_b com C_b; (iv) As interseções desejadas P e P' de r com a elipse E têm as abscissas de P_a e P'_a, respectivamente, e as ordenadas de P_b e P'_b, respectivamente.

Justificativa: A transformação afim do passo (ii), leva P em P_a, de modo que tendo P_a determinamos a abscissa de P. Analogamente, a transformação do passo (iii) leva P_b em P, de modo que P_b define a ordenada de P. O mesmo processo também determina a outra interseção P'.

Exemplo E.25: Determine os pontos da elipse, dados os eixos maior A_1A_2 e menor



Solução do Exemplo E.23



Solução do Exemplo E.24

B_1B_2.

Solução: (i) Trace os círculos principais maior $C_a \equiv (O, OA_1)$ e menor $C_b \equiv (O, OB_1)$, onde O é o centro da elipse; (ii) Trace raios de C_a fazendo ângulos múltiplos, por exemplo, de $22^o\,30'$ com OA_2, determinando interseções do tipo I_a com C_a e I_b com C_b; (iii) Por cada interseção do tipo I_a trace paralelas a B_1B_2 e por cada interseção do tipo I_b trace paralelas a A_1A_2, determinando interseções do tipo P, que pertencem à elipse E desejada.

Exemplo E.26: Determine dois diâmetros conjugados g_1 e g_2 da elipse, dados os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

Solução: (i) Determine o comprimento c do outro cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e cateto $OB_1 = b$ e marque os focos da elipse tais que $OF_1 = OF_2 = c$, onde O é o centro da elipse; (ii) Trace os círculos principais maior $C_a \equiv (O, OA_1)$ e menor $C_b \equiv (O, OB_1)$; (iii) Trace diâmetros perpendiculares d_1 e d_2 quaisquer de C_a, determinando interseções do tipo I_a com C_a e I_b com C_b; (iii) Por cada interseção do tipo I_a trace paralelas a B_1B_2 e por cada interseção do tipo I_b trace paralelas a A_1A_2, determinando os extremos dos diâmetros conjugados desejados.

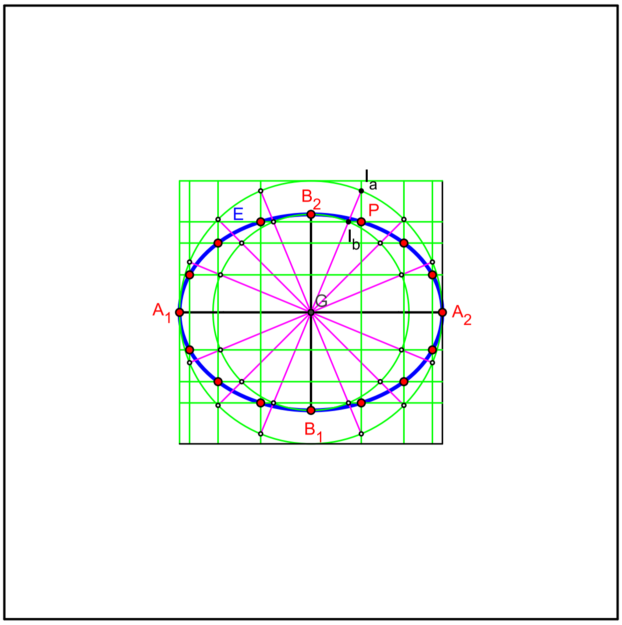
1.4 Soluções dos Exercícios

Exercício E.1: Determine os focos F_1 e F_2 da elipse, dados os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

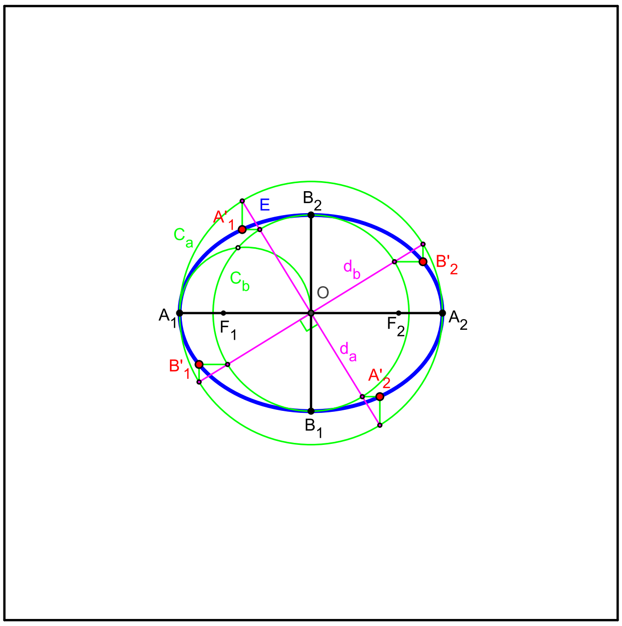
Solução: (i) Determine o comprimento c do outro cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e cateto $OB_1 = b$ e marque os focos da elipse tais que $OF_1 = OF_2 = c$, onde O é o centro da elipse.

Exercício E.2: Determine os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2 da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e o comprimento $2a$ do eixo maior A_1A_2.

Solução: (i) Marque o eixo maior $OA_1 = OA_2 = a$ sobre a reta suporte de F_1F_2, onde O é o ponto médio de F_1F_2; (ii) Determine o comprimento b do outro cateto de um triângulo

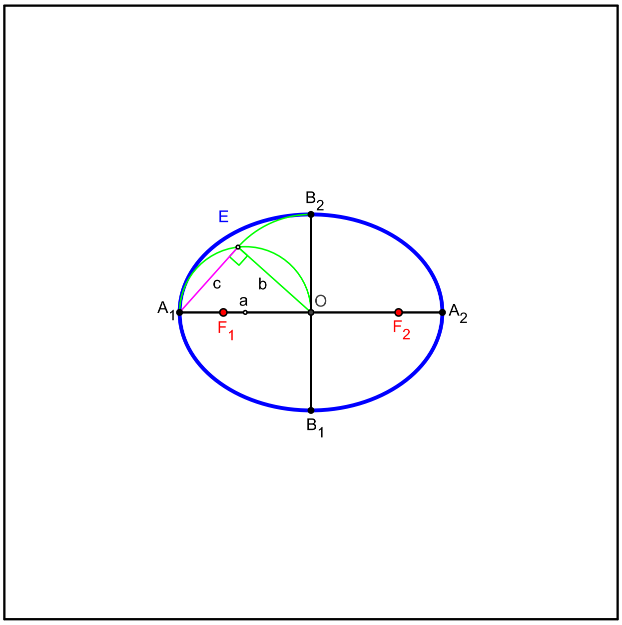


Solução do Exemplo E.25

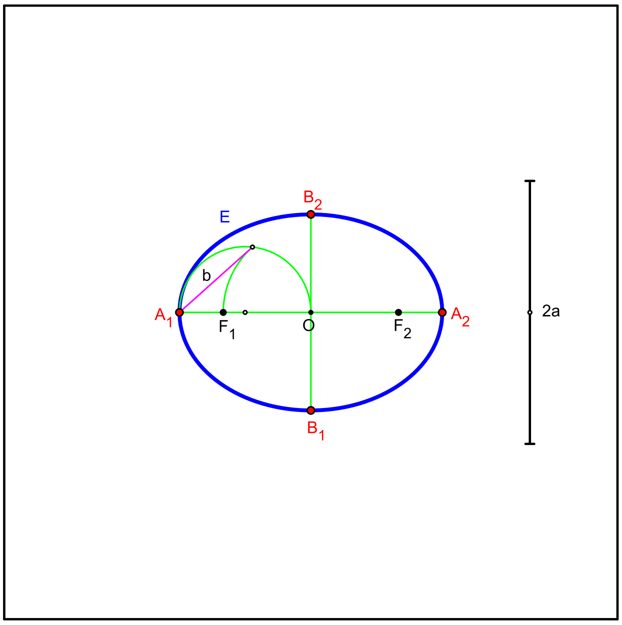


Solução do Exemplo E.26

retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e cateto $OF_1 = c$ e marque o eixo menor $OB_1 = OB_2 = b$ numa perpendicular a F_1F_2 por O.



Solução do Exercício E.1



Solução do Exercício E.2

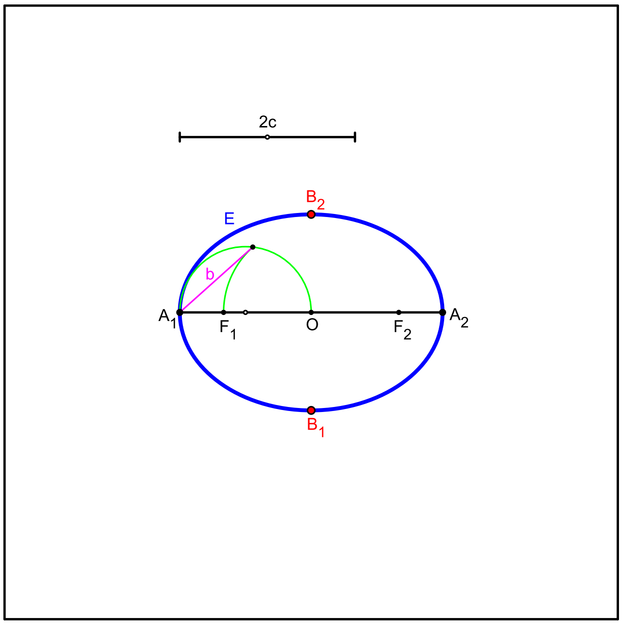
Exercício E.3: Determine o eixo menor B_1B_2 da elipse, dados o eixo maior A_1A_2 e a distância focal $2c$.

Solução: (i) Marque os focos $OF_1 = OF_2 = c$ sobre a reta suporte de A_1A_2, onde O é o ponto médio de A_1A_2; (ii) Determine o comprimento b do outro cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e cateto $OF_1 = c$ e marque o eixo menor B_1B_2 da elipse tal que

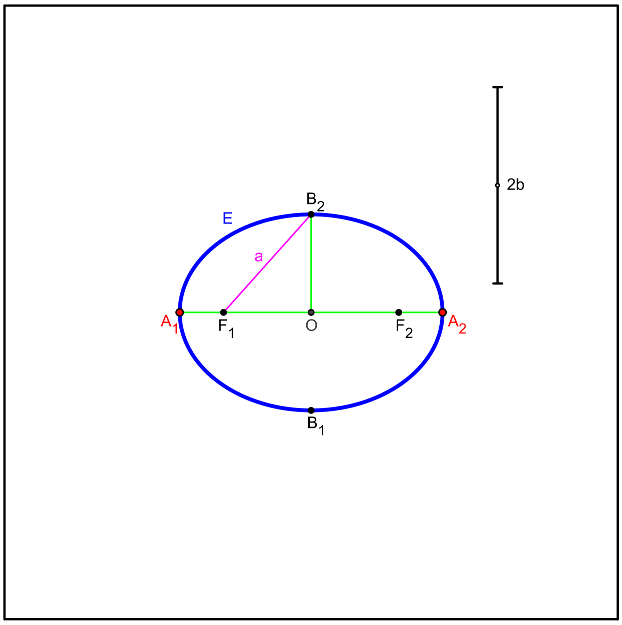
$OB_1 = OB_2 = b$.

Exercício E.4: Determine o eixo maior A_1A_2 da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e o comprimento $2b$ do eixo menor B_1B_2.

Solução: (i) Marque o eixo menor B_1B_2 da elipse tal que $OB_1 = OB_2 = b$, onde O é o ponto médio de F_1F_2; (ii) Determine o comprimento a da hipotenusa do triângulo retângulo de catetos $OB_1 = b$ e $OF_1 = c$ e marque o eixo maior A_1A_2 tal que $OA_1 = OA_2 = a$.



Solução do Exercício E.3



Solução do Exercício E.4

Exercício E.5: Determine o foco F_1 da elipse, dados o outro foco F_2, o extremo B_2 do eixo menor e o ponto P pertencente à curva.

Solução: (i) Definindo $B_2F_2 = a$ e $r = (2a - PF_2)$, trace os círculos $C_1 \equiv (B_2, a)$ e $C_2 \equiv (P, r)$, cujas interseções são as possíveis soluções F_1 e F_1' para o foco desejado.

Exercício E.6: Determine a tangente t e a normal n à elipse, dados o ponto de tangência P e os focos F_1 e F_2.

Solução: (i) Trace $C_1 \equiv (P, PF_2)$, determinando o ponto P' sobre a reta suporte de F_1P, com P entre F_1 e P'; (ii) Trace a mediatriz t de F_2P', determinando a tangente desejada; (iii) Trace pelo ponto P a perpendicular n à tangente t, determinando a normal desejada.

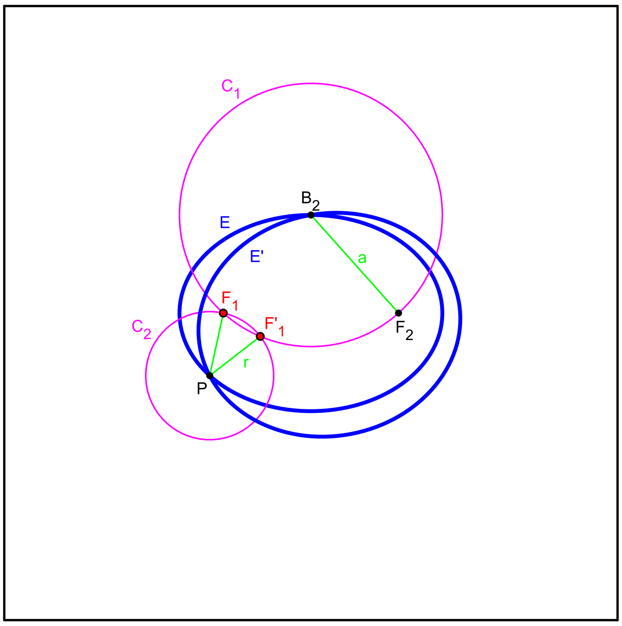
Exercício E.7: Determine o ponto de tangência P e o eixo maior A_1A_2 da elipse, dados os focos F_1 e F_2 e a tangente t por P.

Solução: Ver Exemplo E.7.

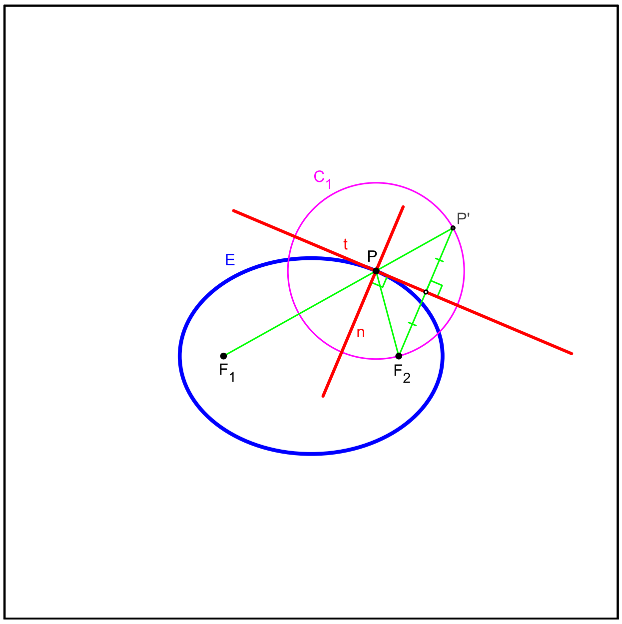
Exercício E.8: Determine o outro foco F_2 da elipse, dados o foco F_1, a tangente t, o comprimento $2a$ do eixo maior e o ponto P pertencente à curva.

Solução: (i) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$, determinando o ponto P' sobre a reta suporte de F_1P; (ii) Definindo $r = (2a - FP)$, trace o círculo $C_2 \equiv (P, r)$; (iii) Determine o simétrico F' de F em relação à tangente t e trace o círculo $C_3 \equiv (F', 2a)$, cujas interseções F_2 e F_2' com C_2 constituem as possíveis soluções para o outro foco desejado.

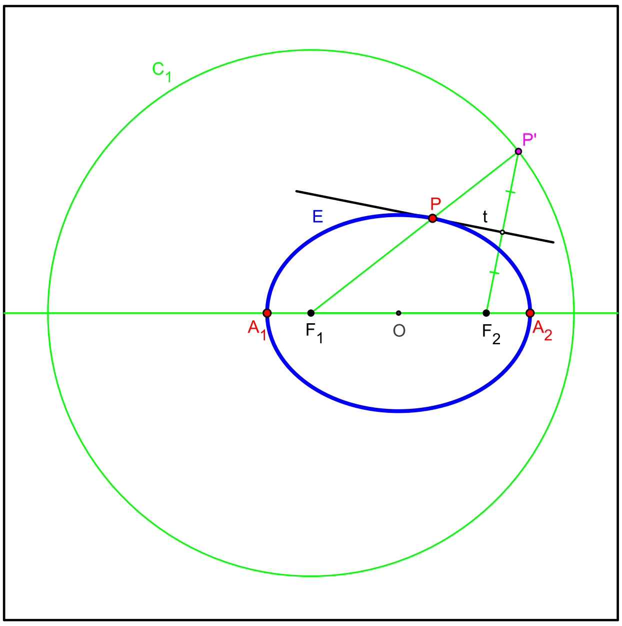
Exercício E.9: Determine o outro foco F_2 e os pontos de tangência P_1, P_2 e P_3 da



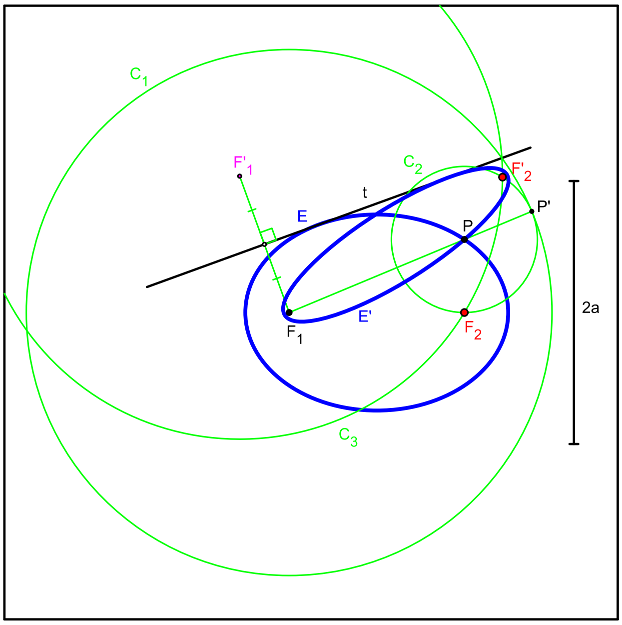
Solução do Exercício E.5



Solução do Exercício E.6



Solução do Exercício E.7



Solução do Exercício E.8

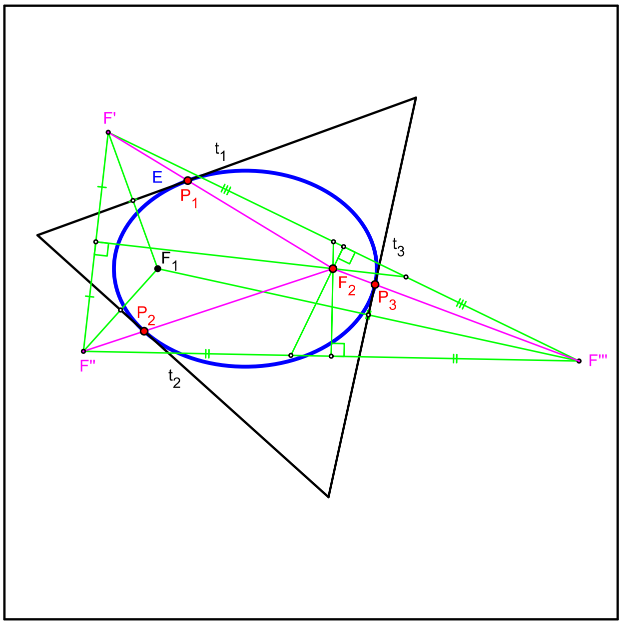
elipse, dados o foco F_1 e as tangentes t_1, t_2 e t_3.

Solução: (i) Determine o foco F_2 como descrito no Exemplo E.9; (ii) Trace F_2F', F_2F'' e F_2F''', determinando os pontos de tangência P_1, P_2 e P_3 sobre t_1, t_2 e t_3, respectivamente.

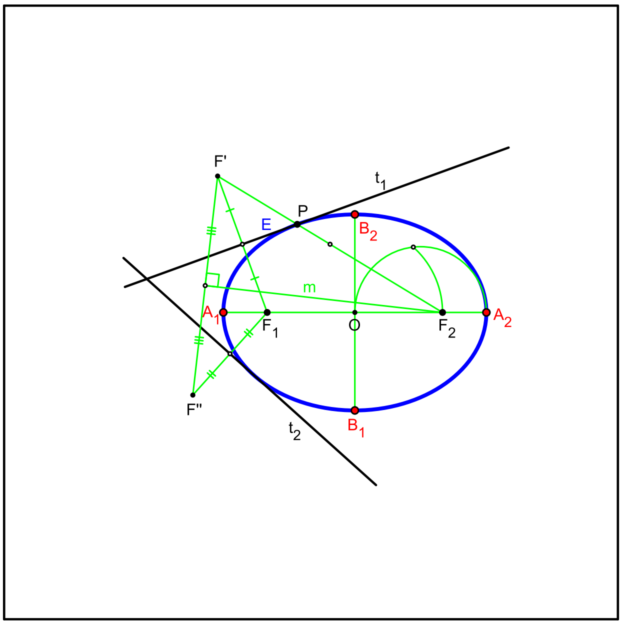
Exercício E.10: Determine os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2 da elipse, dados o foco F_1, as tangentes t_1 e t_2 e o ponto de tangência P_1 de t_1.

Solução: (i) Determine os simétricos F' e F'' do foco F_1 em relação às tangentes t_1 e t_2; (ii) Trace a mediatriz m de $F'F''$, determinando o foco F_2 desejado sobre o prolongamento de $F'P$; (iii) Marque o eixo maior $OA_1 = OA_2 = \frac{F_2F'}{2} = a$ sobre a reta suporte de F_1F_2, onde O é o ponto médio de F_1F_2; (iv) Determine o outro cateto b do triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$

e cateto $OF_1 = c$ e marque o eixo menor $OB_1 = OB_2 = b$ sobre a perpendicular a F_1F_2 por O.



Solução do Exercício E.9



Solução do Exercício E.10

Exercício E.11: Determine os focos F_1 e F_2 e o ponto de tangência P da elipse, dados o eixo maior A_1A_2 e a tangente t por P.

Solução: (i) Trace o círculo principal maior $C_a \equiv (O, OA_1)$, onde O é o ponto médio de A_1A_2, determinando os pontos F_1' e F_2' sobre a tangente t; (ii) Trace perpendiculares à tangente t por F_1' e F_2', determinando os focos F_1 e F_2, respectivamente, sobre o segmento A_1A_2; (iii) Prolongue a tangente t, determinando o ponto P_t sobre o prolongamento de A_1A_2; (iv) Definindo $d = F_2P_t$ e $2c = F_1F_2$, determine a 4ª proporcional $(2d+2c) : 2c = d : x_1$ e marque o conjugado harmônico P_n de P_t em relação ao segmento F_1F_2 tal que $x_1 = P_nF_2$, com P_n entre F_1 e F_2; (v) Trace uma perpendicular à tangente t por P_n, determinando o ponto de tangência P sobre t.

Exercício E.12: Determine o eixo maior A_1A_2 da elipse, dados o foco F_1, o extremo A_1 do eixo maior e a tangente t.

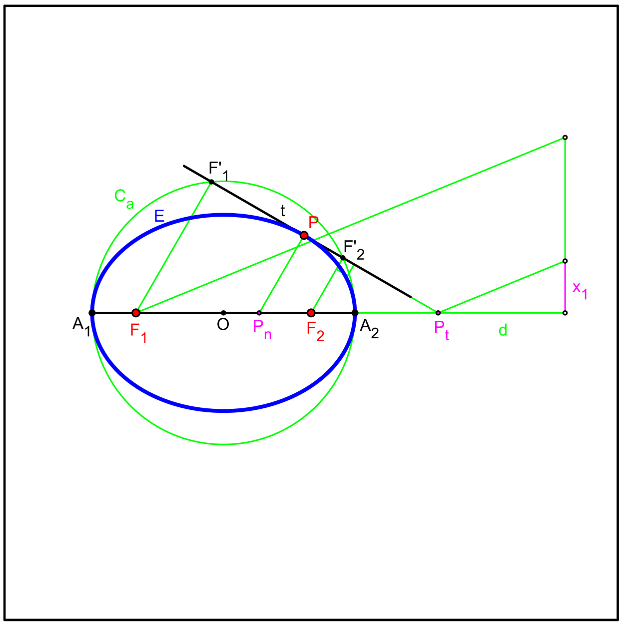
Solução: (i) Trace uma perpendicular p a A_1F_1 por A_1, determinando o ponto P' sobre o prolongamento da tangente t; (ii) Determine os simétricos F' e F'' do foco dado F_1 em relação às tangentes t e p, respectivamente; (iii) Trace a mediatriz m de $F'F''$, determinando o outro foco F_2 da elipse sobre a reta suporte de A_1F_1; (iv) Marque o vértice desejado A_2 tal que $F_2A_2 = A_1F_1$ sobre a reta suporte de A_1F_1.

Exercício E.13: Determine o outro foco F_2 da elipse, dados o foco F_1, o extremo B_1 do eixo menor e a tangente t.

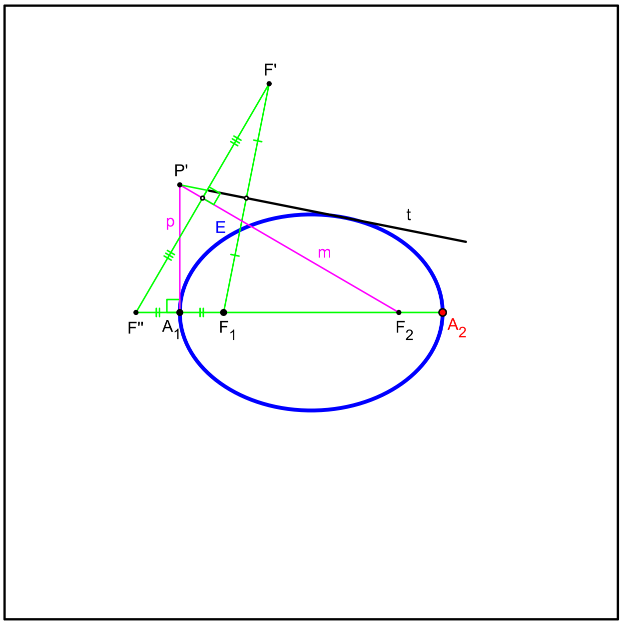
Solução: (i) Definindo $a = F_1B_1$, trace o círculo $C_1 \equiv (B_1, a)$; (ii) Determine o simétrico F' do foco F_1 em relação à tangente t dada; (iii) Trace o círculo $C_2 \equiv (F', 2a)$, determinando sobre C_1 o foco desejado F_2.

Exercício E.14: Determine os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2 da elipse, dados a reta suporte x do eixo maior, o foco F_1 e as tangentes t_1 e t_2.

Solução: (i) Determine os simétricos F' e F'' do foco dado F_1 em relação às tangentes t_1 e t_2, respectivamente; (ii) trace a mediatriz m de $F'F''$, determinando o outro foco F_2 sobre a reta x;

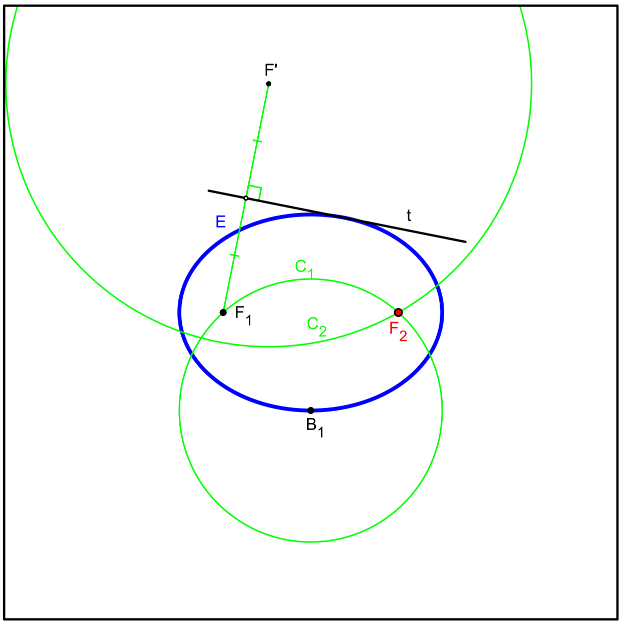


Solução do Exercício E.11

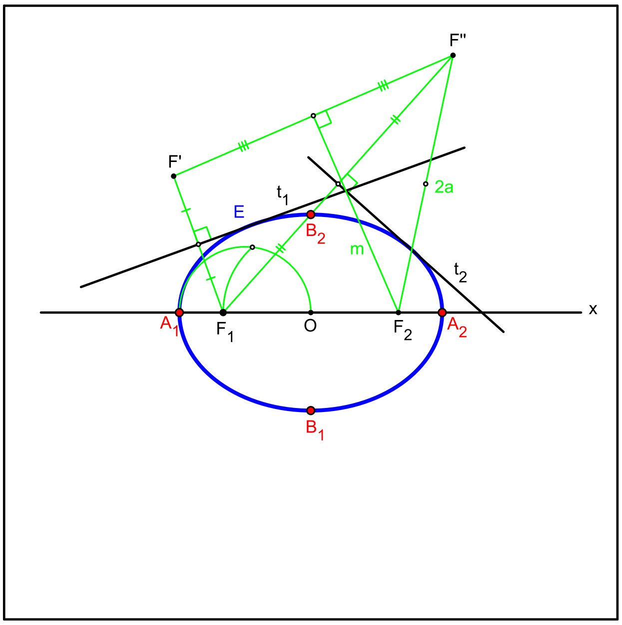


Solução do Exercício E.12

(iii) Definindo $F_2F' = F_2F'' = 2a$, marque $OA_1 = OA_2 = a$ sobre a reta x, onde O é o ponto médio de F_1F_2; (iv) Determine o outro cateto b do triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e cateto $OF_1 = c$ e marque $OB_1 = OB_2 = b$ sobre uma perpendicular à reta x por O.



Solução do Exercício E.13



Solução do Exercício E.14

Exercício E.15: Determine a tangente t à elipse, dados o foco F_1, o eixo maior A_1A_2 e a distância ℓ da tangente ao centro O da elipse.

Solução: (i) Determine o comprimento do outro cateto x_1 de um triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e cateto ℓ, onde O é o ponto médio de A_1A_2; (ii) Determine o vértice F' do triângulo retângulo $\Delta OF_2F'$ de hipotenusa $OF_2 = c$ e cateto $F_2F' = x_1$, e marque $OP' = \ell$ sobre a reta suporte de OF'; (iii) Trace a perpendicular t a OP' por P', determinando a tangente desejada.

Justificativa:

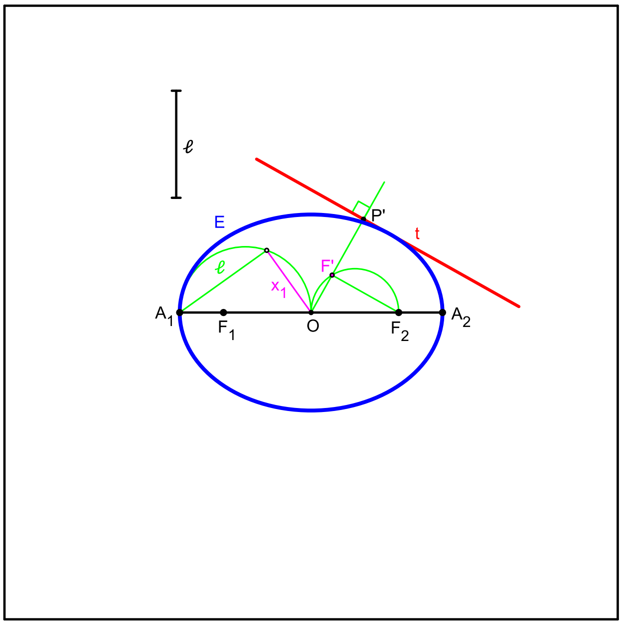
Obs. 1: Note que P' não é o ponto de tangência, mas sim o ponto de t mais próximo de O.

Obs. 2: Devido às simetrias da elipse, há na verdade 4 tangentes satisfazendo as condições do enunciado. De fato, o passo (ii) pode ser feito com cada um dos focos (e não somente com F_2) e abaixo ou acima do eixo A_1A_2.

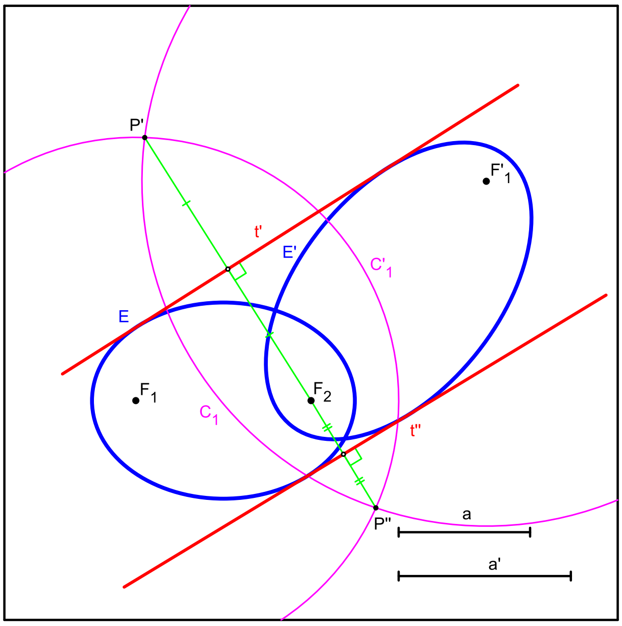
Exercício E.16: Determine as tangentes t_1 e t_2 comuns das elipses, dados os respectivos pares de focos (F_1, F_2) e (F_1, F_2') e os comprimentos dos semi-eixos maiores a e a'.

Solução: (i) Trace círculos diretores $C_1 \equiv (F_1, 2a)$ e $C_1' \equiv (F_1', 2a')$ de cada uma das elipses E e E', respectivamente, determinando suas interseções P' e P''; (ii) Trace as mediatrizes t' e t'' de F_2P' e F_2P'', respectivamente, que constituem as tangentes comuns desejadas.

Justificativa: Uma tangente comum é mediatriz de F_2P, onde F_2 é o foco comum e o ponto P deve pertencer simultaneamente aos círculos diretores do outro foco das duas elipses.



Solução do Exercício E.15



Solução do Exercício E.16

Exercício E.17: Determine o triângulo equilátero circunscrito à elipse, passando pelo extremo B_1 do eixo menor, dados os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

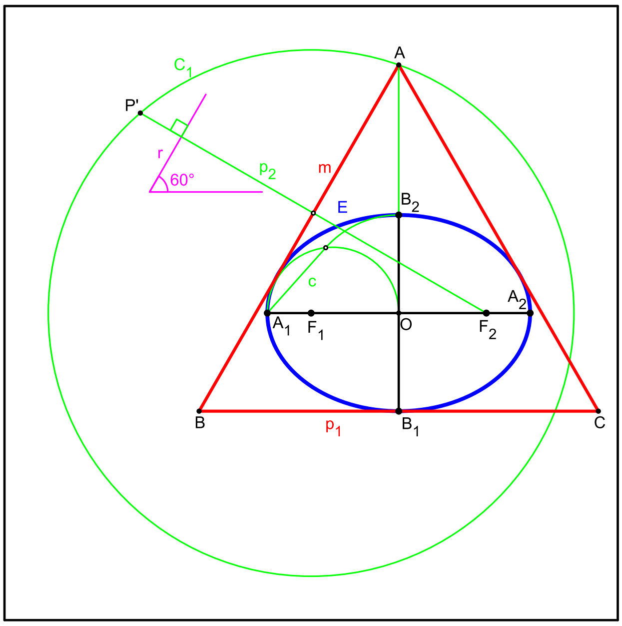
Solução: (i) Determine o outro cateto c do triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e cateto $OB_1 = b$, e marque os focos $OF_1 = OF_2 = c$ sobre o eixo A_1A_2, onde O é o ponto médio de A_1A_2; (ii) Trace uma paralela p_1 a A_1A_2 por B_1; (iii) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$, (iv) Trace uma reta r auxiliar fazendo 60° com o eixo A_1A_2 e uma perpendicular p_2 a r por F_2, determinando o ponto P' (qualquer uma das duas interseções) sobre o círculo diretor C_1; (v) Trace a mediatriz m de F_2P', determinando os vértices A e B do triângulo desejado sobre o prolongamento de B_1B_2 e sobre p_1, respectivamente; (vi) Determine o simétrico C de B em relação a B_1, completando o triângulo desejado.

Justificativa: Este problema se reduz a encontrar as tangentes a uma elipse fazendo ±60° com o eixo A_1A_2 (ver Exemplo E.10).

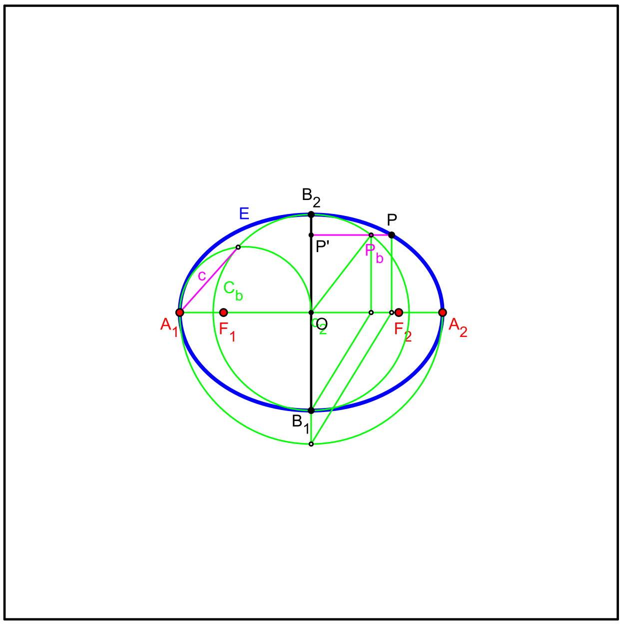
Exercício E.18: Determine os focos F_1 e F_2 e o eixo maior A_1A_2 da elipse, dados o

eixo menor B_1B_2 e o ponto P pertencente à curva.

Solução: (i) A determinação do eixo maior A_1A_2 é descrita no Exemplo E.23; (ii) Os focos são tais que $OF_1 = OF_2 = c$, onde O é o ponto médio de B_1B_2 e c é o comprimento do outro cateto do triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e cateto $OB_1 = b$.



Solução do Exercício E.17



Solução do Exercício E.18

Exercício E.19: Determine a tangente t à elipse, dados o eixo menor B_1B_2 e o ponto P de tangência de t.

Solução: Ver Exemplo E.23.

Exercício E.20: Determine os focos F_1 e F_2 e o eixo maior A_1A_2 da elipse, dados o eixo menor B_1B_2 e a tangente t.

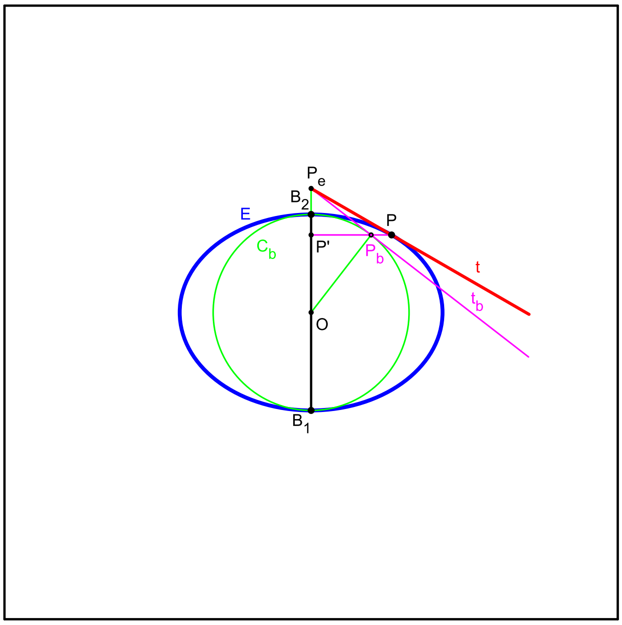
Solução: (i) Prolongue a tangente t determinando P_e sobre a reta suporte de B_1B_2; (ii) Trace o círculo principal menor $C_b \equiv (O, OB_1)$, onde O é o centro da elipse; (iii) Trace a tangente t' a C_b por P_e, determinando o ponto de tangência P_b; (iv) Trace uma perpendicular a B_1B_2 por P_b, determinando P' sobre B_1B_2 e P sobre a tangente t; (v) Determine a 4ª proporcional $P'P_b : P'P = OB_1 : x_1$, tal que $x_1 = a$, o que permite determinar o eixo maior $OA_1 = OA_2 = a$ da elipse sobre a perpendicular a B_1B_2 por O; (vi) Determine o comprimento do outro cateto c do triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e cateto $OB_1 = b$ e marque os focos desejados sobre o eixo A_1A_2 tais que $OF_1 = OF_2 = c$.

Exercício E.21: Determine as interseções da reta r com a elipse definida por seus eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

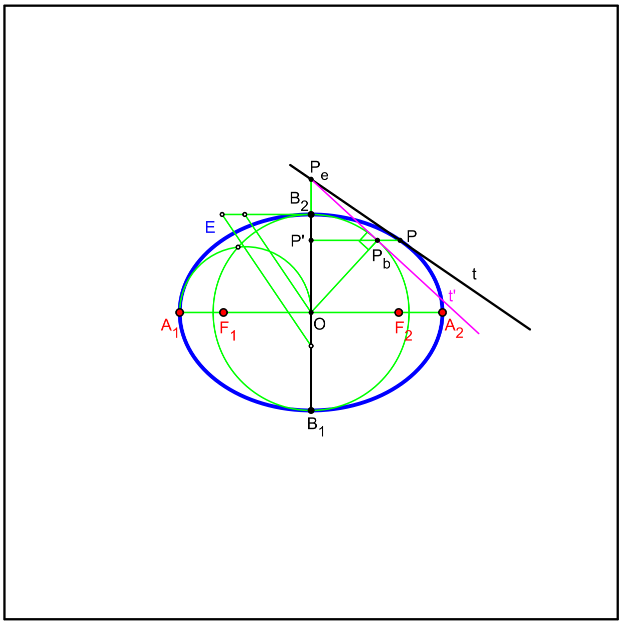
Solução: Ver Exemplo E.24.

Exercício E.22: Determine os focos F_1 e F_2 da elipse, dados a reta suporte x do eixo maior, a razão $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, a tangente t e o ponto P de tangência de t.

Solução: (i) Trace uma perpendicular ao eixo x pelo ponto de tangência P, determinando o ponto P' sobre o eixo x e marque o ponto P_a tal que $P'P_a = \frac{a}{b}P'P = 3P'P$ sobre esta perpendicular; (ii) Prolongue t, determinando o ponto P_e sobre o eixo x; (iii) Trace a reta t_a suporte de P_eP_a e trace uma perpendicular a t_a por P_a, determinando o centro O da elipse



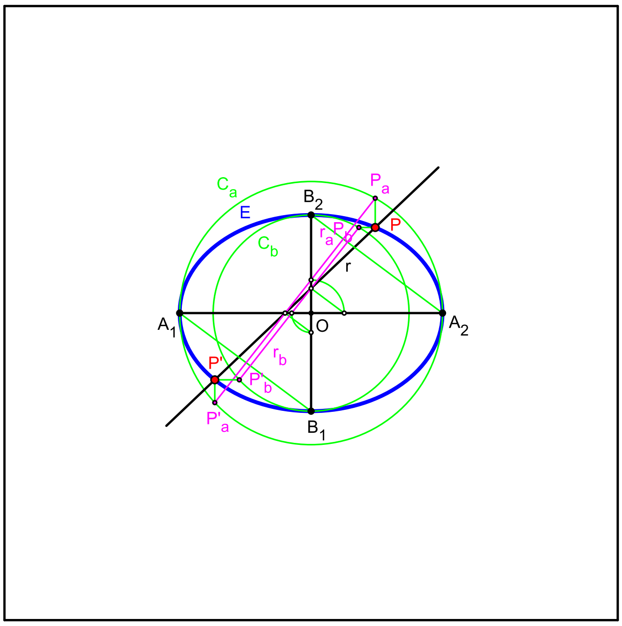
Solução do Exercício E.19



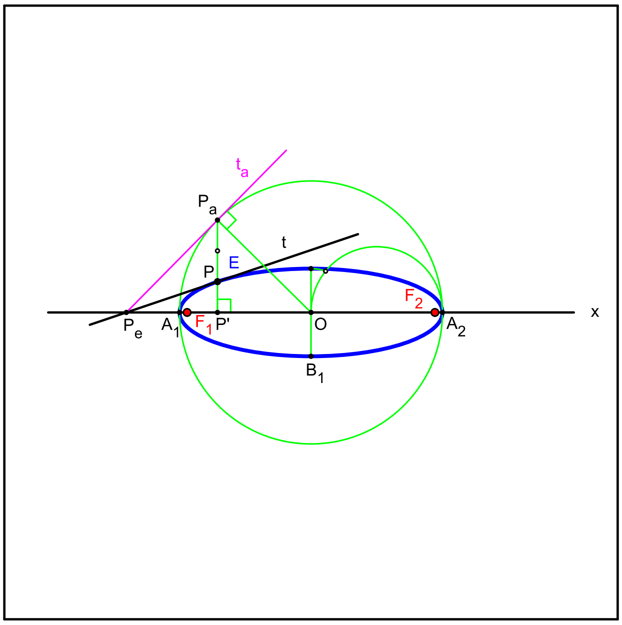
Solução do Exercício E.20

sobre o eixo x; (iv) Marque sobre o eixo x o eixo maior tal que $OA_1 = OA_2 = OP_a = a$ e marque sobre uma perpendicular ao eixo x por O o eixo menor tal que $OB_1 = OB_2 = b = \frac{a}{3}$; (v) Determine o comprimento do outro cateto c do triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e cateto $OB_1 = b$ e marque os focos desejados sobre o eixo x tais que $OF_1 = OF_2 = c$.

Justificativa: A transformação de afinidade com razão $k = \frac{a}{b}$ mapeia o ponto P no ponto P_a, levando a tangente t na reta t_a, de modo que OP_a é ortogonal a t_a, o que permite determinar o ponto O.



Solução do Exercício E.21



Solução do Exercício E.22

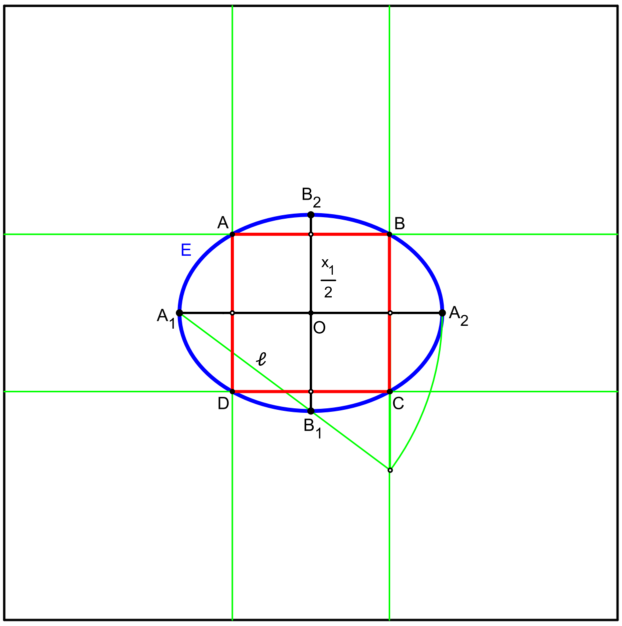
Exercício E.23: Determine o quadrado inscrito à elipse, com os lados paralelos aos

eixos, dados os eixos maior A_1A_2 e menor B_1B_2.

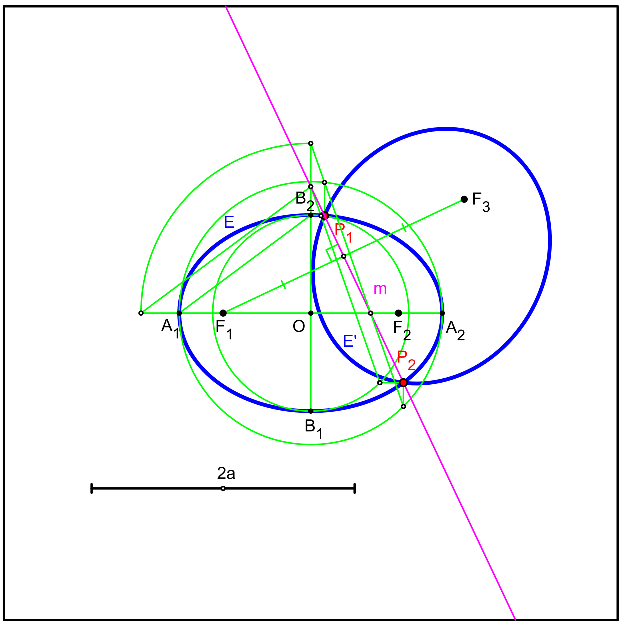
Solução: (i) Definindo $\ell = \sqrt{a^2+b^2}$, determine a 4a proporcional $\ell : b = 2a : x_1$; (ii) Trace duas retas paralelas distando $\frac{x_1}{2}$ de A_1A_2, e outras duas retas paralelas distando $\frac{x_1}{2}$ de B_1B_2, determinando os vértices A, B, C e D do quadrado desejado.

Exercício E.24: Determine os pontos de interseção das elipses, dados os respectivos pares de focos (F_1, F_2) e (F_2, F_3) e o comprimento comum $2a$ dos eixos maiores.

Solução: (i) Trace a mediatriz m de F_1F_3, tornando a questão equivalente ao Exemplo E.24, onde devemos determinar a interseção da reta m com qualquer uma das elipses E ou E'.



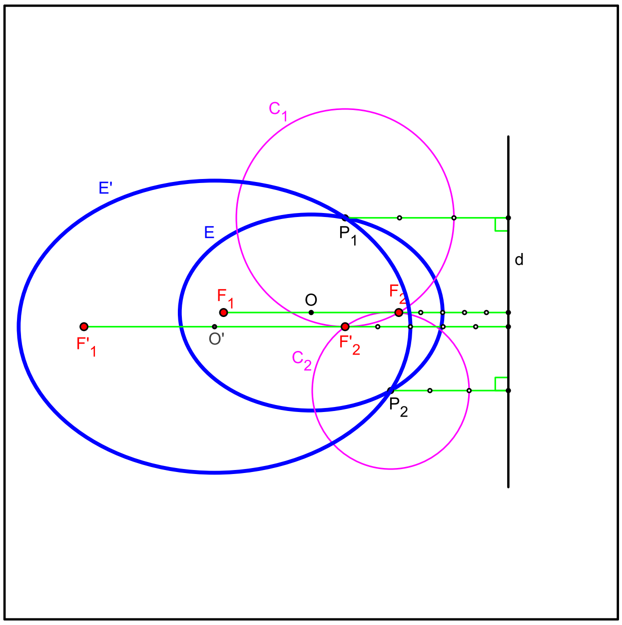
Solução do Exercício E.23



Solução do Exercício E.24

Exercício E.25: Determine os focos F_1 e F_2 da elipse, dados a diretriz d, os pontos P_1 e P_2 pertencentes à curva e a excentricidade $e = \frac{2}{3}$.

Solução: (i) Determine as distâncias d_1 e d_2 dos pontos P_1 e P_2 dados à diretriz d; (ii) Trace os círculos $C_1 \equiv (P_1, d_1)$ e $C_2 \equiv (P_2, d_2)$, determinando um dos focos F_2 e F_2' (há duas possíveis soluções); (iii) Sobre uma perpendicular à diretriz d por F_2, marque o centro O da elipse tal que $OF_2 = \frac{4\ell}{5}$, onde ℓ é a distância de F_2 à diretriz d dada, e o outro foco F_1 tal que $OF_1 = OF_2$.



Solução do Exercício E.25

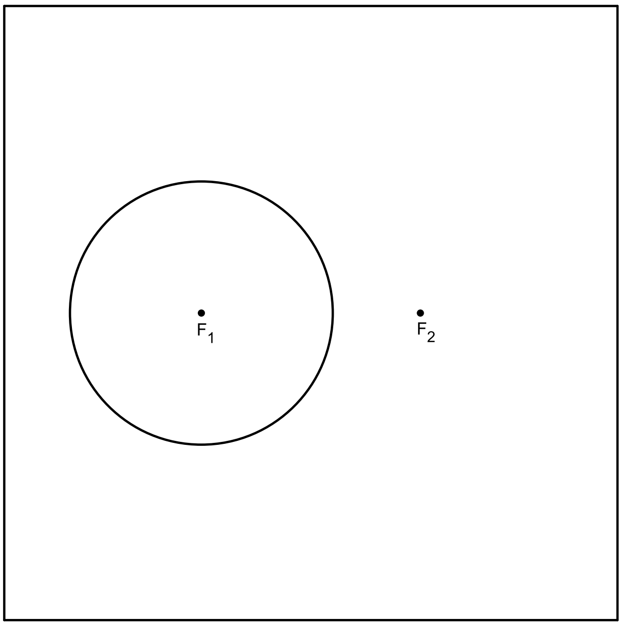
Capítulo 2

Hipérbole

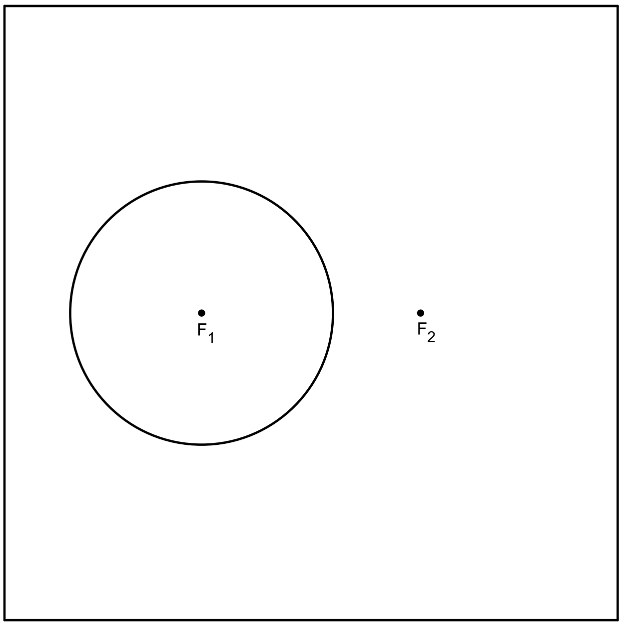
2.1 Exemplos

Exemplo H.1: Determine os pontos da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.

Exemplo H.2: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.



Exemplo H.1



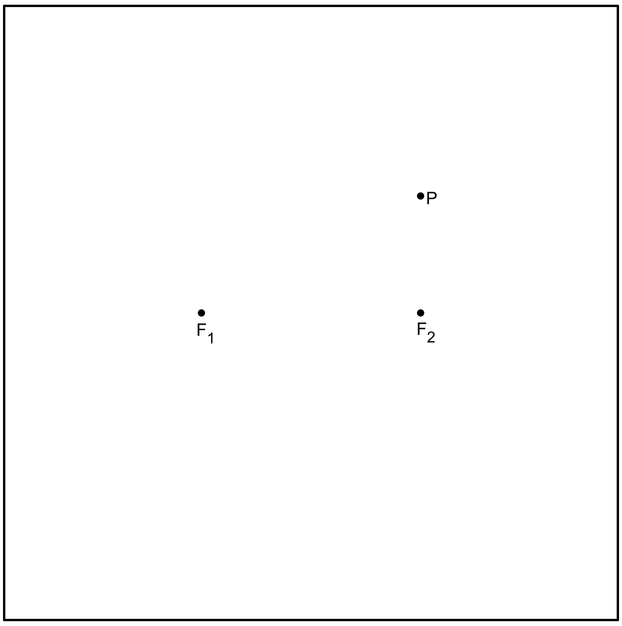
Exemplo H.2

Exemplo H.3: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o ponto P da curva.

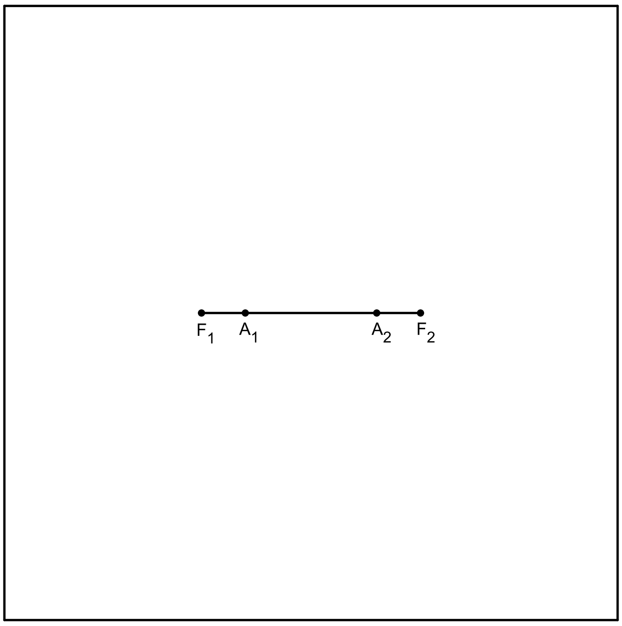
Exemplo H.4: Determine os pontos da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o eixo transverso A_1A_2.

Exemplo H.5: Determine o parâmetro da hipérbole, dados os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2.

Exemplo H.6: Determine o ponto de tangência P e os eixos transverso A_1A_2 e não

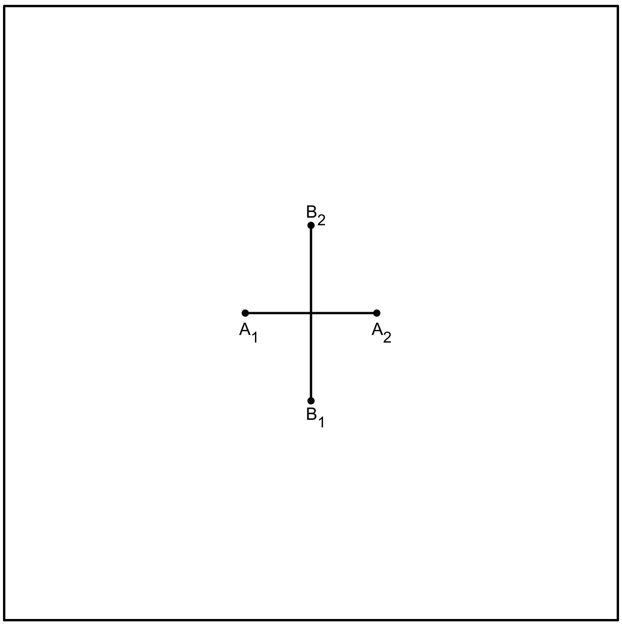


Exemplo H.3

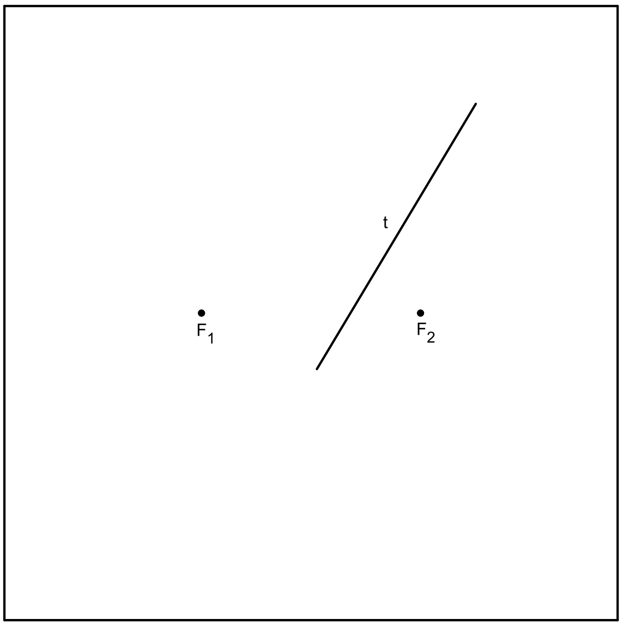


Exemplo H.4

transverso B_1B_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e a tangente t por P.



Exemplo H.5



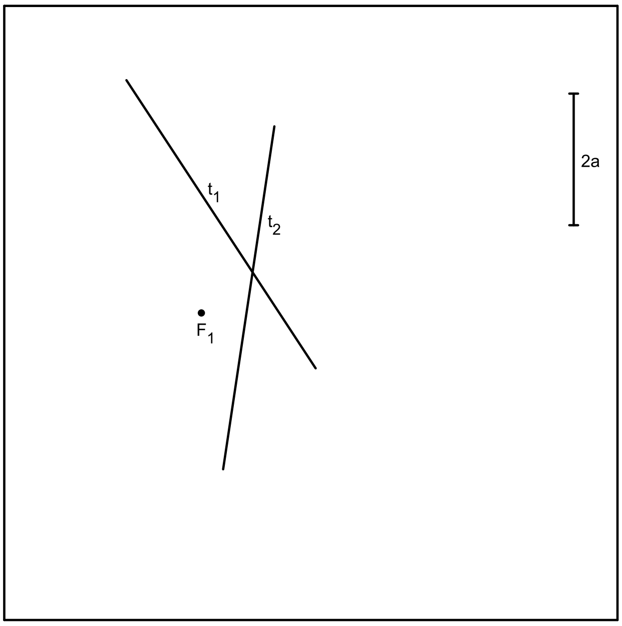
Exemplo H.6

Exemplo H.7: Determine o outro foco F_2 da hipérbole, dados o foco F_1, as tangentes t_1 e t_2 e o comprimento $2a$ do eixo transverso.

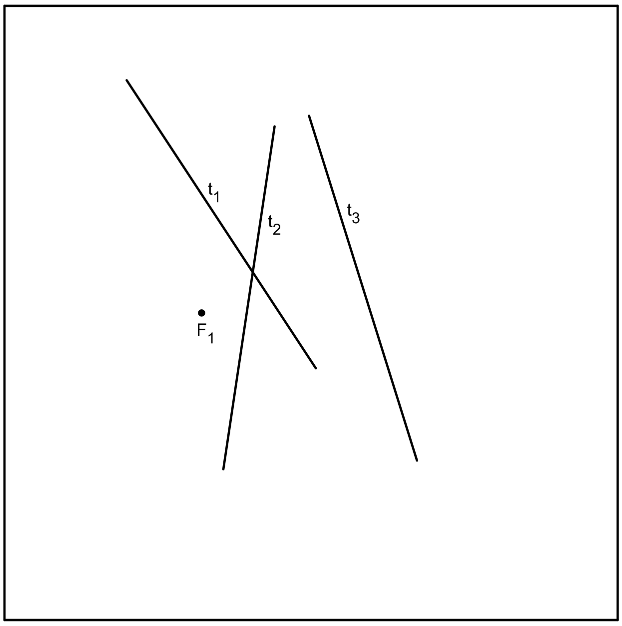
Exemplo H.8: Determine o outro foco F_2 da hipérbole, dados o foco F_1 e as tangentes t_1, t_2 e t_3.

Exemplo H.9: Determine as tangentes t_1 e t_2 da hipérbole paralelas à reta r, dados os focos F_1 e F_2, o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$ e a reta r.

Exemplo H.10: Determine as tangentes t_1 e t_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e

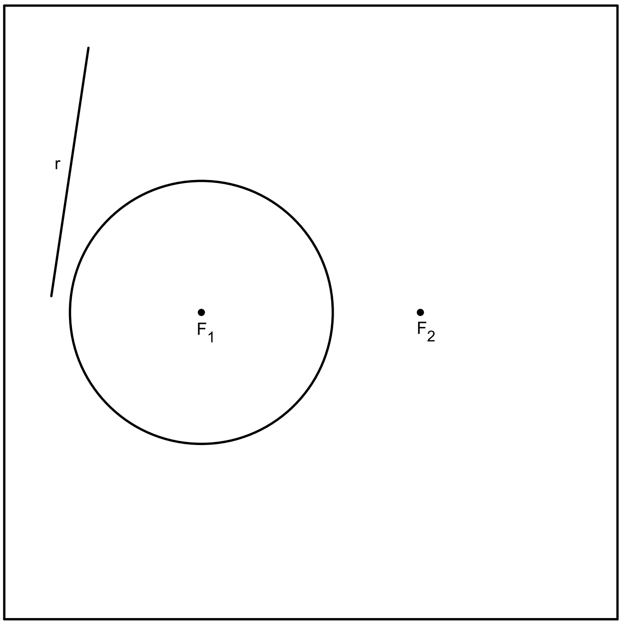


Exemplo H.7

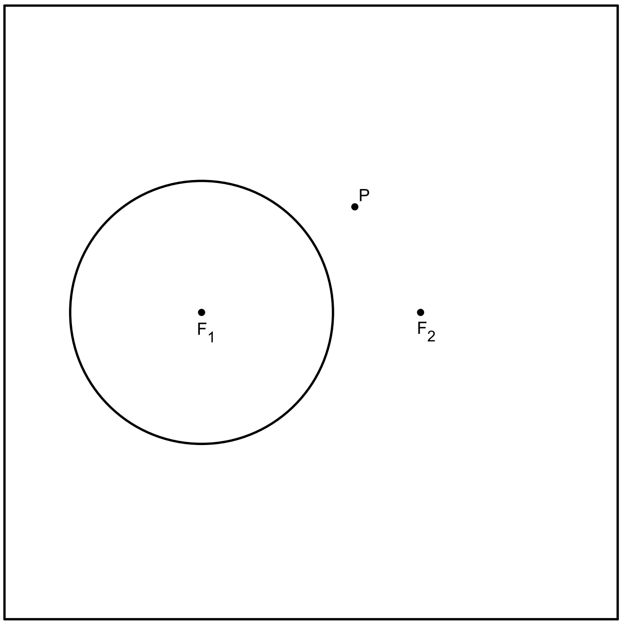


Exemplo H.8

F_2, o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$ e o ponto P externo à hipérbole e pertencente às tangentes t_1 e t_2.



Exemplo H.9

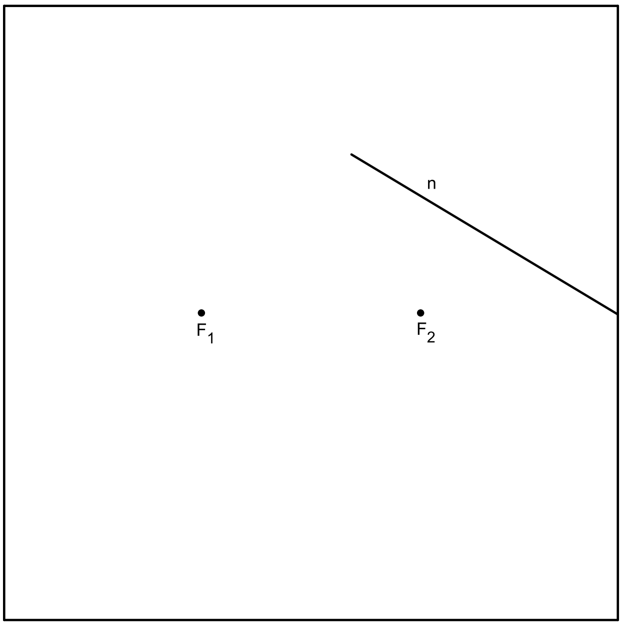


Exemplo H.10

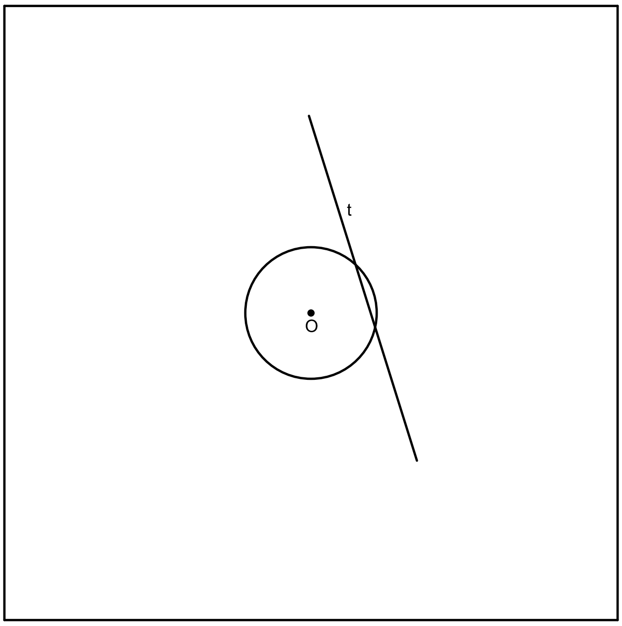
Exemplo H.11: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e a normal n.

Exemplo H.12: Determine o lugar geométrico dos focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados o círculo principal maior $C_o \equiv (O, a)$ e a tangente t.

Exemplo H.13: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados o centro O, o com-



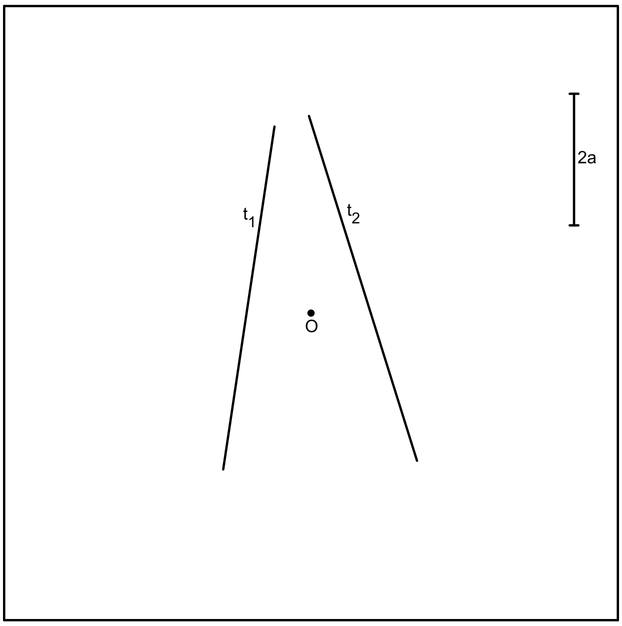
Exemplo H.11



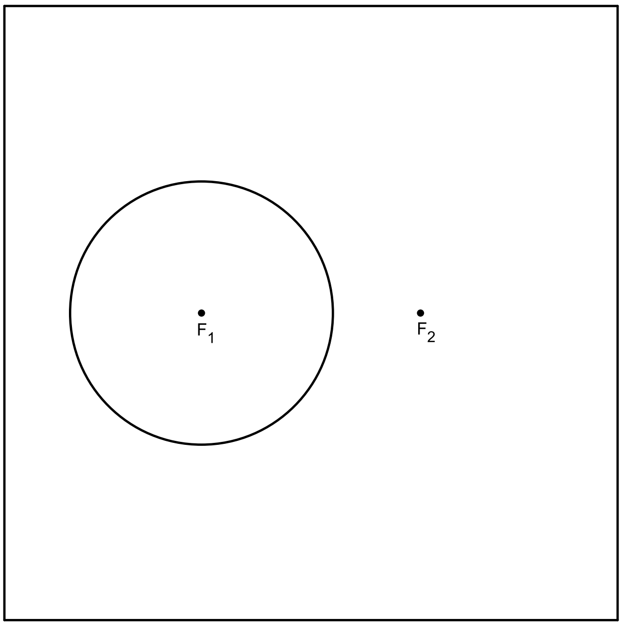
Exemplo H.12

primento $2a$ do eixo transverso e as tangentes t_1 e t_2.

Exemplo H.14: Determine as assíntotas da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.



Exemplo H.13

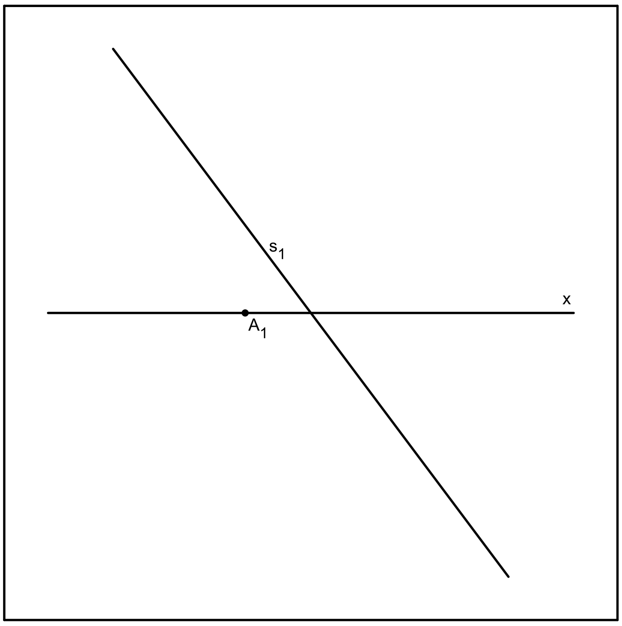


Exemplo H.14

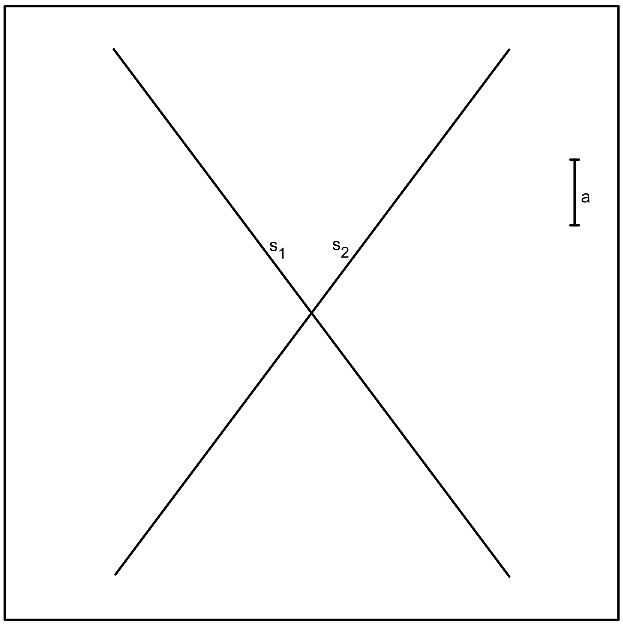
Exemplo H.15: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados a assíntota s_1, o vértice A_1 e a reta suporte x do eixo transverso.

Exemplo H.16: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados as assíntotas s_1 e s_2 e o comprimento a do semi-eixo transverso.

Exemplo H.17: Determine o outro foco F_2 da hipérbole, dados o foco F_1, as tangentes



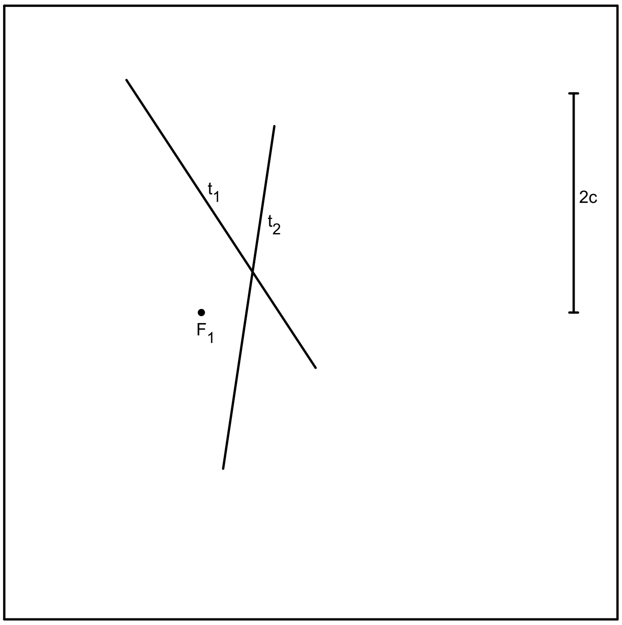
Exemplo H.15



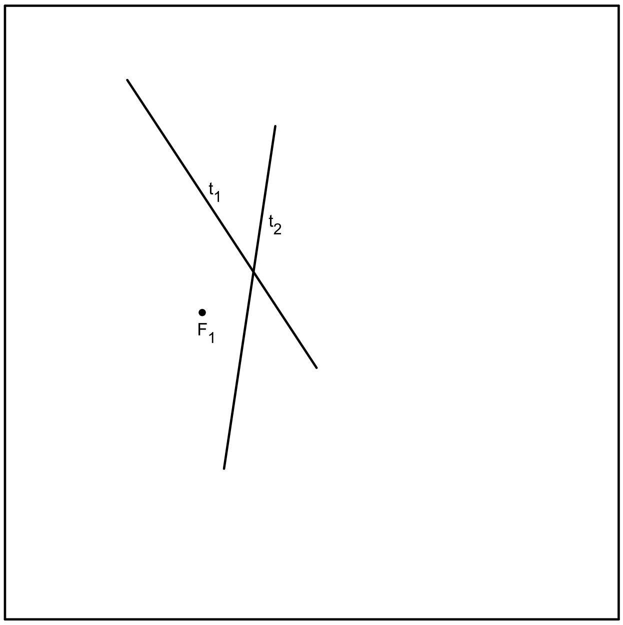
Exemplo H.16

t_1 e t_2 e a distância focal $2c$.

Exemplo H.18: Determine o lugar geométrico do centro O da hipérbole, dados o foco F_1 e as tangentes t_1 e t_2.



Exemplo H.17

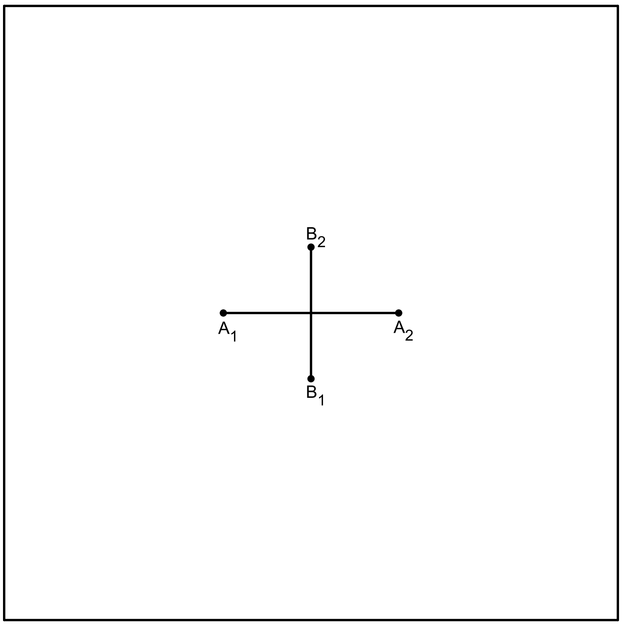


Exemplo H.18

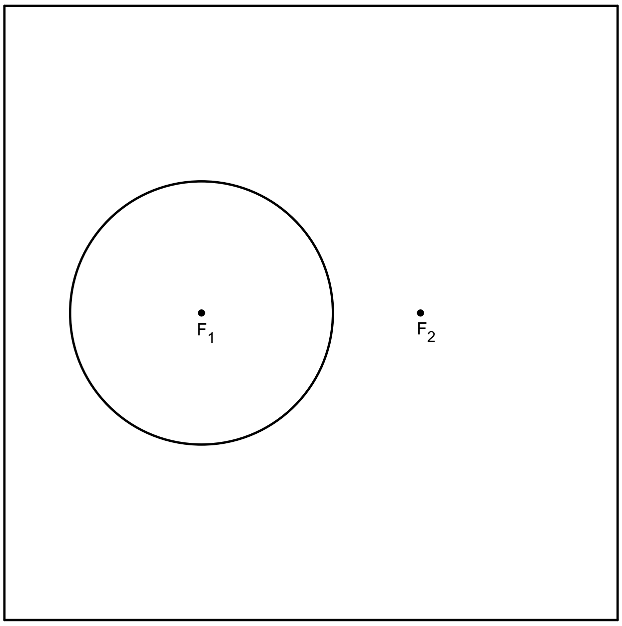
Exemplo H.19: Determine o círculo ortótico C da hipérbole, dados os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2.

Exemplo H.20: Determine as diretrizes da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.

Exemplo H.21: Determine a hipérbole cuja razão das distâncias de seus pontos ao



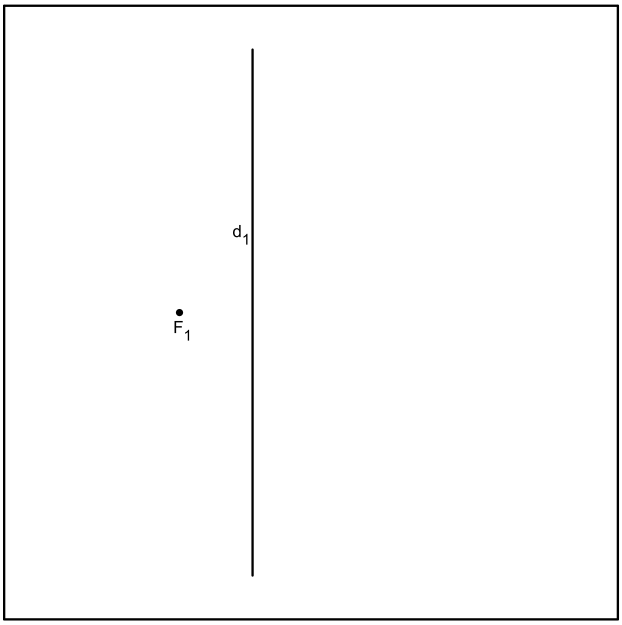
Exemplo H.19



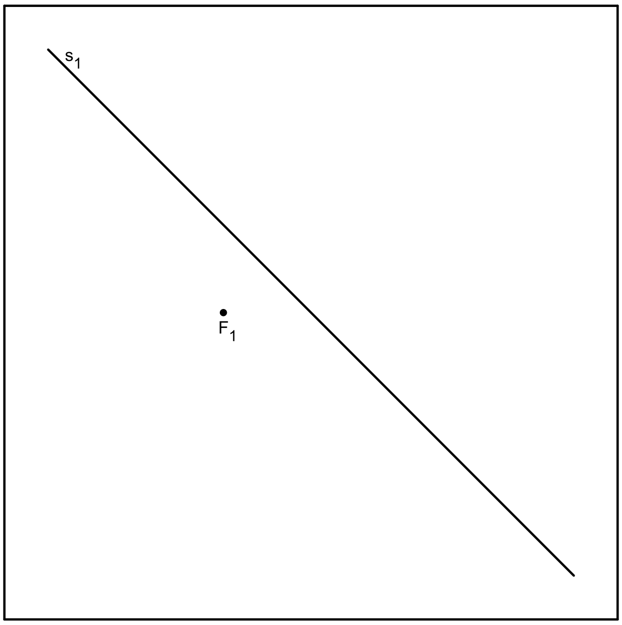
Exemplo H.20

ponto F_1 e à reta d_1 é igual a $\frac{3}{2}$.

Exemplo H.22: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole equilátera, dados o foco F_1 e a assíntota s_1.



Exemplo H.21

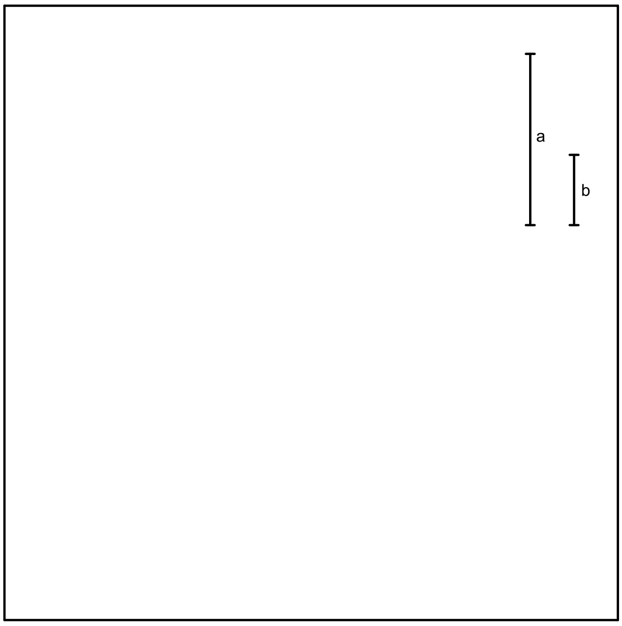


Exemplo H.22

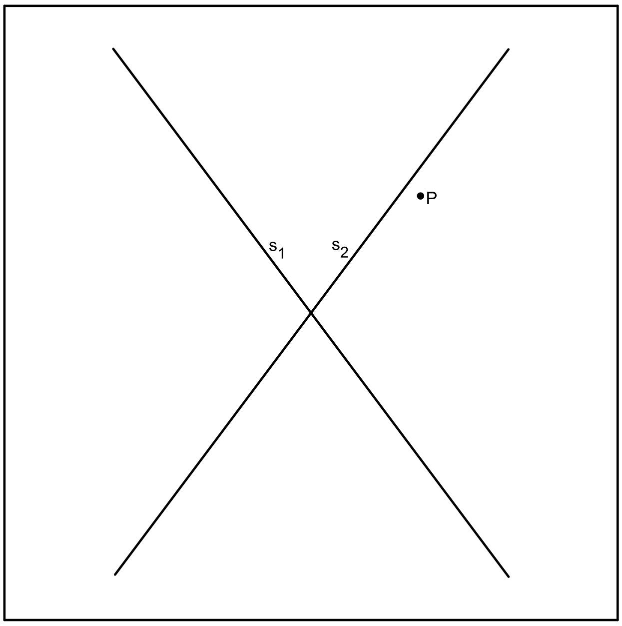
Exemplo H.23: Determine a média geométrica entre os segmentos a e b dados.

Exemplo H.24: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dadas as assíntotas s_1 e s_2 e o ponto P da curva.

Exemplo H.25: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados uma assíntota s_1,



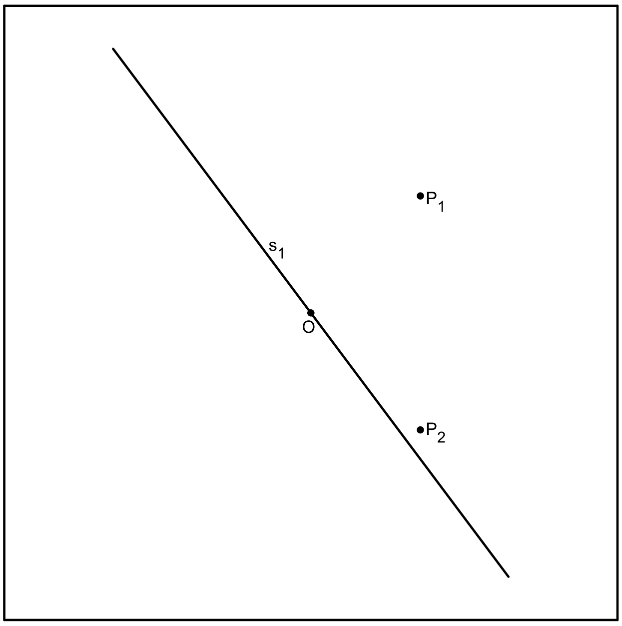
Exemplo H.23



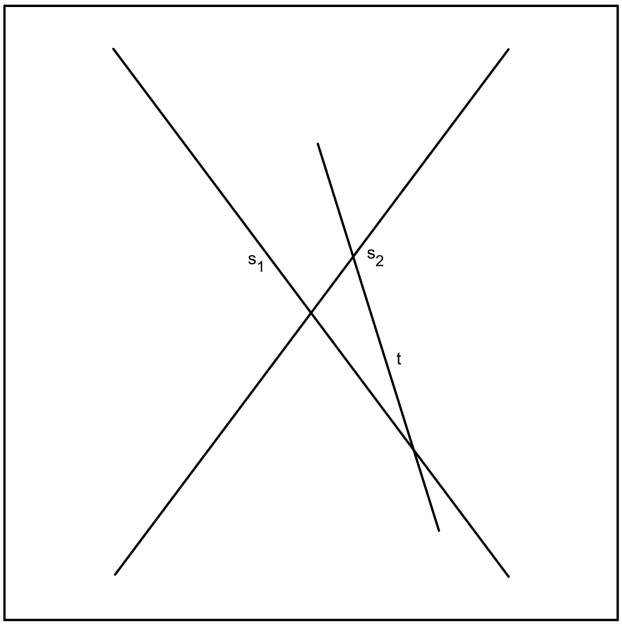
Exemplo H.24

dois pontos P_1 e P_2 da curva e o centro O.

Exemplo H.26: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dadas as assíntotas s_1 e s_2 e a tangente t.



Exemplo H.25

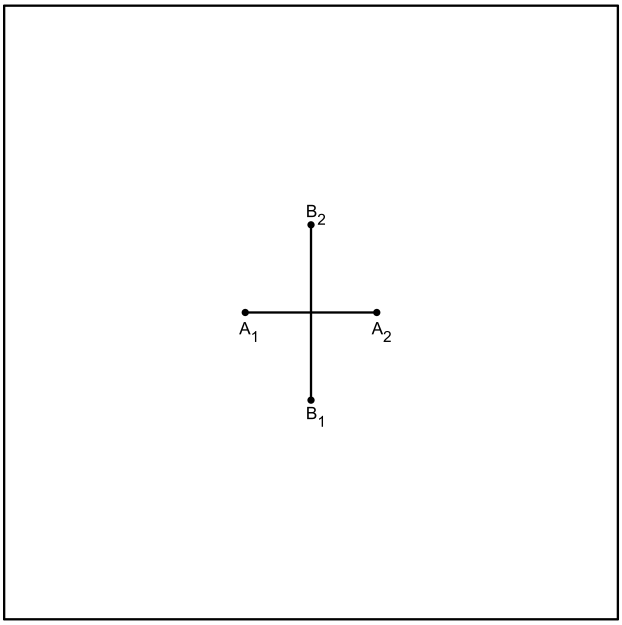


Exemplo H.26

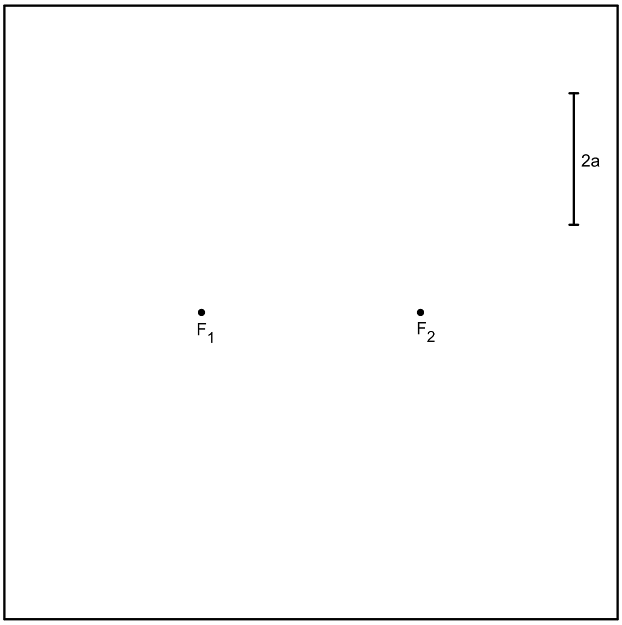
2.2 Exercícios

H.1: **Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2.**

Exercício H.2: **Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transversoB_1B_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o comprimento $2a$ do eixo transverso A_1A_2.**



Exercício H.1



Exercício H.2

Exercício H.3: **Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transversoB_1B_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o comprimento $2b$ do eixo não transverso B_1B_2.**

Exercício H.4: **Determine os eixos de uma elipse e de uma hipérbole, dados os focos comuns F_1 e F_2 e uma interseção P das duas cônicas.**

Exercício H.5: **Determine a tangente t e a normal n à hipérbole, dados o ponto de tangência P e os focos F_1 e F_2.**

Exercício H.6: **Determine o ponto de tangência P e o eixo transverso A_1A_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e a tangente t por P.**

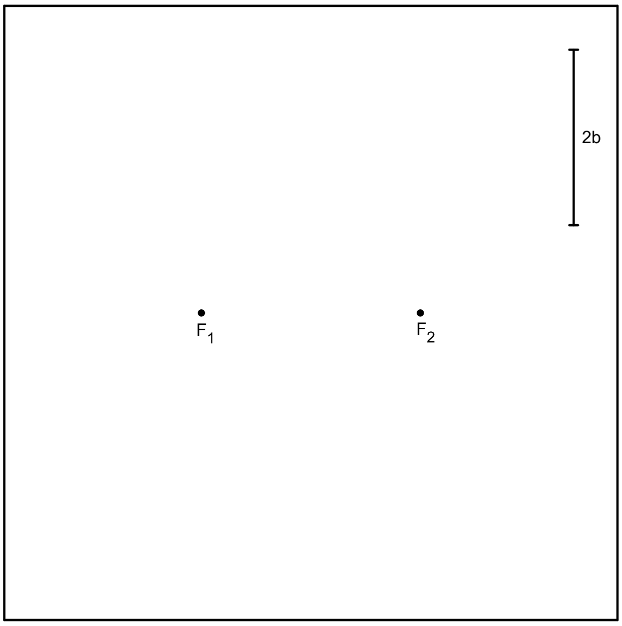
Exercício H.7: **Determine o outro foco F_2 da hipérbole, dados o foco F_1, a tangente t_1, o comprimento $2a$ do eixo transverso e o ponto P pertencente à curva.**

Exercício H.8: **Determine o outro foco F_2 e os pontos de tangência P_1, P_2 e P_3 da hipérbole, dados o foco F_1 e as tangentes t_1, t_2 e t_3.**

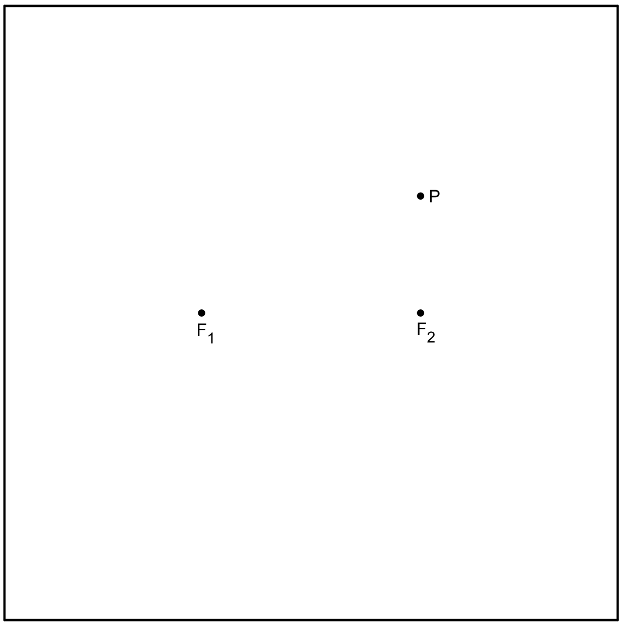
Exercício H.9: **Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole, dados o foco F_1, as tangentes t_1 e t_2 e o ponto de tangência P_1 de t_1.**

Exercício H.10: **Determine os focos F_1 e F_2 e o ponto de tangência P_1 da hipérbole, dados o eixo transverso A_1A_2 e a tangente t por P_1.**

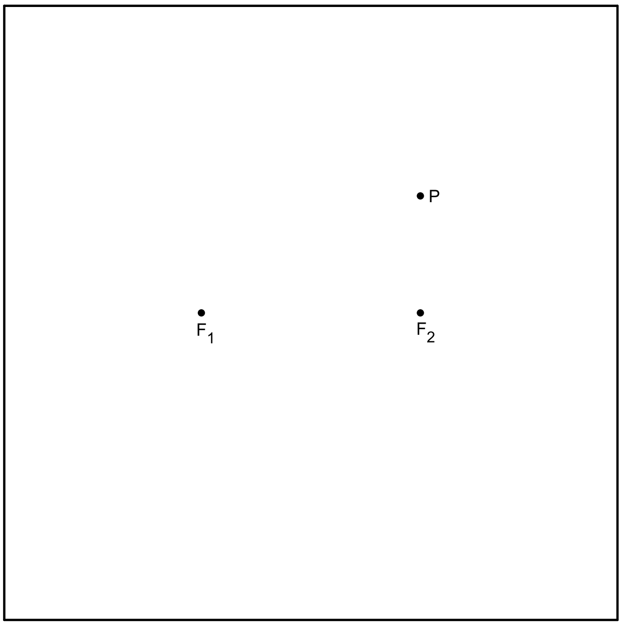
Exercício H.11: **Determine o eixo transverso A_1A_2 da hipérbole, dados o foco F_1, o**



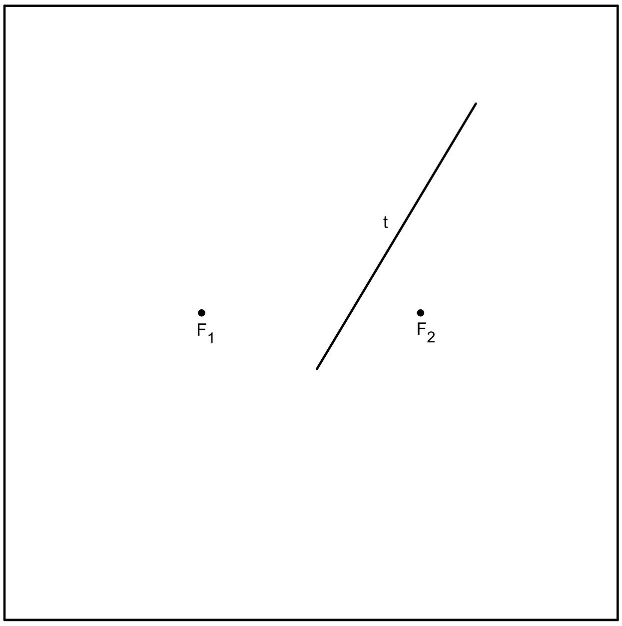
Exercício H.3



Exercício H.4



Exercício H.5



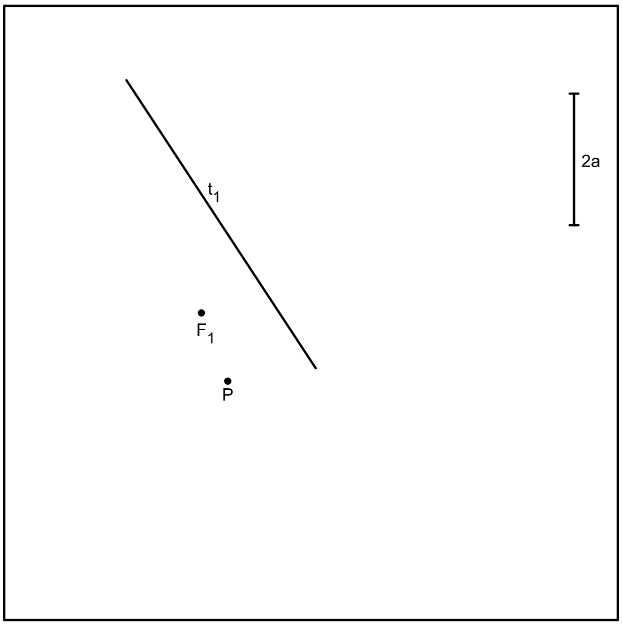
Exercício H.6

extremo A_2 do eixo transverso e a tangente t.

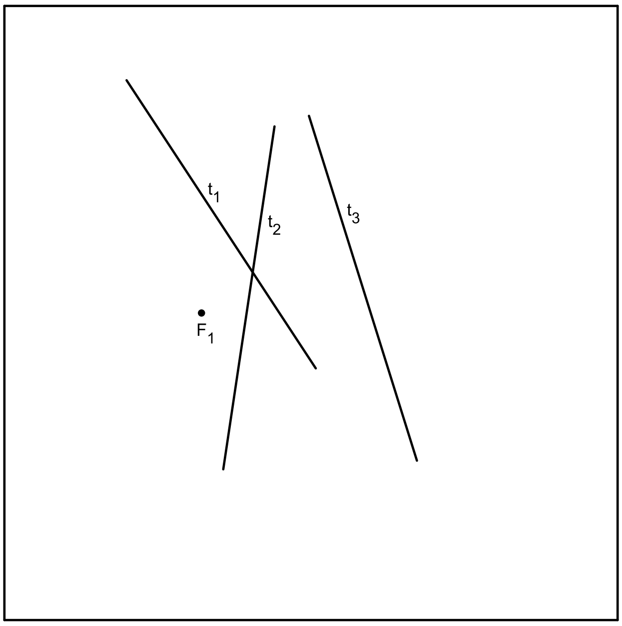
Exercício H.12: Determine as normais n_1 e n_2 da hipérbole pelo ponto P, dados os focos F_1 e F_2 e o extremo A_2 do eixo transverso.

Exercício H.13: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole, dados a reta suporte x do eixo maior, o foco F_1 e as tangentes t_1 e t_2.

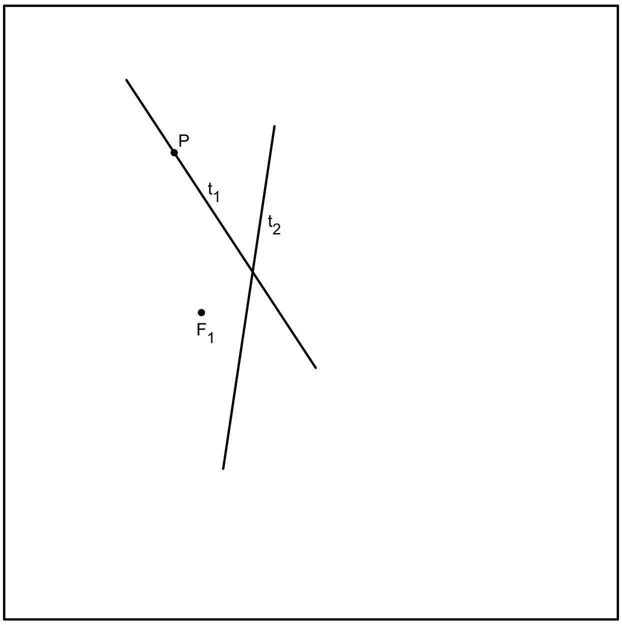
Exercício H.14: Determine a tangente t à hipérbole, dados os focos F_1 e F_2, o extremo A_1 do eixo transverso e a distância ℓ da tangente ao centro da hipérbole.



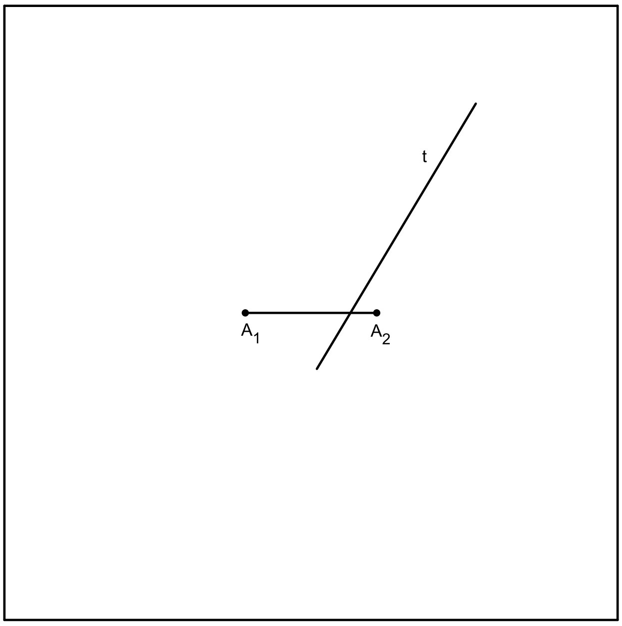
Exercício H.7



Exercício H.8



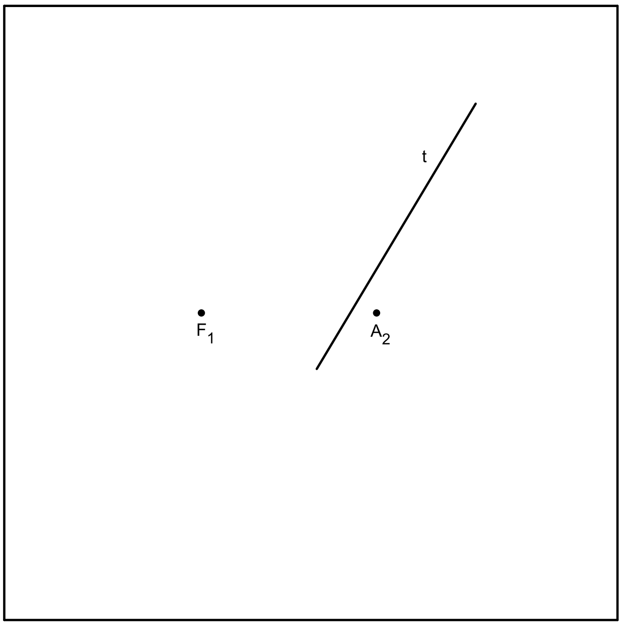
Exercício H.9



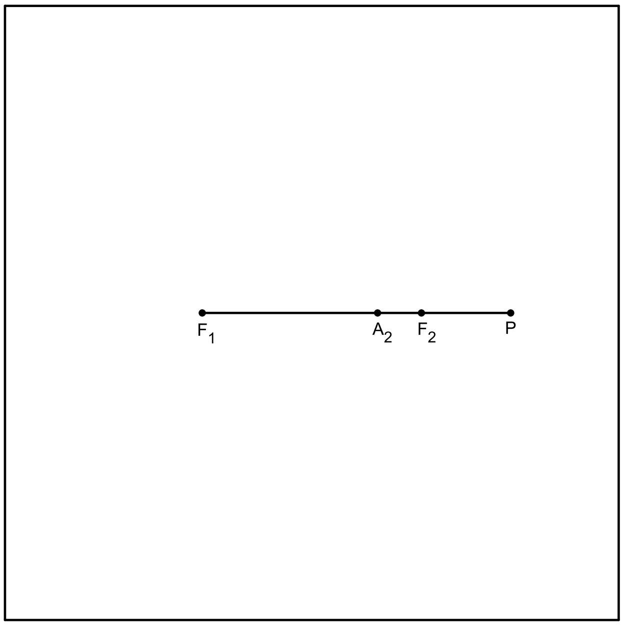
Exercício H.10

Exercício H.15: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados o extremo A_2 do eixo transverso, a assíntota s_2 e a excentricidade $e = \frac{5}{4}$.

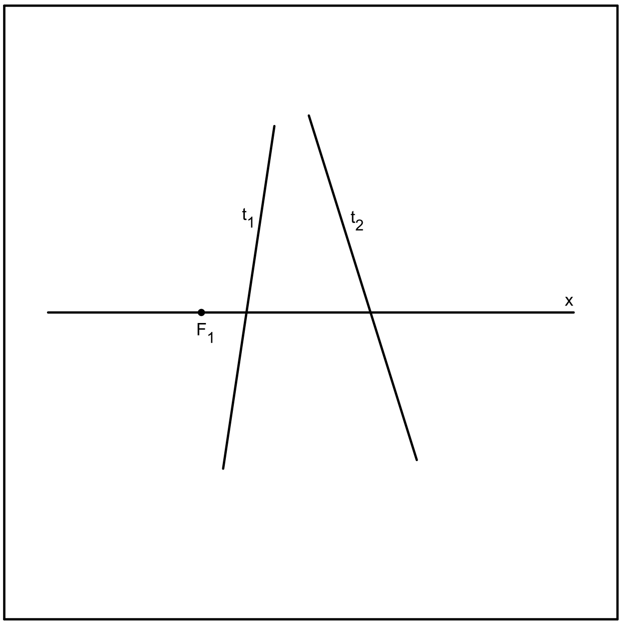
Exercício H.16: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados o centro O, a assíntota s_2, a tangente t e o ponto de tangência P.



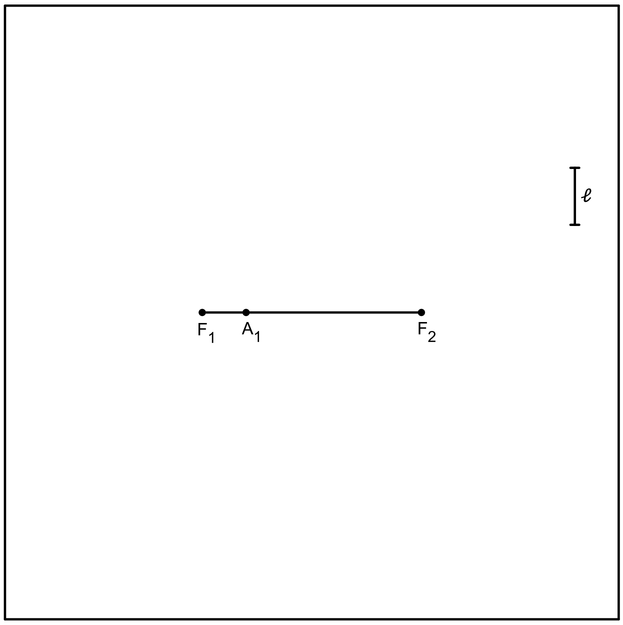
Exercício H.11



Exercício H.12



Exercício H.13



Exercício H.14

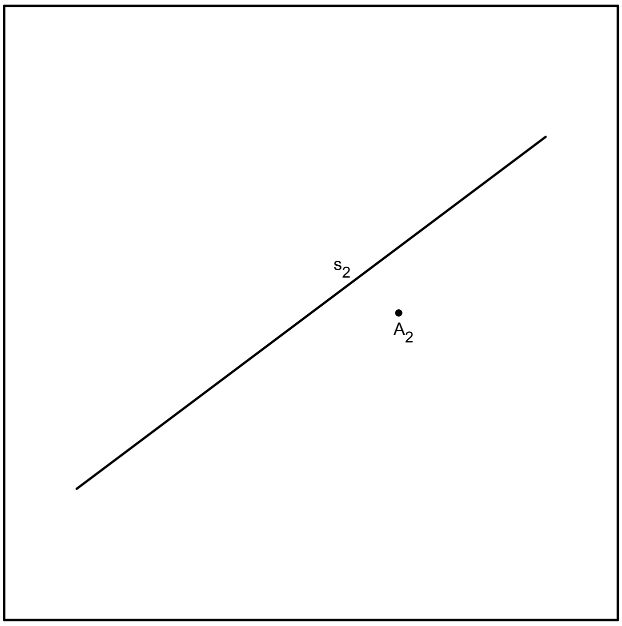
2.3 Exemplos Resolvidos

Exemplo H.1: Determine os pontos da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.

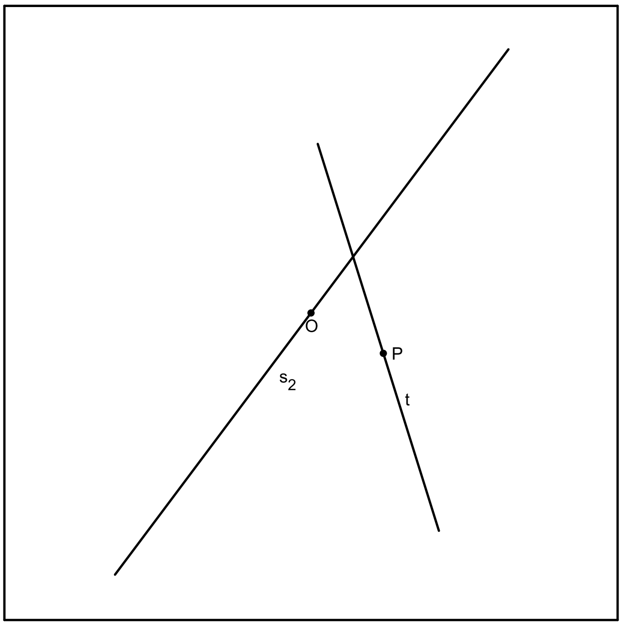
Solução: (i) Marque um ponto P' sobre o círculo C_1 e trace a reta suporte r de F_1P'; (ii) Trace a mediatriz m de F_2P', determinando sobre r o ponto P da hipérbole H.

Solução: Da construção, $F_1P = F_1P' + PP' = F_1P' + F_2P$, e assim $F_1P - F_2P = F_1P' = 2a$, de modo que P pertence à hipérbole H.

Exemplo H.2: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole,



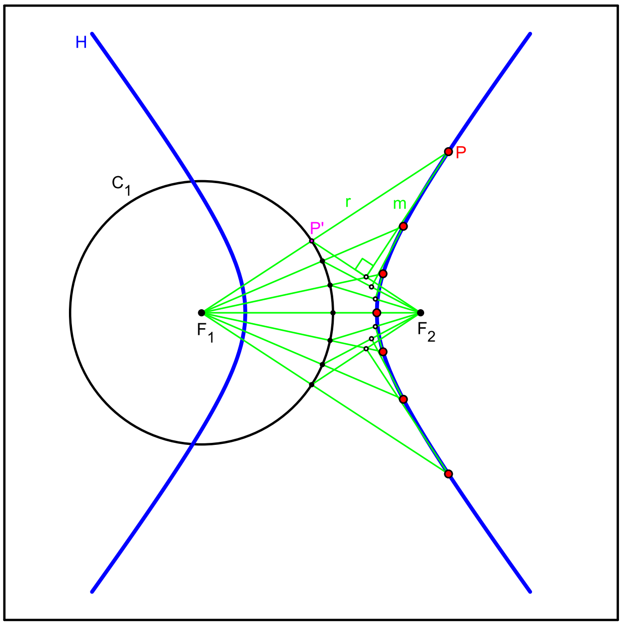
Exercício H.15



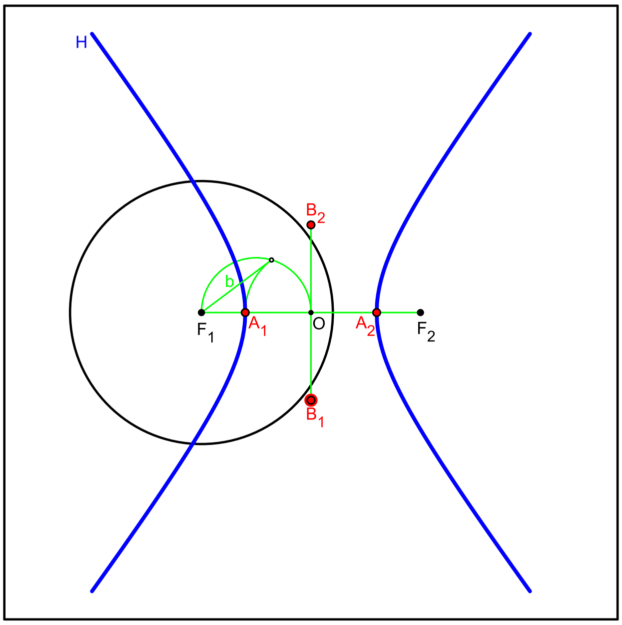
Exercício H.16

dados os focos F_1 e F_2 e o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.

Solução: (i) Determine o ponto médio O do segmento F_1F_2 e marque o eixo transverso tal que $OA_1 = OA_2 = a$; (ii) Determine o outro cateto b do triângulo retângulo de hipotenusa $OF_1 = c$ e cateto $OA_1 = a$ e marque o eixo não transverso $OB_1 = OB_2 = b$ sobre uma perpendicular a F_1F_2 por O.



Solução do Exemplo H.1



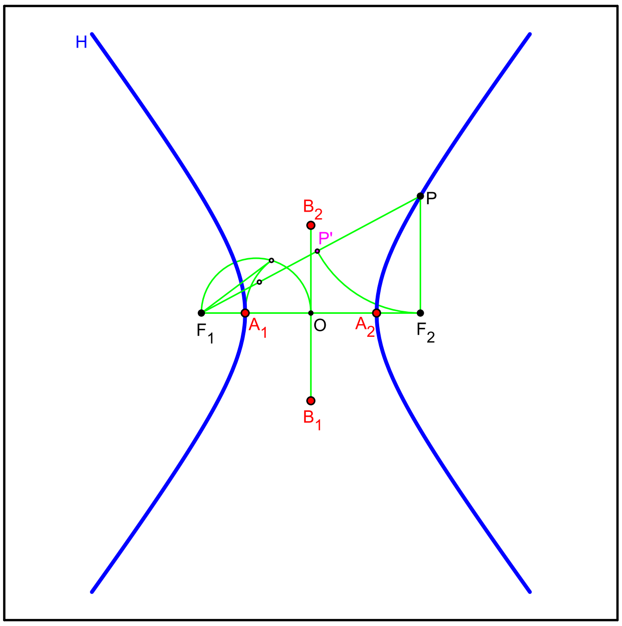
Solução do Exemplo H.2

Exemplo H.3: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o ponto P da curva.

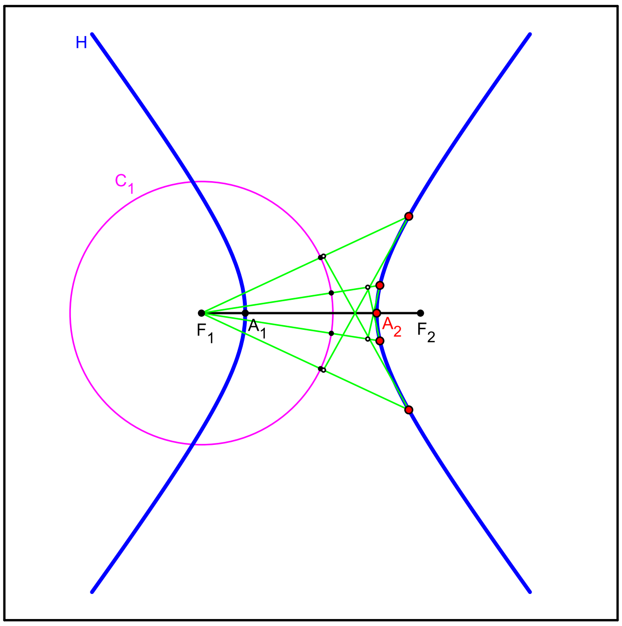
Solução: (i) Trace o segmento F_1P e determine sobre ele o ponto P', entre F_1 e P, tal que $PP' = PF_2$; (ii) Marque o eixo transverso tal que $OA_1 = OA_2 = \frac{F_1P'}{2}$, onde O é o ponto médio de F_1F_2; (ii) Determine o outro cateto b do triângulo retângulo de hipotenusa $OF_1 = c$ e cateto $OA_1 = a$ e marque o eixo não transverso $OB_1 = OB_2 = b$ sobre uma perpendicular a F_1F_2 por O.

Exemplo H.4: Determine os pontos da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o eixo transverso A_1A_2.

Solução: (i) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, A_1A_2)$, tornando a questão equivalente ao Exemplo H.1.



Solução do Exemplo H.3



Solução do Exemplo H.4

Exemplo H.5: Determine o parâmetro da hipérbole, dados os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2.

Solução: (i) Determine a hipotenusa c do triângulo retângulo de catetos $OA_1 = a$ e $OB_1 = b$, onde O é o ponto médio de A_1A_2, e marque um foco $OF_2 = c$ sobre o eixo transverso A_1A_2; (ii) Obtenha a 3ª proporcional $a : b = b : x_1$, determinando o parâmetro desejado da hipérbole, e marque a semicorda focal mínima numa perpendicular ao eixo transverso A_1A_2 por F_2.

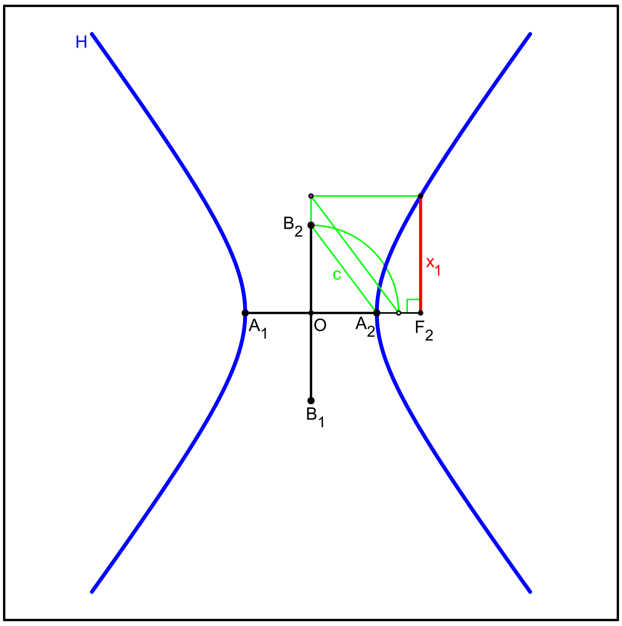
Exemplo H.6: Determine o ponto de tangência P e os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e a tangente t por P.

Solução: (i) Determine o simétrico P' de F_2 em relação à tangente dada t; (ii) Prolongue F_1P', determinando o ponto de tangência P sobre t; (iii) Marque o eixo transverso $OA_1 = OA_2 = \frac{F_1P'}{2} = a$ sobre a reta suporte de F_1F_2, onde O é o ponto médio de F_1F_2; (iv) Determine o outro cateto b do triângulo retângulo de hipotenusa $OF_1 = c$ e cateto $OA_1 = a$ e marque o eixo não transverso $OB_1 = OB_2 = b$ sobre uma perpendicular a F_1F_2 por O.

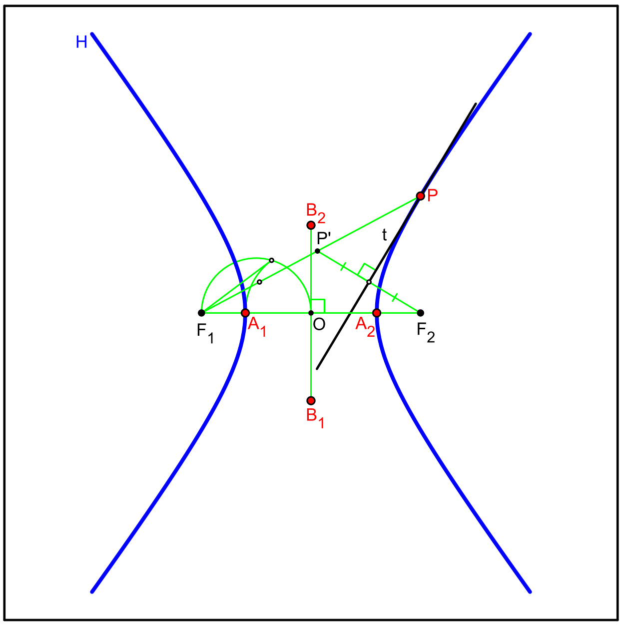
Exemplo H.7: Determine o outro foco F_2 da hipérbole, dados o foco F_1, as tangentes t_1 e t_2 e o comprimento $2a$ do eixo transverso.

Solução: (i) Determine os simétricos P_1' e P_2' do foco dado F_1 em relação às tangentes t_1 e t_2, respectivamente; (ii) Trace os círculos $C_1 \equiv (P_1', 2a)$ e $C_2 \equiv (P_2', 2a)$, determinando o foco F_2 desejado.

Obs.: Para que a interseção seja de fato o foco de uma hipérbole, devemos ter $F_1F_2 > 2a$. Na



Solução do Exemplo H.5

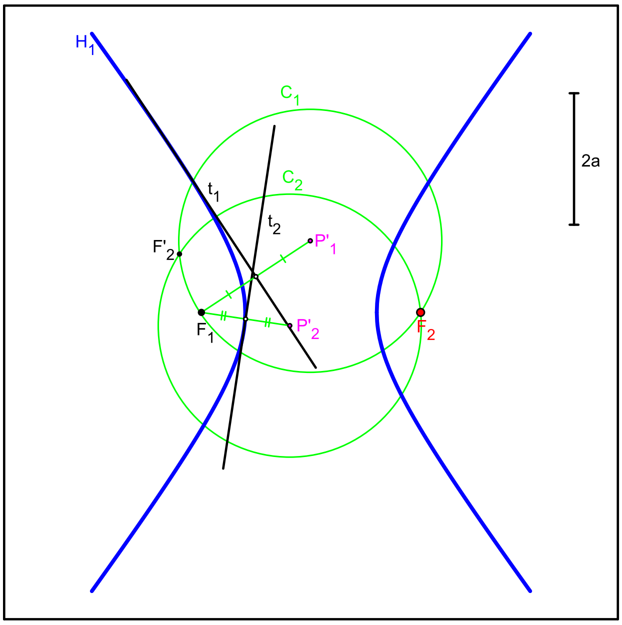


Solução do Exemplo H.6

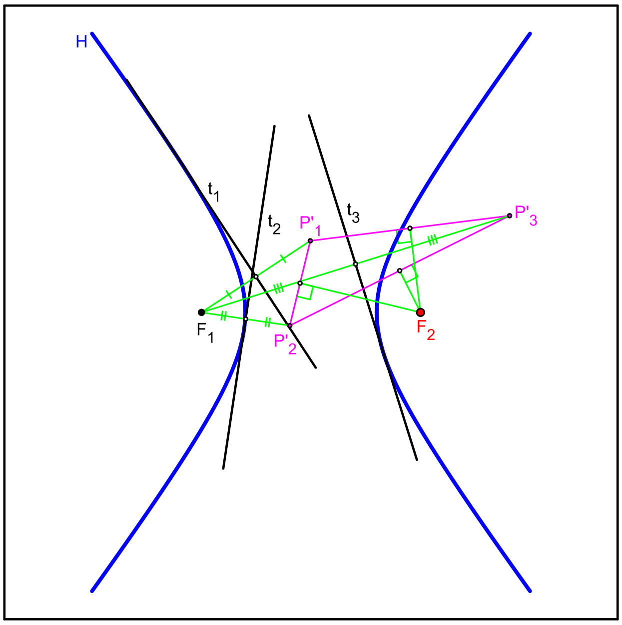
figura do problema, note que apenas uma das interseções satisfaz esta condição. Na prática, poderíamos ter duas soluções.

Exemplo H.8: Determine o outro foco F_2 da hipérbole, dados o foco F_1 e as tangentes t_1, t_2 e t_3.

Solução: (i) Determine os simétricos P_1', P_2' e P_3' do foco dado F_1 em relação às tangentes t_1, t_2 e t_3, respectivamente; (ii) Obtenha o circuncentro (encontro das mediatrizes) do triângulo $\Delta P_1'P_2'P_3'$, determinando o foco F_2 desejado.



Solução do Exemplo H.7



Solução do Exemplo H.8

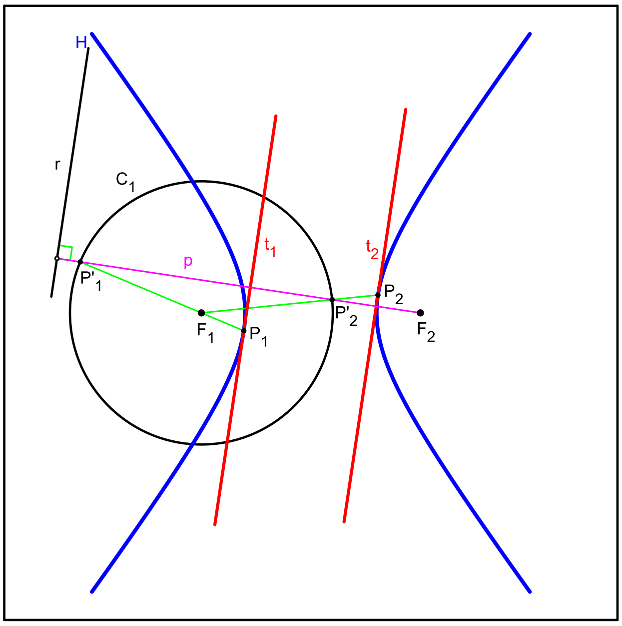
Exemplo H.9: Determine as tangentes t_1 e t_2 da hipérbole paralelas à reta r, dados

os focos F_1 e F_2, o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$ e a reta r.

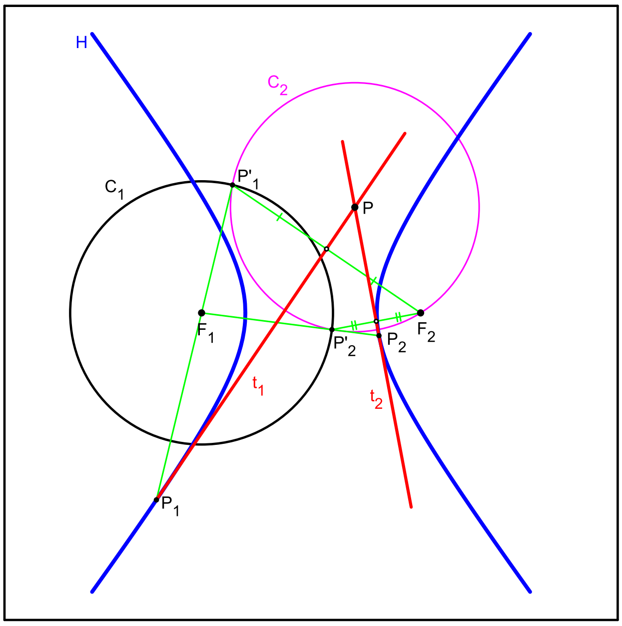
Solução: (i) Trace uma perpendicular p à reta r pelo foco F_2, determinando os pontos P_1' e P_2' sobre o círculo diretor C_1 dado; (ii) Trace as mediatrizes t_1 e t_2 de F_2P_1' e F_2P_2', respectivamente, determinando as tangentes desejadas.

Exemplo H.10: Determine as tangentes t_1 e t_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2, o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$ e o ponto P externo à hipérbole e pertencente às tangentes t_1 e t_2.

Solução: (i) Trace o círculo $C_2 \equiv (P, PF_2)$, determinando os pontos P_1' e P_2' sobre o círculo diretor C_1 dado; (ii) Trace as mediatrizes t_1 e t_2 de F_2P_1' e F_2P_2', respectivamente, determinando as tangentes desejadas.



Solução do Exemplo H.9



Solução do Exemplo H.10

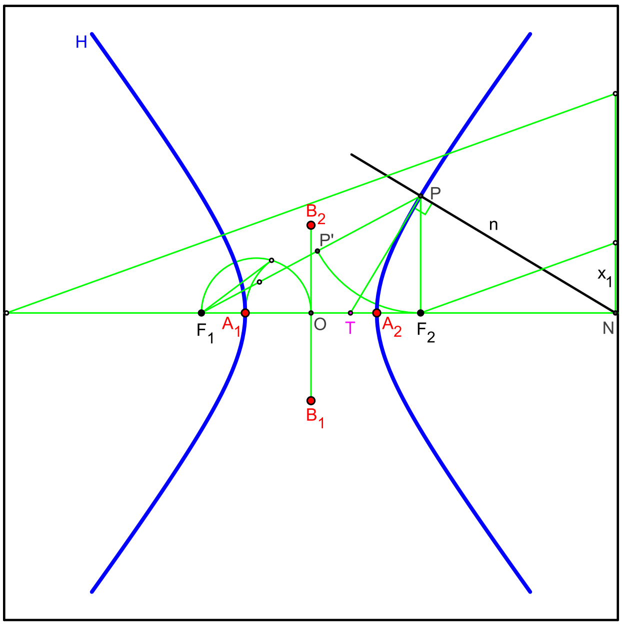
Exemplo H.11: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e a normal n.

Solução: (i) Prolongue a normal n, determinando o ponto N sobre o prolongamento de F_1F_2; (ii) Determine a 4ª proporcional $(2d+\ell) : \ell = d : x_1$, onde $F_2N = d$ e $F_1F_2 = \ell$, e marque o ponto T tal que $F_2T = x_1$, com T entre F_1 e F_2; (iii) Determine a projeção P de T sobre a normal n; (iv) Determine o comprimento $|F_1P - F_2P| = F_1P' = 2a$, e marque o eixo transverso $OA_1 = OA_2 = a$, onde O é o ponto médio de F_1F_2; (v) Determine o outro cateto b do triângulo retângulo de hipotenusa $OF_1 = c$ e cateto $OA_1 = a$ e marque o eixo não transverso $OB_1 = OB_2 = b$ sobre uma perpendicular a F_1F_2 por O.

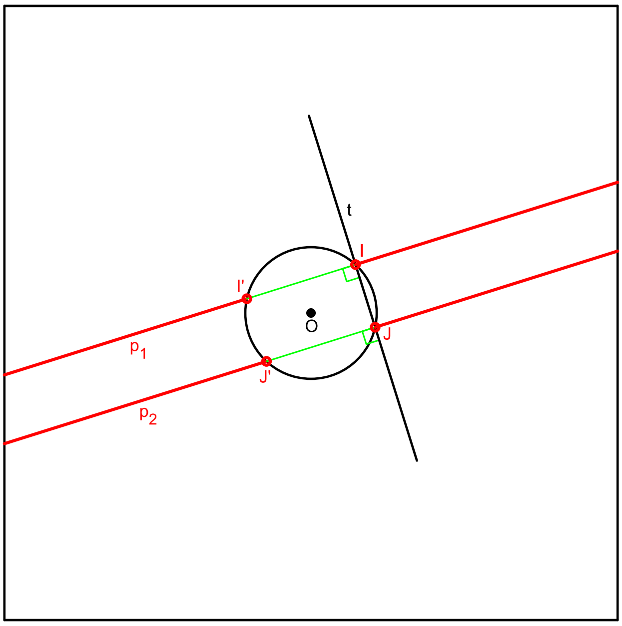
Exemplo H.12: Determine o lugar geométrico dos focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados o círculo principal maior $C_o \equiv (O, a)$ e a tangente t.

Solução: (i) Trace perpendiculares p_1 e p_2 à tangente dada t pelas interseções I e J desta reta com o círculo principal maior C_o, determinando o lugar geométrico desejado como sendo as porções de p_1 e p_2 externas a C_o.

Exemplo H.13: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados o centro O, o com-



Solução do Exemplo H.11



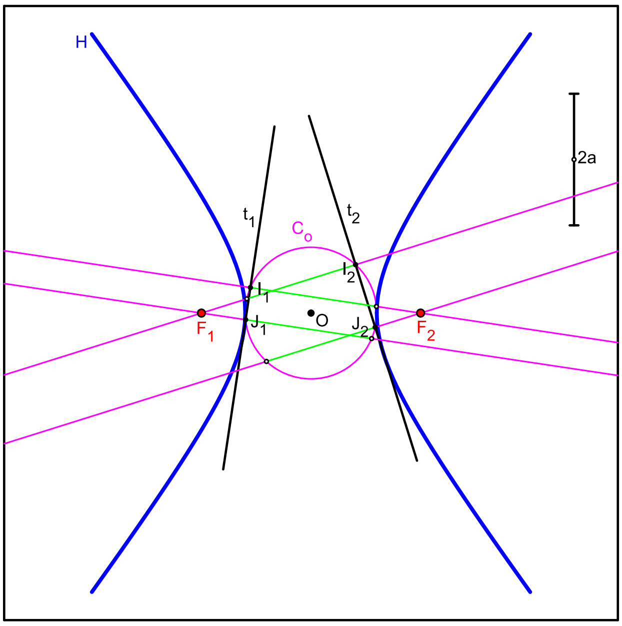
Solução do Exemplo H.12

primento $2a$ do eixo transverso e as tangentes t_1 e t_2.

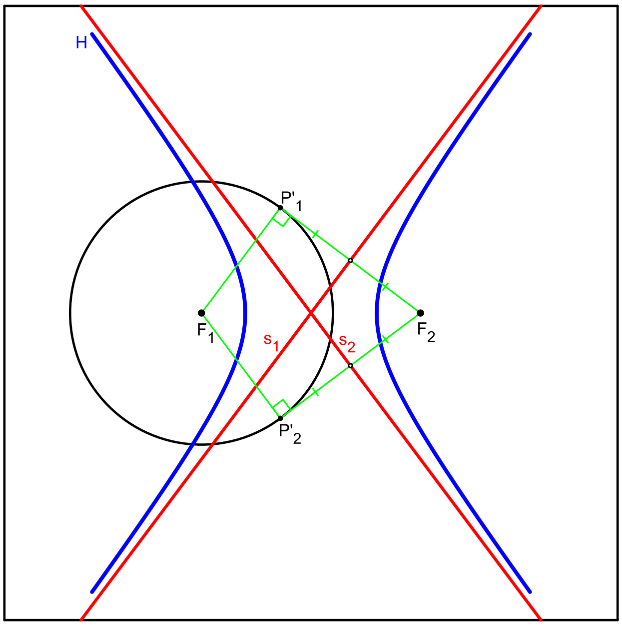
Solução: (i) Trace o círculo principal maior $C_o \equiv (O, a)$, determinando as interseções I_1 e J_1 sobre t_1 e I_2 e J_2 sobre t_2; (ii) Trace perpendiculares a t_1 por I_1 e J_1 e a t_2 por I_2 e J_2, determinando as interseções F_1 e F_2, externas a C_o, que são os focos desejados.

Exemplo H.14: Determine as assíntotas da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.

Solução: (i) Trace as tangentes ao círculo diretor C_1 dado pelo foco F_2, determinando os pontos de tangência P_1' e P_2' sobre C_1; (ii) Trace as mediatrizes s_1 e s_2 de F_2P_1' e F_2P_2', determinando as assíntotas desejadas.



Solução do Exemplo H.13



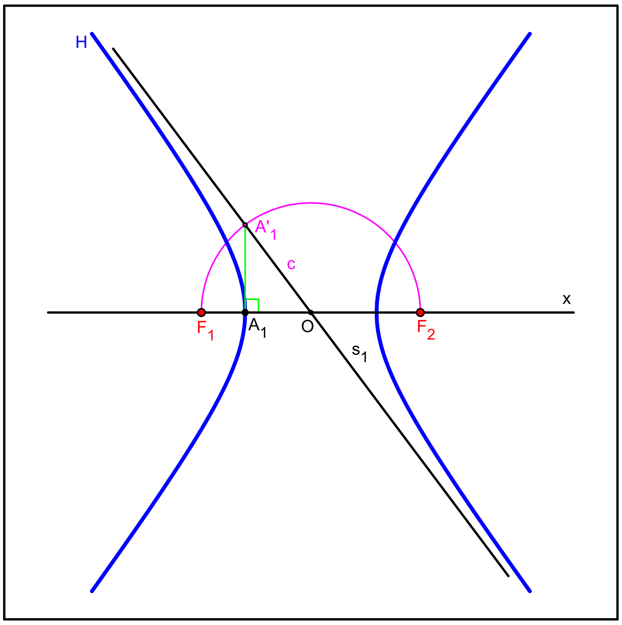
Solução do Exemplo H.14

Exemplo H.15: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados a assíntota s_1, o vértice A_1 e a reta suporte x do eixo transverso.

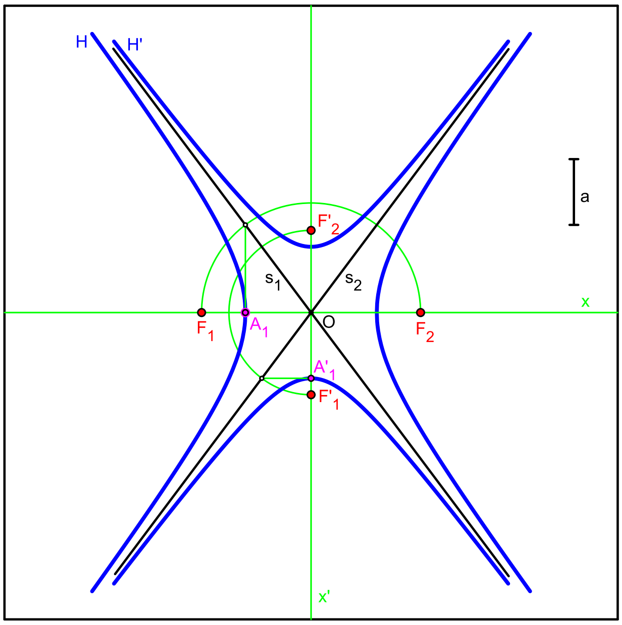
Solução: (i) Trace uma perpendicular à reta x dada por A_1, determinando o ponto auxiliar A_1' sobre a assíntota s_1 dada; (ii) Marque os focos F_1 e F_2 desejados sobre a reta x tais que $OF_1 = OF_2 = OA_1' = c$, onde O é a interseção da reta x com a assíntota s_1.

Exemplo H.16: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados as assíntotas s_1 e s_2 e o comprimento a do semi-eixo transverso.

Solução: (i) Trace as bissetrizes x e x' das assíntotas s_1 e s_2; (ii) Marque sobre x e x os vértices A_1 e A_1', respectivamente, tais que $OA_1 = OA_1' = a$, onde O é a interseção das assíntotas s_1 e s_2; (iii) Trace perpendiculares às retas x e x' por A_1 e A_1', respectivamente, determinando, sobre uma assíntota qualquer, as semi-distâncias focais c e c', e marque os focos desejados $OF_1 = OF_2 = c$, sobre o eixo x, e $OF_1' = OF_2' = c'$, sobre o eixo x'.



Solução do Exemplo H.15



Solução do Exemplo H.16

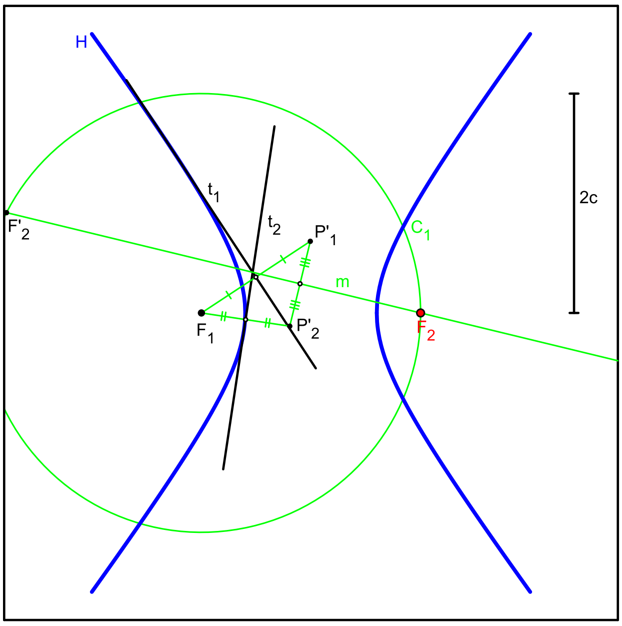
Exemplo H.17: Determine o outro foco F_2 da hipérbole, dados o foco F_1, as tangentes t_1 e t_2 e a distância focal $2c$.

Solução: (i) Determine os simétricos P_1' e P_2' do foco dado F_1 em relação às tangentes t_1 e t_2 dadas e trace a mediatriz m de $P_1'P_2'$; (ii) Trace o círculo $C_1 \equiv (F_1, 2c)$, determinando o foco desejado F_2 sobre m.

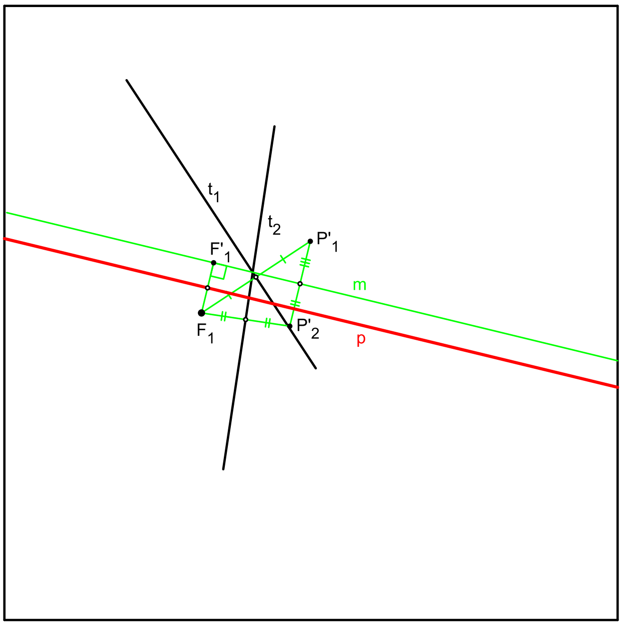
Obs.: Para que a interseção F de m e C_1 seja foco de uma hipérbole, o foco F_1 deve ser externo ao círculo (F, FP_1'). Na figura do problema, apenas uma das interseções satisfaz esta condição.

Exemplo H.18: Determine o lugar geométrico do centro O da hipérbole, dados o foco F_1 e as tangentes t_1 e t_2.

Solução: (i) Determine os simétricos P_1' e P_2' do foco dado F_1 em relação às tangentes t_1 e t_2 dadas e trace a mediatriz m de $P_1'P_2'$; (ii) Determine a projeção F_1' do foco F_1 sobre m e trace uma paralela p a m pelo ponto médio de F_1F_1', determinando o lugar geométrico desejado.



Solução do Exemplo H.17



Solução do Exemplo H.18

Exemplo H.19: Determine o círculo ortótico C da hipérbole, dados os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2.

Solução: (i) Determine o outro cateto ℓ do triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e cateto $OB_1 = b$ e trace o círculo de Monge $C \equiv (O, \ell)$, onde O é a interseção dos eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2.

Obs.: Se $b > a$, aparentemente o círculo de Monge não é definido.

Exemplo H.20: Determine as diretrizes da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, 2a)$.

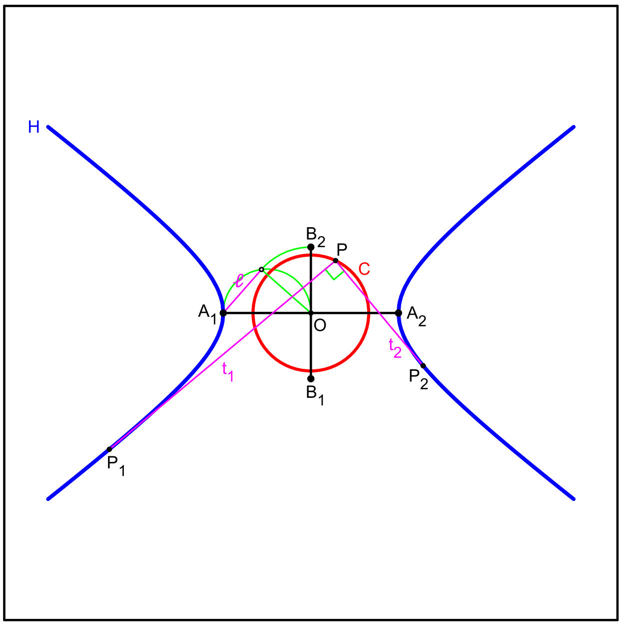
Solução: (i) Determine a 3ª proporcional $c : a = a : x_1$ e marque sobre o segmento F_1F_2 os pontos D_1 e D_2 tais que $OD_1 = OD_2 = x_1$, onde O é o ponto médio de F_1F_2; (ii) Trace perpendiculares d_1 e d_2 ao segmento F_1F_2 por D_1 e D_2, respectivamente, determinando as retas diretrizes desejadas.

Exemplo H.21: Determine a hipérbole cuja razão das distâncias de seus pontos ao ponto F_1 e à reta d_1 é igual a $\frac{3}{2}$.

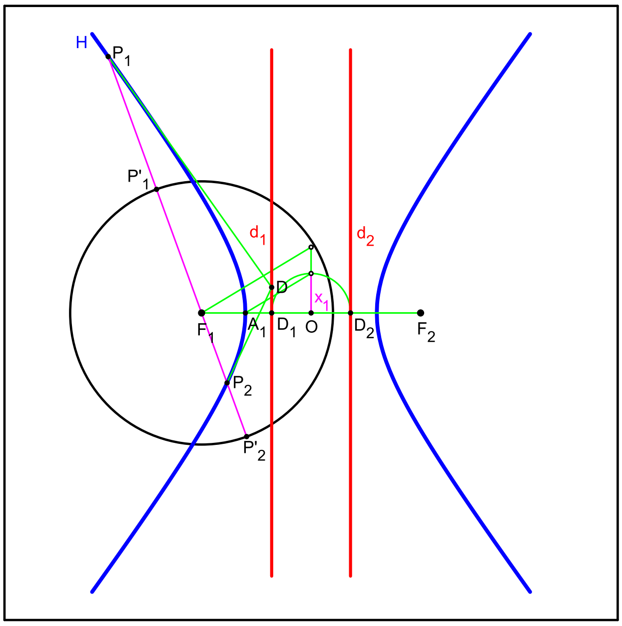
Solução: (i) Determine a projeção F_1' do foco F_1 sobre a diretriz d_1, definindo a distância $F_1F_1' = \ell$ e o eixo x; (ii) Marque o centro O da hipérbole H tal que $F_1O = \frac{9\ell}{5}$; (iii) Marque o eixo transverso tal que $OA_1 = OA_2 = \frac{6\ell}{5}$; (iv) Determine o outro cateto b do triângulo retângulo de hipotenusa $OF_1 = c$ e cateto $OA_1 = a$ e marque o eixo não transverso tal que $OB_1 = OB_2 = b$.

Exemplo H.22: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole equilátera, dados o foco F_1 e a assíntota s_1.

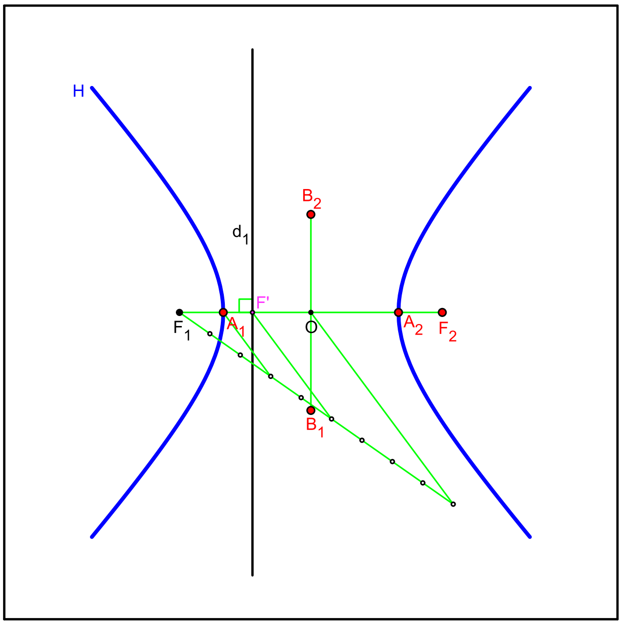
Solução: (i) Determine a projeção F_1' do foco F_1 sobre a assíntota s_1 dada; (ii) Marque o centro O da hipérbole H tal que $OF_1' = F_1F_1'$ sobre a assíntota s_1; (iii) Trace a outra assíntota s_2, perpendicular a s_1 por O; (iv) Trace o círculo $C_1 = (O, OF_1')$, determinando os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole equilátera sobre as bissetrizes das duas assíntotas.



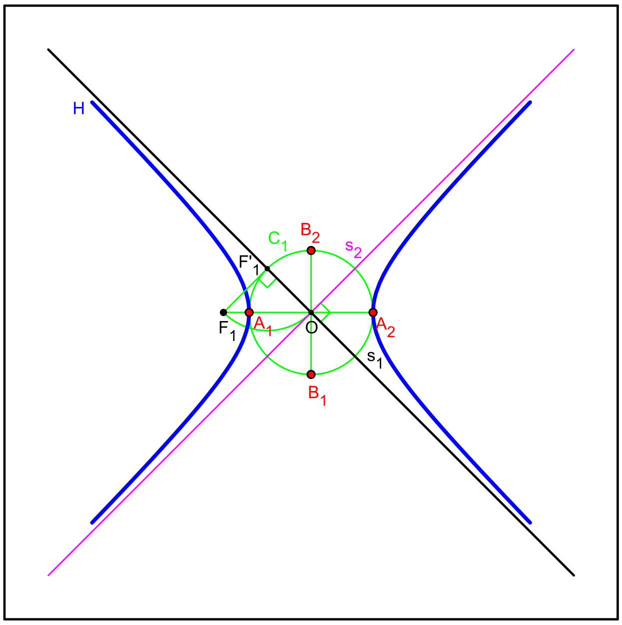
Solução do Exemplo H.19



Solução do Exemplo H.20



Solução do Exemplo H.21



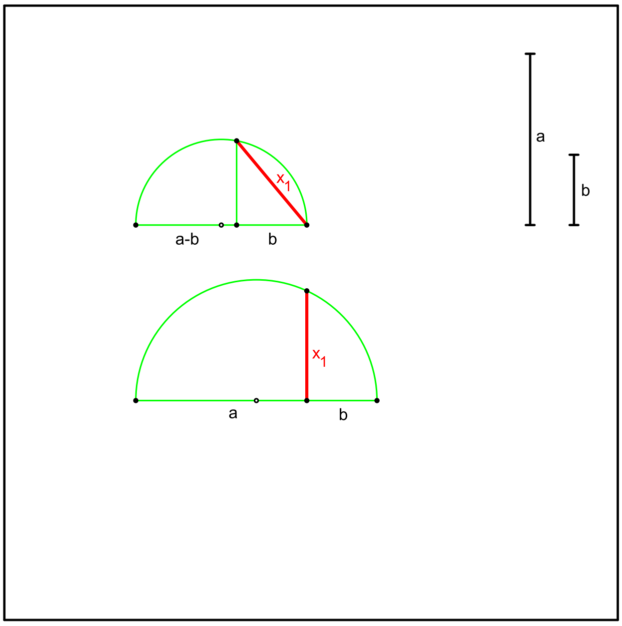
Solução do Exemplo H.22

Exemplo H.23: Determine a média geométrica entre os segmentos a e b dados.
Solução: Construções básicas de Desenho Geométrico[1].

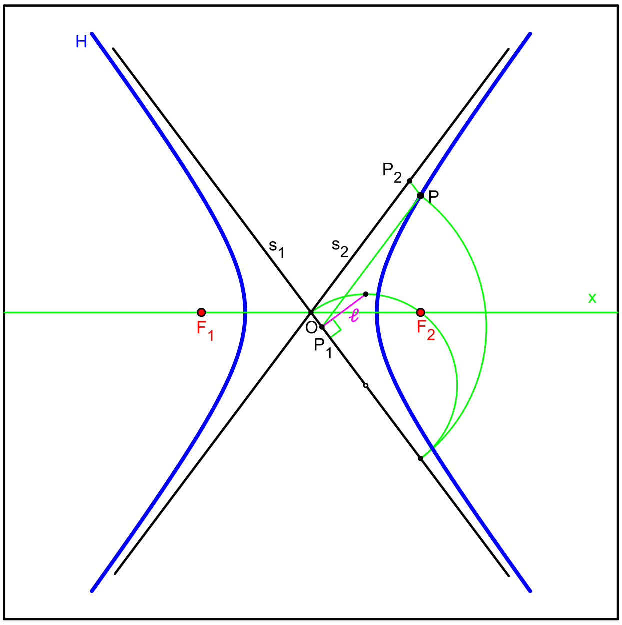
Exemplo H.24: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dadas as assíntotas s_1 e s_2 e o ponto P da curva.
Solução: (i) Trace a bissetriz x do ângulo entre assíntotas s_1 e s_2 que contém o ponto P dado; (ii) Trace paralelas às assíntotas s_1 e s_2 por P, determinando as interseções P_1 e P_2, respectivamente;

[1] *E. Wagner (com J. P. Q. Carneiro), "Construções Geométricas", Sociedade Brasileira de Matemática, 5ª ed., 2000.*

(iii) Determine a média geométrica $\ell = \sqrt{PP_1.PP_2}$ e marque $OF_1 = OF_2 = 2\ell$ sobre o eixo x, onde O é a interseção das assíntotas, determinando os focos F_1 e F_2 desejados.



Solução do Exemplo H.23



Solução do Exemplo H.24

Exemplo H.25: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados uma assíntota s_1, dois pontos P_1 e P_2 da curva e o centro O.

Solução: (i) Prolongue P_1P_2, determinando o ponto P_2' sobre a assíntota s_1 dada, e marque $P_1P_1' = P_2P_2'$ sobre a reta suporte de P_1P_2; (ii) Trace OP_1', determinando a outra assíntota s_2 da hipérbole e tornando a questão equivalente ao Exemplo H.24.

Exemplo H.26: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dadas as assíntotas s_1 e s_2 e a tangente t.

Solução: (i) Marque as interseções T_1 e T_2 da tangente dada t com as assíntotas s_1 e s_2 e determine o ponto P da hipérbole, médio do segmento T_1T_2, tornando a questão equivalente ao Exemplo H.24.

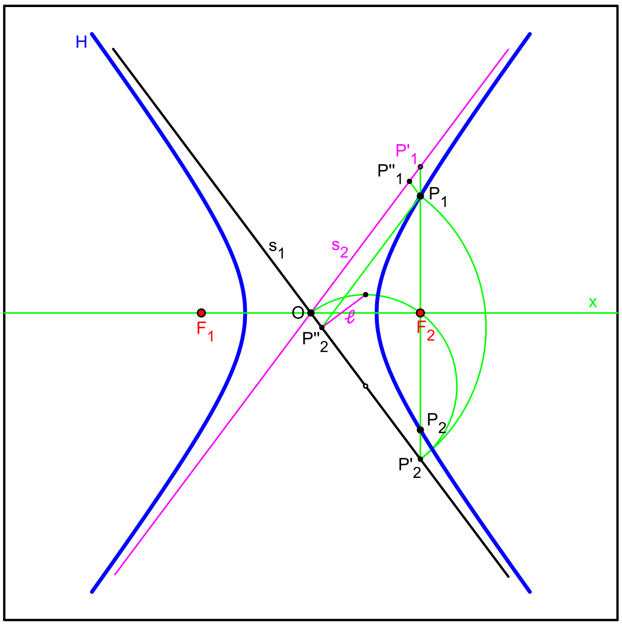
2.4 Exercícios Resolvidos

H.1: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2.

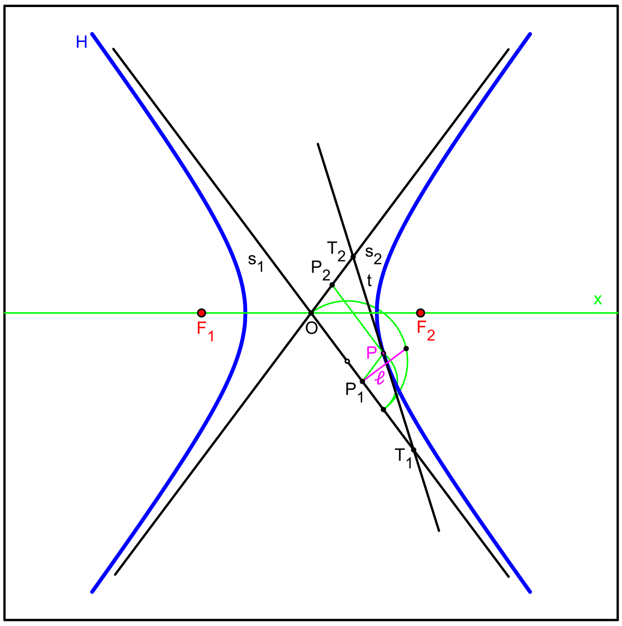
Solução: (i) Marque os focos F_1 e F_2 desejados tais que $OF_1 = OF_2 = A_1B_1 = c$, onde O é a interseção dos eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2

Exercício H.2: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transversoB_1B_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o comprimento $2a$ do eixo transverso A_1A_2.

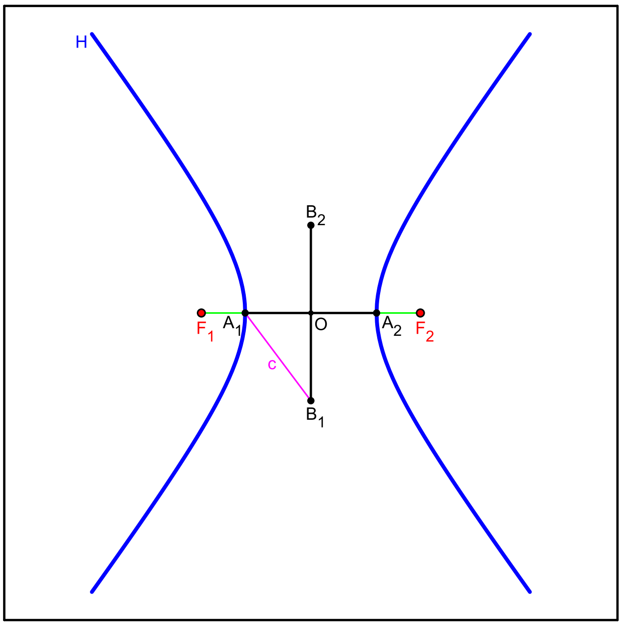
Solução: (i) Marque o eixo transverso A_1A_2 sobre o segmento F_1F_2 tal que $OA_1 = OA_2 = a$, onde O é o ponto médio de F_1F_2; (ii) Determine o outro cateto $OB_1 = b$ do triângulo retângulo de hipotenusa $OF_1 = c$ e cateto $OA_1 = a$ e marque o eixo não transverso B_1B_2 sobre uma perpendicular a F_1F_2 por O tal que $OB_1 = OB_2 = b$.



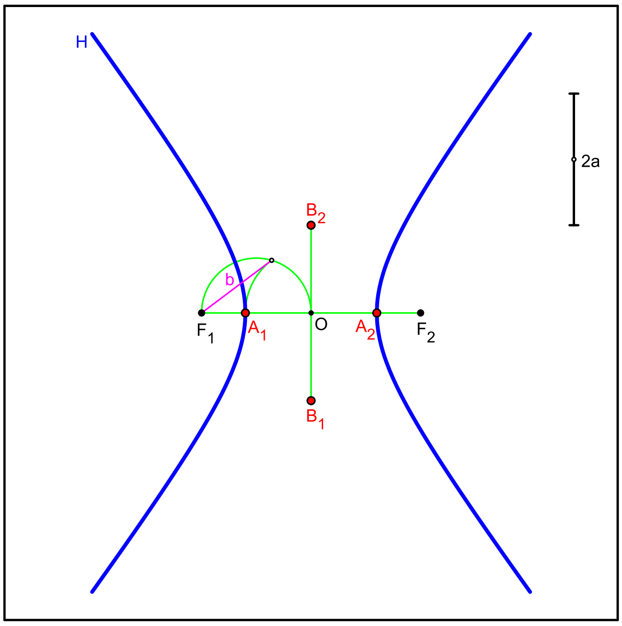
Solução do Exemplo H.25



Solução do Exemplo H.26



Solução do Exercício H.1



Solução do Exercício H.2

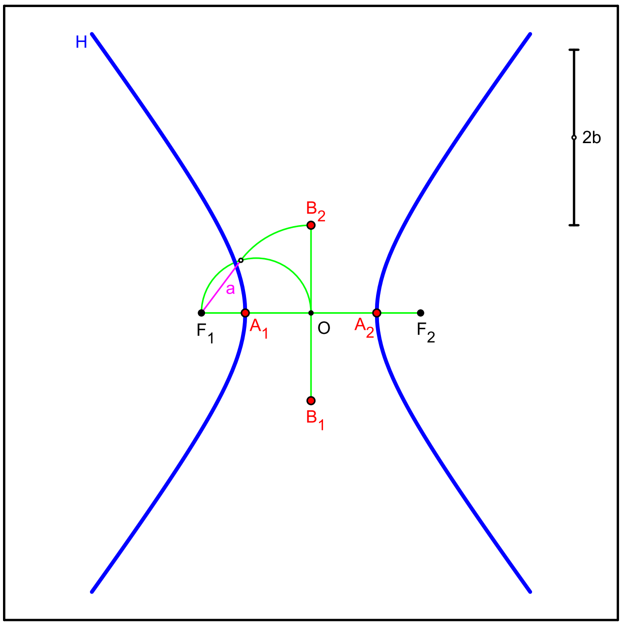
Exercício H.3: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transversoB_1B_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e o comprimento $2b$ do eixo não transverso B_1B_2.

Solução: (i) Marque o eixo não transverso B_1B_2 sobre uma perpendicular a F_1F_2 por O, onde O é o ponto médio de F_1F_2, tal que $OB_1 = OB_2 = b$; (ii) Determine o outro cateto $OA_1 = a$ do triângulo retângulo de hipotenusa $OF_1 = c$ e cateto $OB_1 = b$ e marque o eixo transverso A_1A_2 sobre o segmento F_1F_2 tal que $OA_1 = OA_2 = a$.

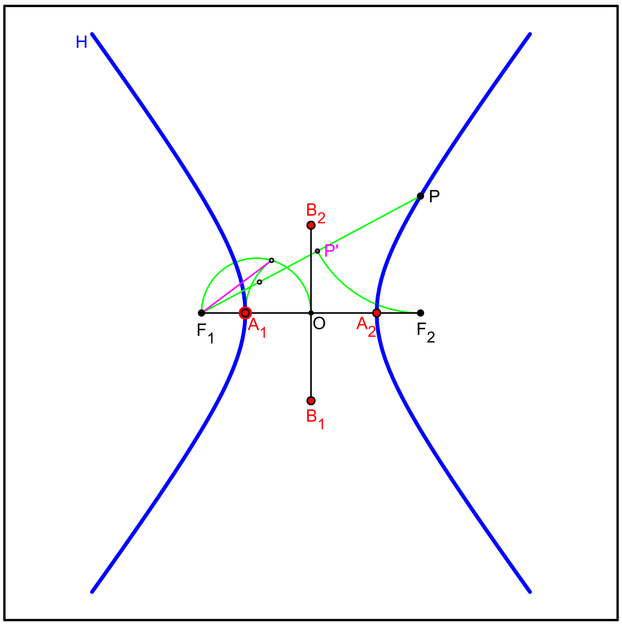
Exercício H.4: Determine os eixos de uma elipse e de uma hipérbole, dados os focos

comuns F_1 e F_2 e uma interseção P das duas cônicas.

Solução: Para a hipérbole, a questão é equivalente ao Exemplo H.3.



Solução do Exercício H.3



Solução do Exercício H.4

Exercício H.5: Determine a tangente t e a normal n à hipérbole, dados o ponto de tangência P e os focos F_1 e F_2.

Solução: (i) Determine a interseção P' do círculo $C_1 \equiv (P, PF_2)$ com o segmento F_1P; (ii) Trace a mediatriz t de F_1P', determinando a tangente desejada; (iii) Trace a perpendicular n a t por P, determinando a normal desejada.

Exercício H.6: Determine o ponto de tangência P e o eixo transverso A_1A_2 da hipérbole, dados os focos F_1 e F_2 e a tangente t por P.

Solução: Esta questão é equivalente ao Exemplo H.6.

Exercício H.7: Determine o outro foco F_2 da hipérbole, dados o foco F_1, a tangente t_1, o comprimento $2a$ do eixo transverso e o ponto P pertencente à curva.

Solução: (i) Trace o círculo $C_1 \equiv (P, \ell)$, com $\ell = (PF_1 + 2a)$; (ii) Determine o simétrico F_1' de F_1 em relação à tangente t dada; (iii) Trace o círculo $C_2 \equiv (F_1', 2a)$, determinando o foco desejado F_2 sobre o círculo C_1.

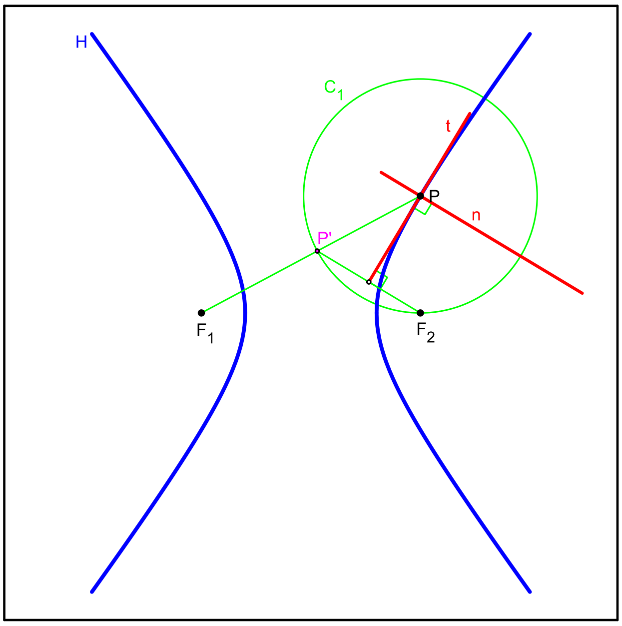
Obs.: Como no Exemplo H.7, para que a interseção seja de fato o foco de uma hipérbole, devemos ter $F_1F_2 > 2a$. Na figura do problema, note que apenas uma das interseções satisfaz esta condição. Na prática, poderíamos ter duas soluções.

Exercício H.8: Determine o outro foco F_2 e os pontos de tangência P_1, P_2 e P_3 da hipérbole, dados o foco F_1 e as tangentes t_1, t_2 e t_3.

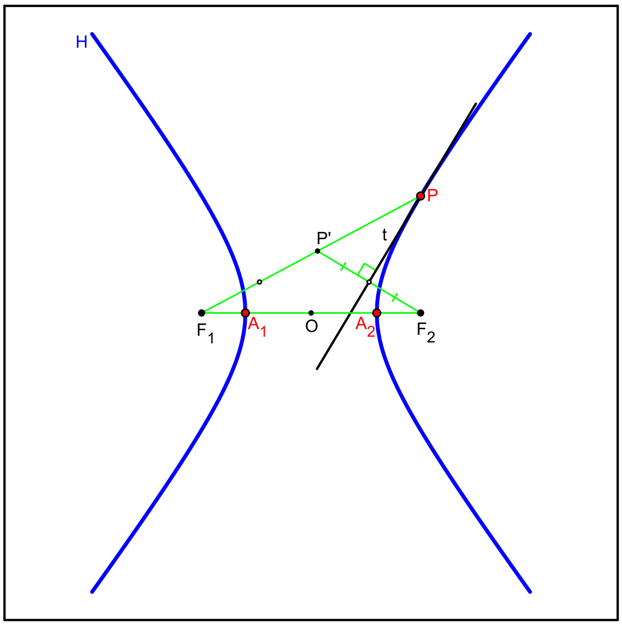
Solução: Esta questão é similar ao Exemplo H.8, onde os pontos de tangência P_i são as interseções das retas F_2P_i' com a respectiva tangente t_i, para $i = 1, 2, 3$.

Exercício H.9: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole, dados o foco F_1, as tangentes t_1 e t_2 e o ponto de tangência P_1 de t_1.

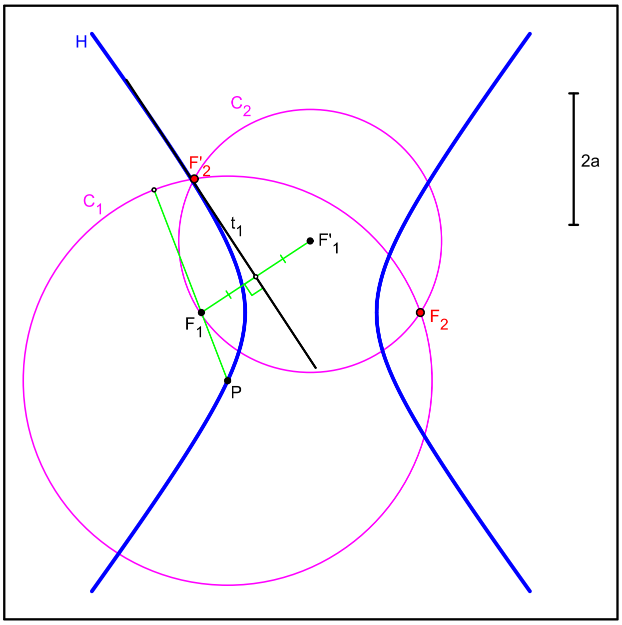
Solução: (i) Determine os simétricos F_1' e F_1'' do foco dado F_1 em relação às tangentes t_1 e t_2,



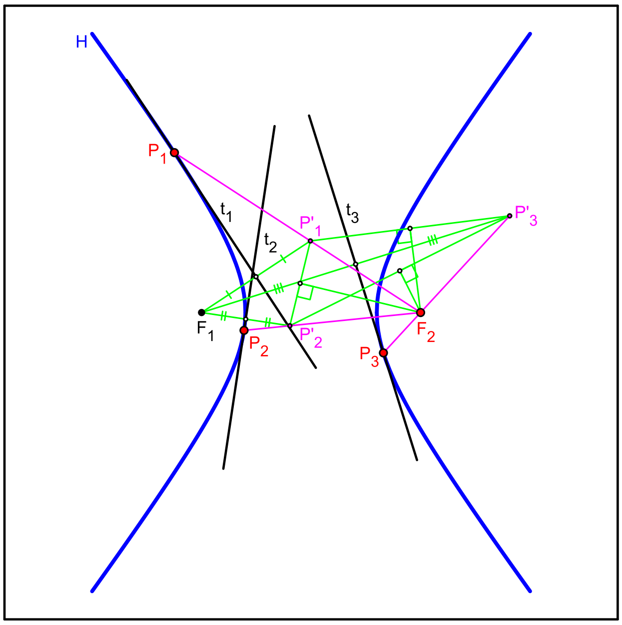
Solução do Exercício H.5



Solução do Exercício H.6



Solução do Exercício H.7

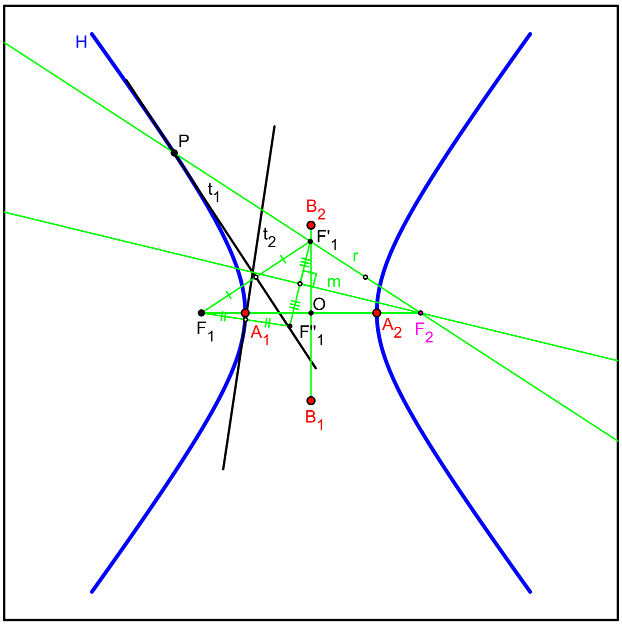


Solução do Exercício H.8

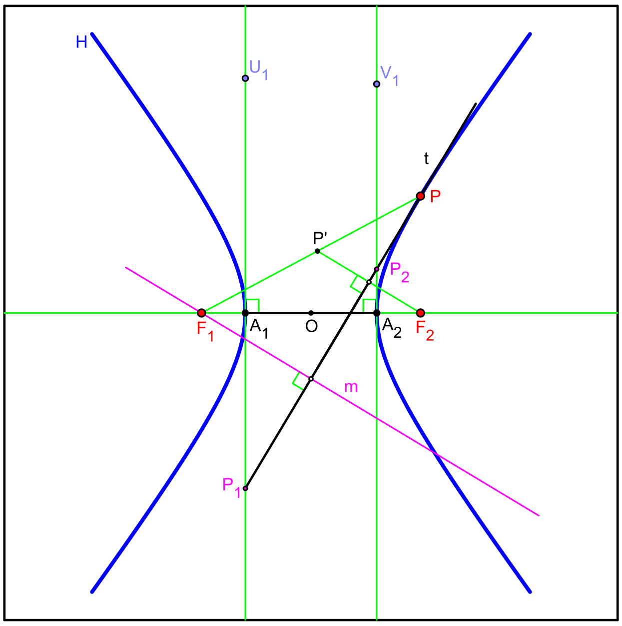
respectivamente; (ii) Trace a mediatriz m de $F_1'F_1''$; (iii) Trace a reta r suporte de PF_1', determinando sobre m o outro foco F_2 da hipérbole e tornando a questão equivalente ao Exemplo H.3 (no caso atual, com $a = \frac{F_2F_1'}{2}$).

Exercício H.10: Determine os focos F_1 e F_2 e o ponto de tangência P_1 da hipérbole, dados o eixo transverso A_1A_2 e a tangente t por P_1.

Solução: (i) Trace perpendiculares a A_1A_2 por A_1 e A_2, determinando os pontos P_1 e P_2, respectivamente, sobre a tangente t dada; (ii) Trace a mediatriz m de P_1P_2, determinando o foco F_1 sobre a reta suporte de A_1A_2; (iii) Determine o simétrico F_2 de F_1 em relação ao ponto O médio de A_1A_2; (iv) Determine o simétrico P' de F_2 em relação à tangente t dada e prolongue F_1P', determinando o ponto de tangência P desejado sobre a tangente t.



Solução do Exercício H.9



Solução do Exercício H.10

Exercício H.11: Determine o eixo transverso A_1A_2 da hipérbole, dados o foco F_1, o extremo A_2 do eixo transverso e a tangente t.

Solução: (i) Determine os simétricos P_1 e P_2 do foco F_1 dado em relação à tangente t e ao extremo A_2 do eixo transverso, respectivamente; (ii) Trace a mediatriz m de P_1P_2, determinando o outro foco F_2 da hipérbole; (iii) Obtenha o simétrico de A_2 em relação ao ponto O médio de F_1F_2, determinando o outro extremo A_1 desejado do eixo transverso.

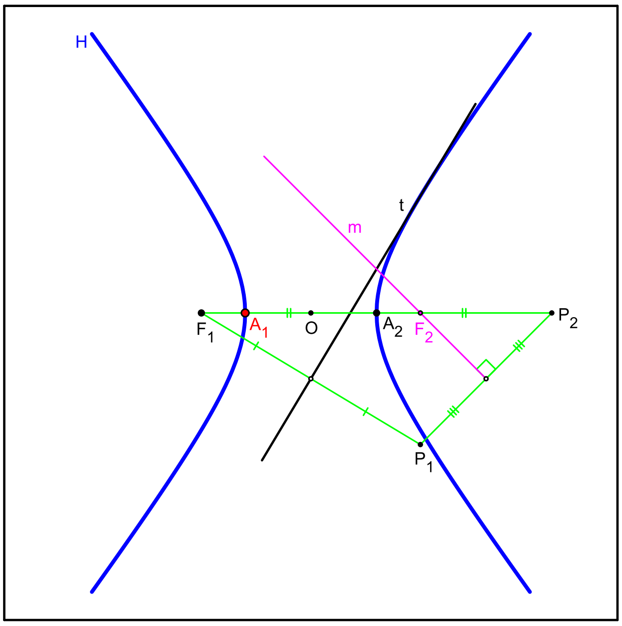
Exercício H.12: Determine as normais n_1 e n_2 da hipérbole pelo ponto P, dados os focos F_1 e F_2 e o extremo A_2 do eixo transverso.

Solução: (i) Determine a 4ª proporcional $(2c + 2\ell) : 2c = \ell : x_1$ e marque o ponto T tal que $TF_2 = x_1$, com T entre F_1 e F_2; (ii) Trace o círculo principal $C_1 \equiv (O, a)$, onde O é o ponto médio de F_1F_2 e $OA_1 = a$; (iii) Trace o círculo C_2 de diâmetro TF_2, determinando os pontos auxiliares T_1 e T_2 sobre C_1; (iv) Trace as retas suportes dos segmentos TT_1 e TT_2, determinando as tangentes t_1 e t_2, respectivamente; (v) Trace perpendiculares n_1 e n_2 a t_1 e t_2 por P, determinando as normais desejadas.

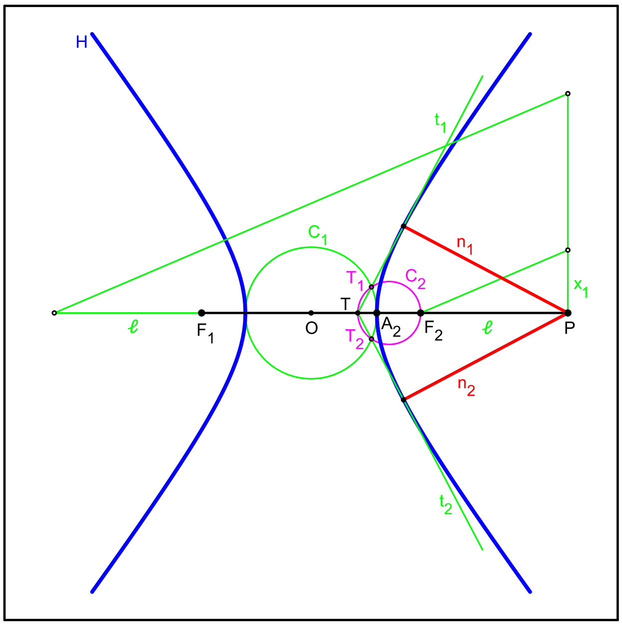
Obs.: Obtido o ponto T, a questão se reduz a determinar as tangentes por T (ver Exemplo H.10), dados os focos e os eixos, e porteriormente as normais por P.

Exercício H.13: Determine os eixos transverso A_1A_2 e não transverso B_1B_2 da hipérbole, dados a reta suporte x do eixo maior, o foco F_1 e as tangentes t_1 e t_2.

Solução: (i) Determine os simétricos F_1' e F_1'' do foco dado F_1 em relação às tangentes t_1 e t_2; (ii) Trace a mediatriz m de $F_1'F_1''$, determinando o outro foco F_2 sobre o eixo x dado; (iii) Determine o simétrico de F_2 em relação à tangente t_1 (ou t_2), determinando o ponto auxiliar F_2' tal que $F_1F_2' = 2a$; (iv) Marque o eixo transverso A_1A_2 tal que $OA_1 = OA_2 = \frac{F_1F_2'}{2}$ sobre o eixo x, onde O é o ponto médio de F_1F_2; (v) Determine o outro cateto $OB_1 = b$ do triângulo retângulo de hipotenusa $OF_1 = c$ e cateto $OA_1 = a$ e marque o eixo não transverso B_1B_2 tal



Solução do Exercício H.11



Solução do Exercício H.12

que $OB_1 = OB_2 = a$ sobre uma perpendicular a F_1F_2 por O.

Exercício H.14: Determine a tangente t à hipérbole, dados os focos F_1 e F_2, o extremo A_1 do eixo transverso e a distância ℓ da tangente ao centro da hipérbole.

Solução: (i) Determine o comprimento do outro cateto x_1 de um triângulo retângulo de hipotenusa $OA_1 = a$ e cateto ℓ, onde O é o ponto médio de F_1F_2; (ii) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F_1, A_1A_2)$, onde A_2 é o simétrico de A_1 em relação ao centro O; (iii) Trace o círculo $C_2 \equiv (O, x_1)$; (iv) Trace as tangentes ao círculo C_2 por F_2, determinando os pontos P_1' e P_2' sobre C_1; (v) Trace as mediatrizes t_1 e t_2 de F_2P_1' e F_2P_2', respectivamente, que são as tangentes desejadas.

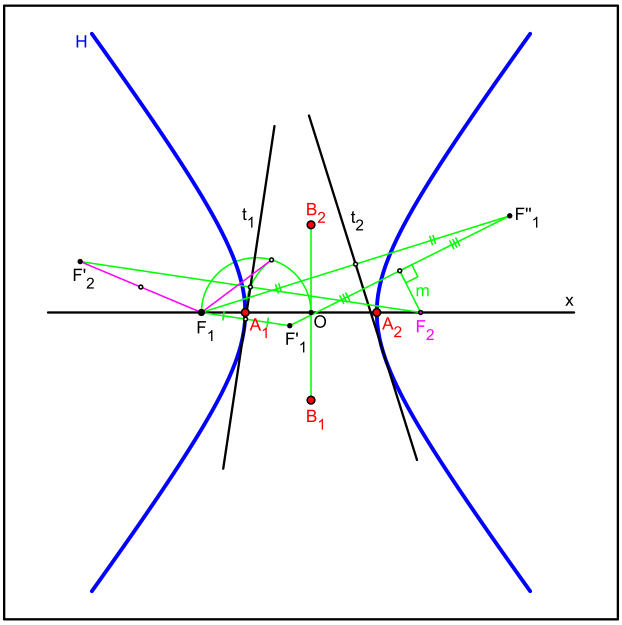
Obs.: Há duas outras tangentes, simétricas de t_1 e t_2 em relação à reta suporte de F_1F_2, que também satisfazem as condições do problema.

Exercício H.15: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados o extremo A_2 do eixo transverso, a assíntota s_2 e a excentricidade $e = \frac{5}{4}$.

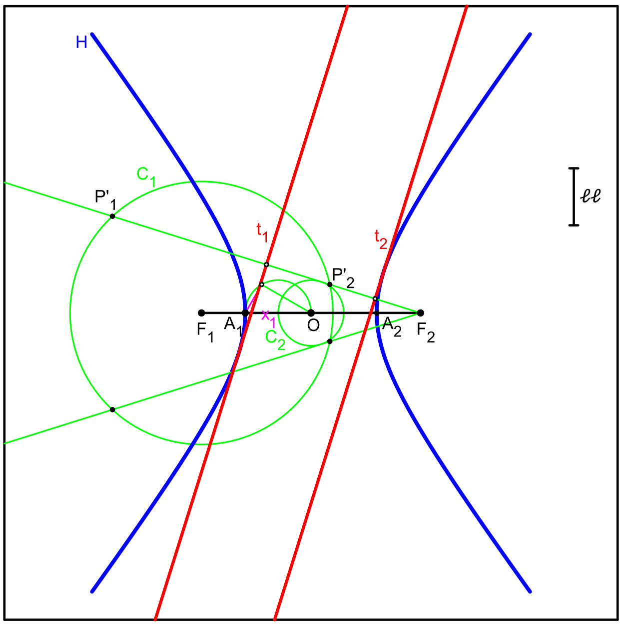
Solução: (i) Trace um triângulo retângulo de lados 3ℓ, 4ℓ e 5ℓ, onde ℓ é um comprimento qualquer, com a hipotenusa sobre a assíntota dada; (ii) Trace por A_2 uma paralela ao cateto de comprimento 4ℓ no triângulo obtido no item anterior, determinando eixo x da hipérbole e o centro O da sobre a assíntota dada; (iii) Trace uma perpendicular ao eixo x por A_2, determinando o ponto auxiliar S' sobre a assíntota; (iv) Trace o círculo $C_1 \equiv (O, OS')$, determinando os focos desejados F_1 e F_2 sobre o eixo x.

Exercício H.16: Determine os focos F_1 e F_2 da hipérbole, dados o centro O, a assíntota s_2, a tangente t e o ponto de tangência P.

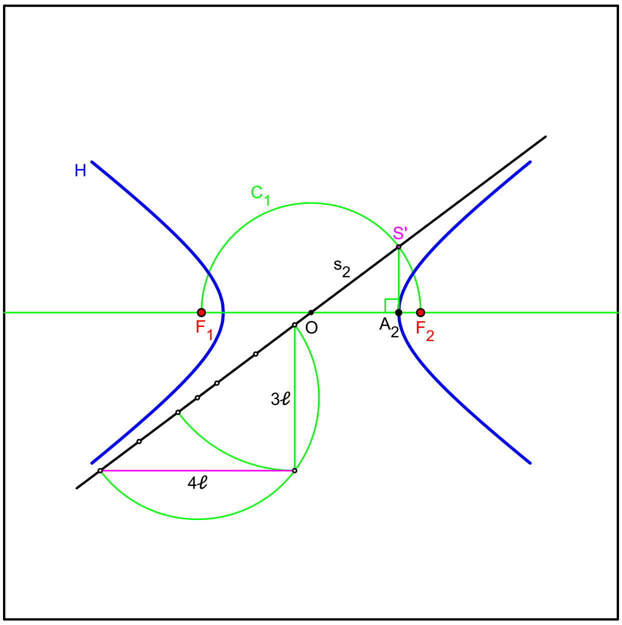
Solução: (i) Marque a interseção P_1 das tangente t e assíntota s_2 dadas e determine o simétrico P_2 de P_1 em relação ao ponto P; (ii) Trace a outra assíntota s_1 como a reta suporte do segmento OP_2, tornando a questão equivalente ao Exemplo H.24.



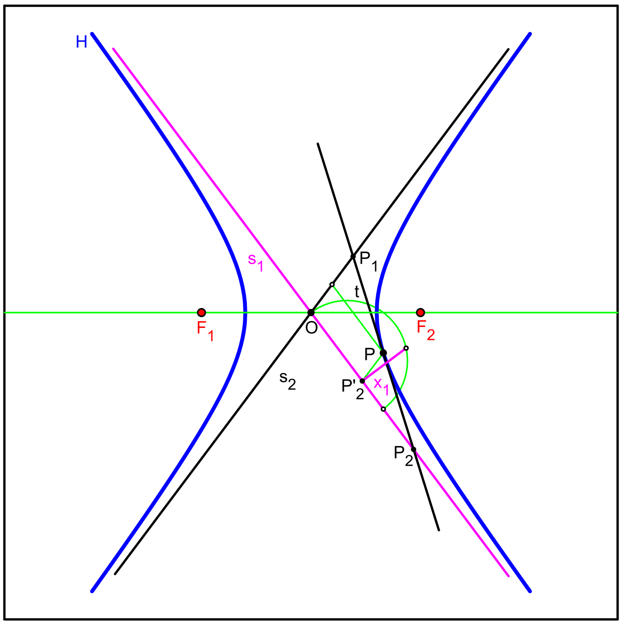
Solução do Exercício H.13



Solução do Exercício H.14



Solução do Exercício H.15



Solução do Exercício H.16

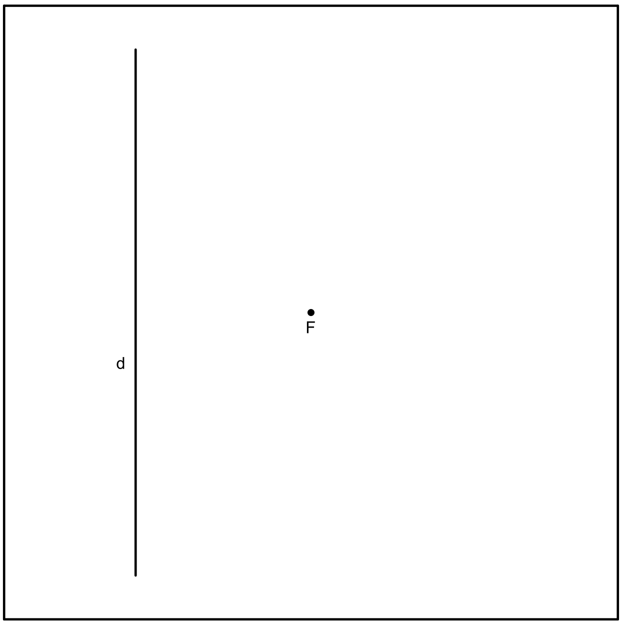
Capítulo 3

Parábola

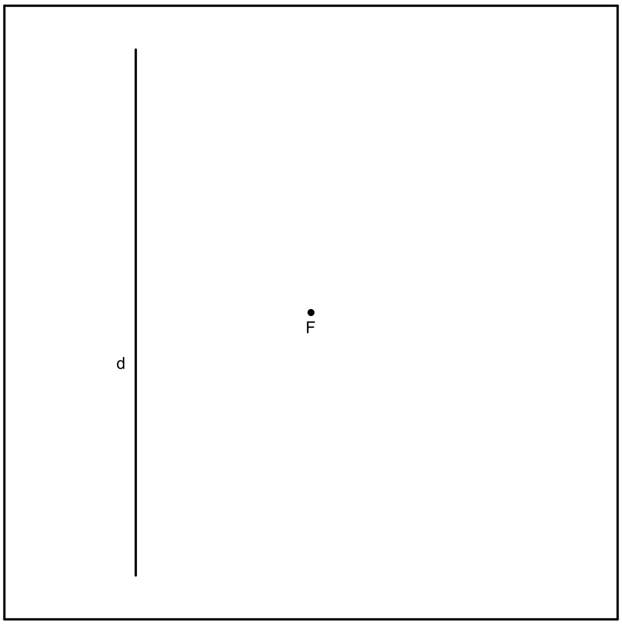
3.1 Exemplos

Exemplo P.1: Determine os pontos da parábola, dados o foco F e a diretriz d.

Exemplo P.2: Determine o eixo x e o vértice V da parábola, dados o foco F e a diretriz d.



Exemplo P.1



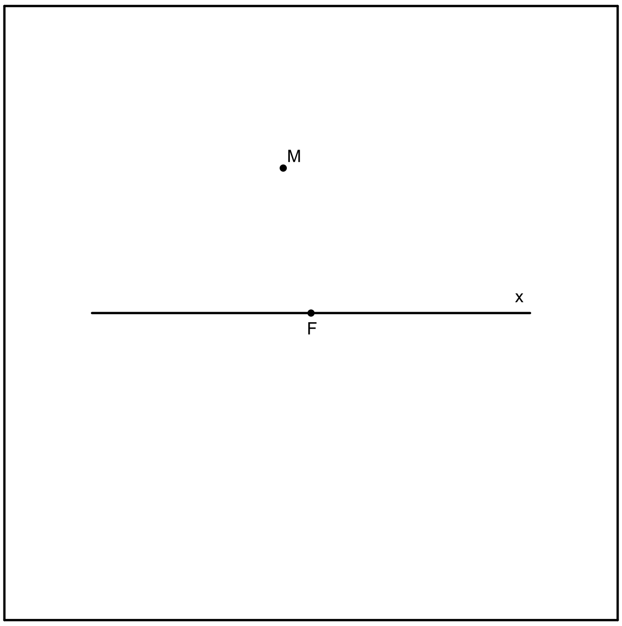
Exemplo P.2

Exemplo P.3: Determine a diretriz d e o vértice V da parábola, dados o foco F, o eixo x e o ponto M da curva.

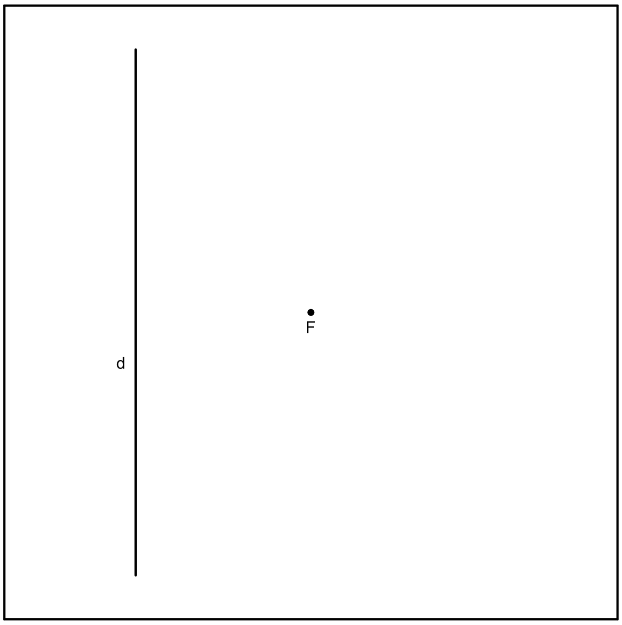
Exemplo P.4: Determine a corda focal mínima da parábola, dados o foco F e a diretriz d.

Exemplo P.5: Determine o ponto de tangência M e o vértice V da parábola, dados o foco F, o eixo x e a tangente t pelo ponto M.

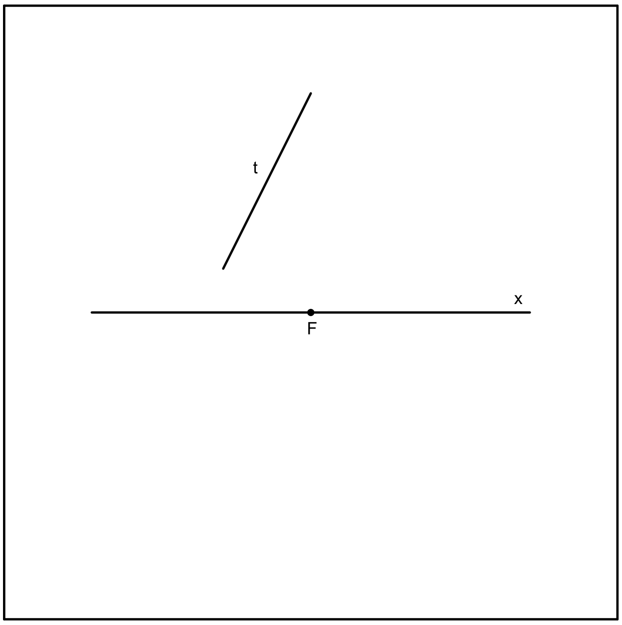
Exemplo P.6: Determine a diretriz d e os pontos de tangência M_1 e M_2 da parábola, dados o foco F e as tangentes t_1 e t_2 por M_1 e M_2, respectivamente.



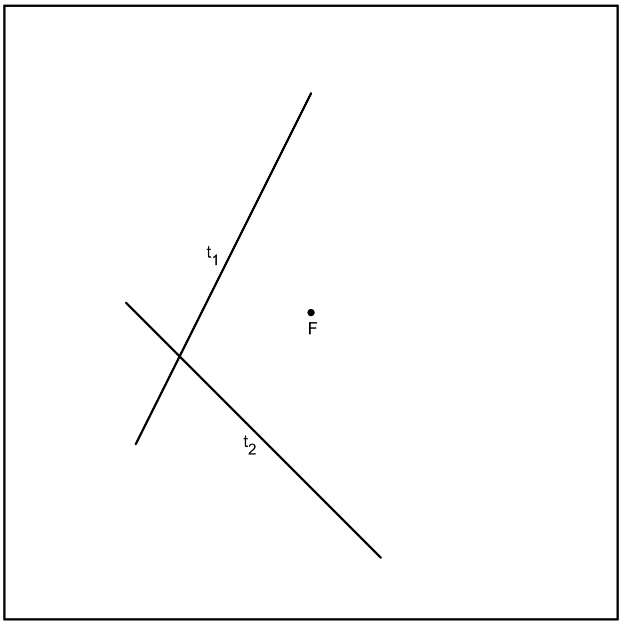
Exemplo P.3



Exemplo P.4



Exemplo P.5



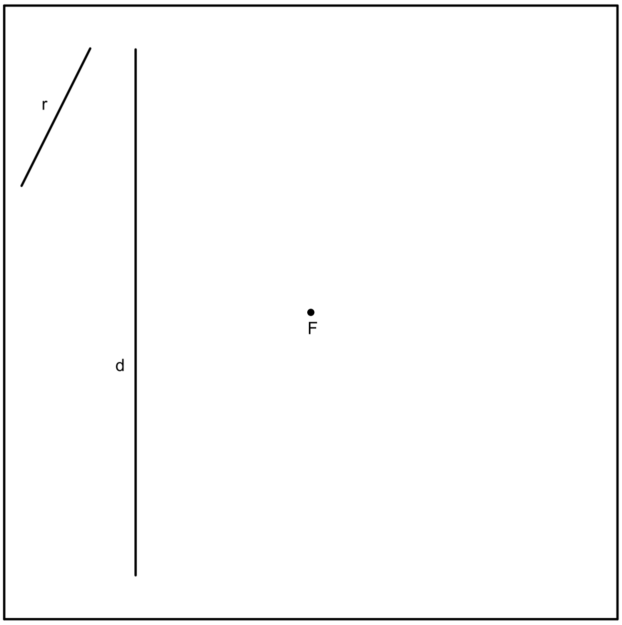
Exemplo P.6

Exemplo P.7: Determine a tangente t da parábola, dados o foco F, a diretriz d e a direção r da tangente.

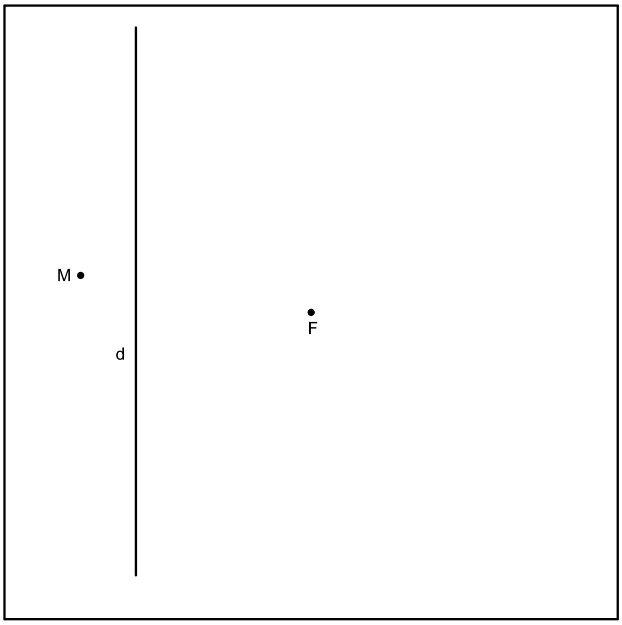
Exemplo P.8: Determine as tangentes t_1 e t_2 da parábola, dados o foco F, a diretriz d e o ponto M externo pertencente a t_1 e t_2.

Exemplo P.9: Determine a diretriz d da parábola, dados o foco F, o eixo x e a normal n.

Exemplo P.10: Determine o lugar geométrico do foco F das parábolas, dadas a

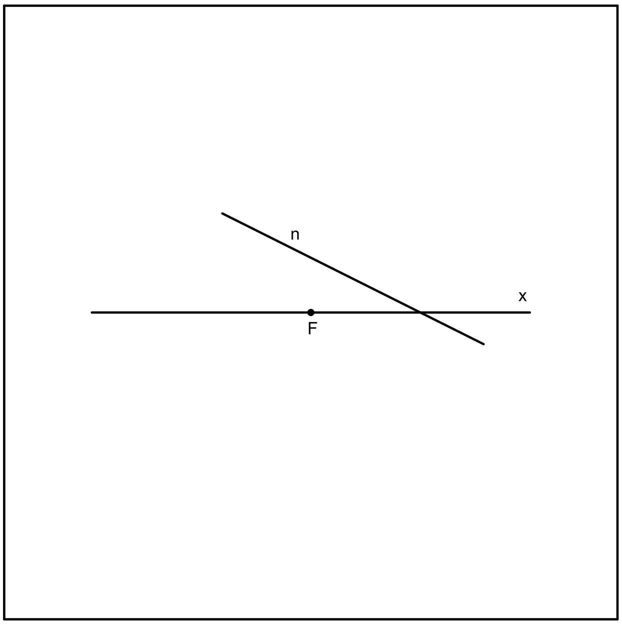


Exemplo P.7

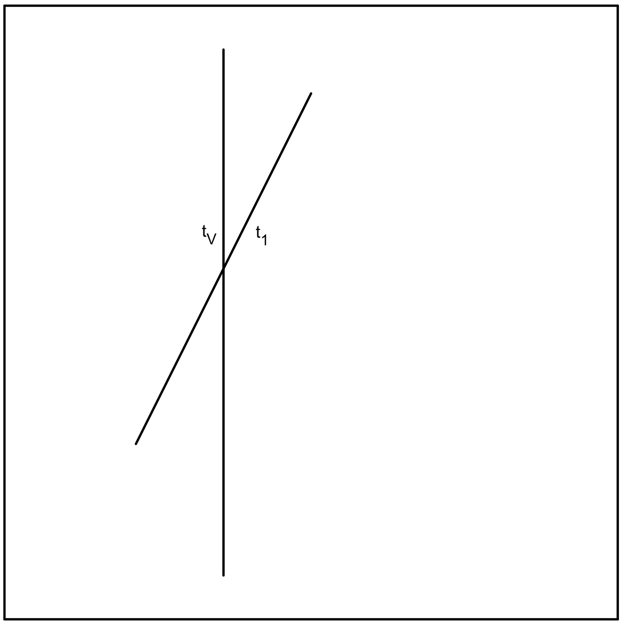


Exemplo P.8

tangente no vértice t_V e a tangente genérica t_1.



Exemplo P.9



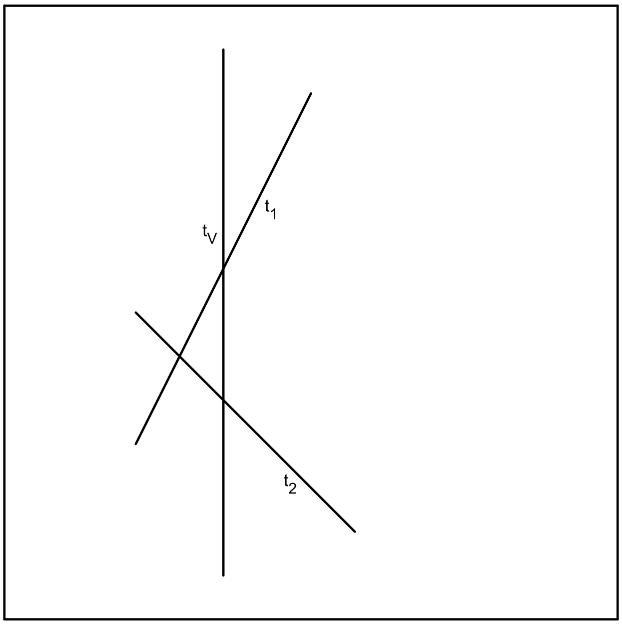
Exemplo P.10

Exemplo P.11: Determine o foco F de uma parábola, dadas a tangente no vértice t_V e as tangentes genéricas t_1 e t_2.

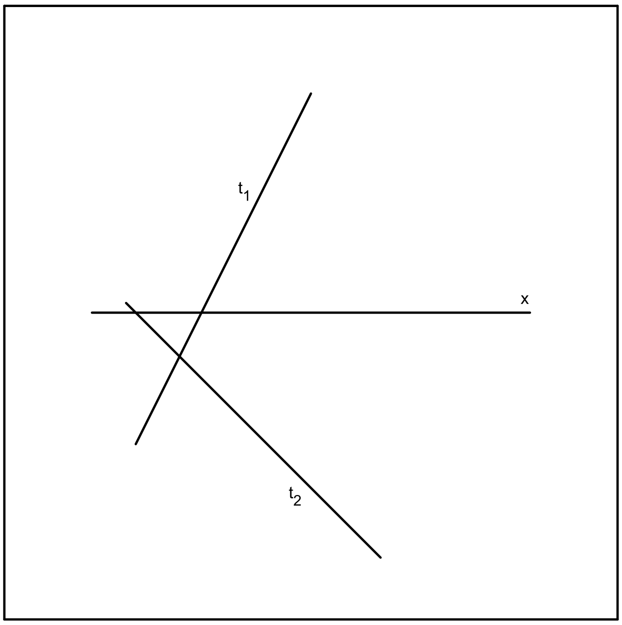
Exemplo P.12: Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dados o eixo x e as tangentes genéricas t_1 e t_2.

Exemplo P.13: Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dados a subtangente IT e a subnormal IN.

Exemplo P.14: Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dados as tangentes t_1

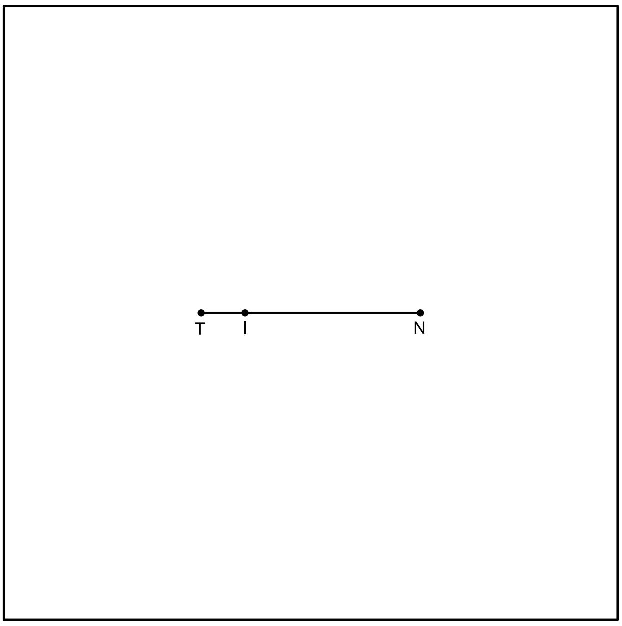


Exemplo P.11

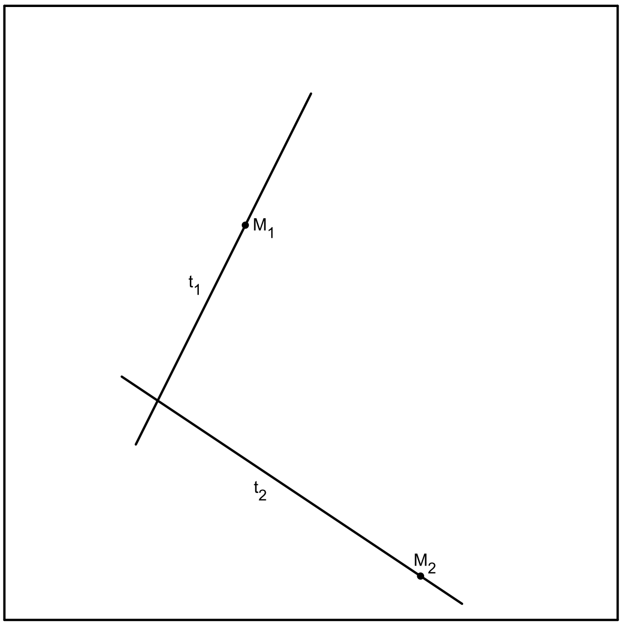


Exemplo P.12

e t_2 pelos pontos M_1 e M_2 da parábola, respectivamente.



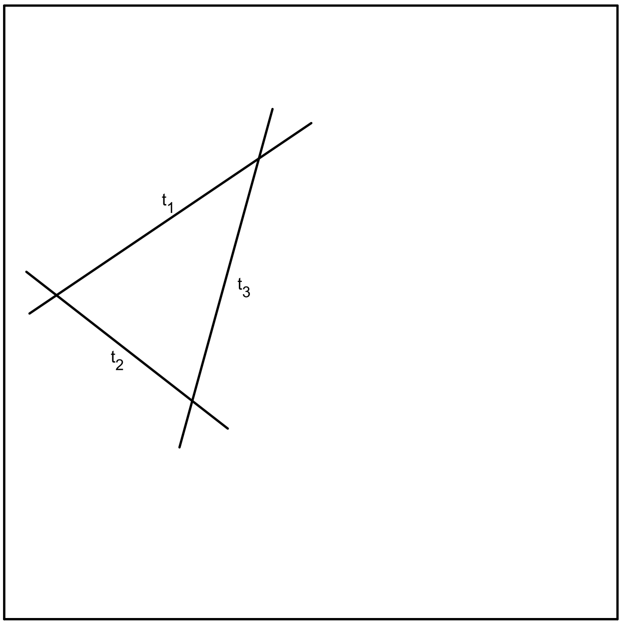
Exemplo P.14



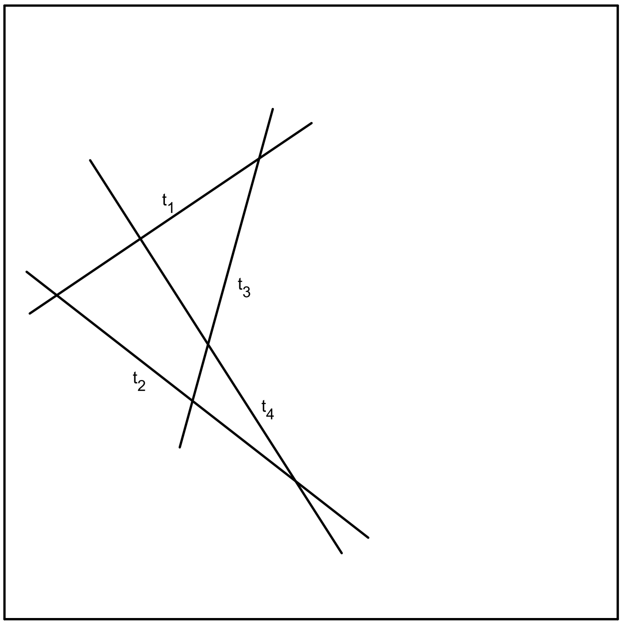
Exemplo P.13

Exemplo P.15: Determine o lugar geométrico do foco F das parábolas, dadas três tangentes genéricas t_1, t_2 e t_3.

Exemplo P.16: Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dadas quatro tangentes genéricas t_1, t_2, t_3 e t_4.



Exemplo P.15

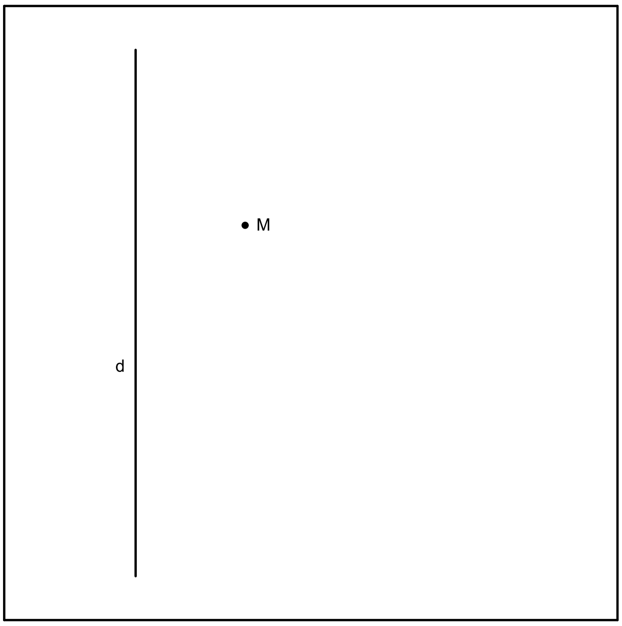


Exemplo P.16

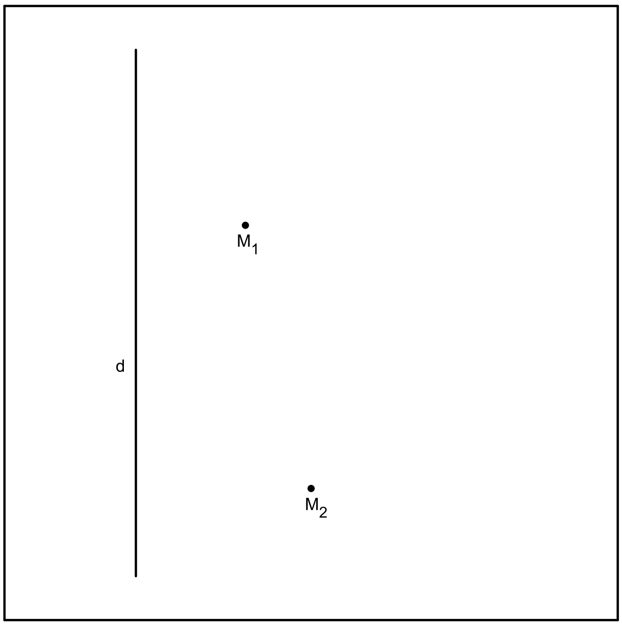
3.2 Exercícios

Exercício P.1: Determine o lugar geométrico dos focos das parábolas, dados a diretriz d e o ponto M da curva.

Exercício P.2: Determine o foco F e o vértice V da parábola, dados a diretriz d e os pontos M_1 e M_2 da curva.



Exercício P.1

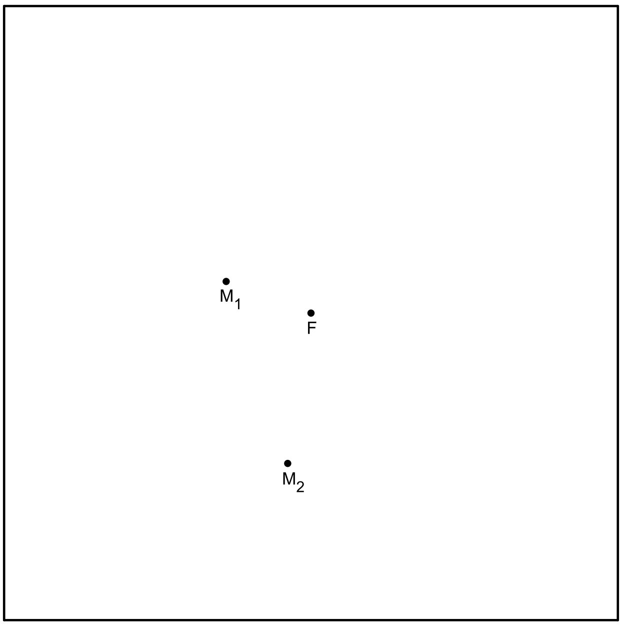


Exercício P.2

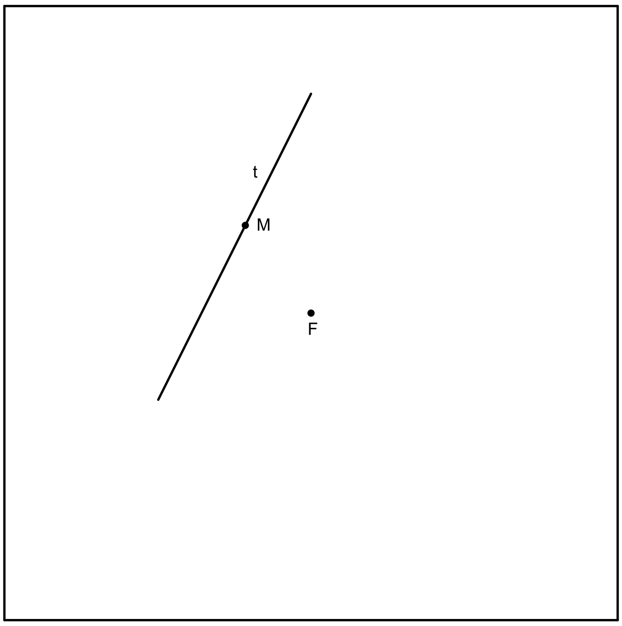
Exercício P.3: Determine a diretriz d da parábola, dados o foco F e os pontos M_1 e

M_2 da curva.

Exercício P.4: Determine a diretriz d da parábola, dados o foco F, a tangente t e o ponto de tangência M.



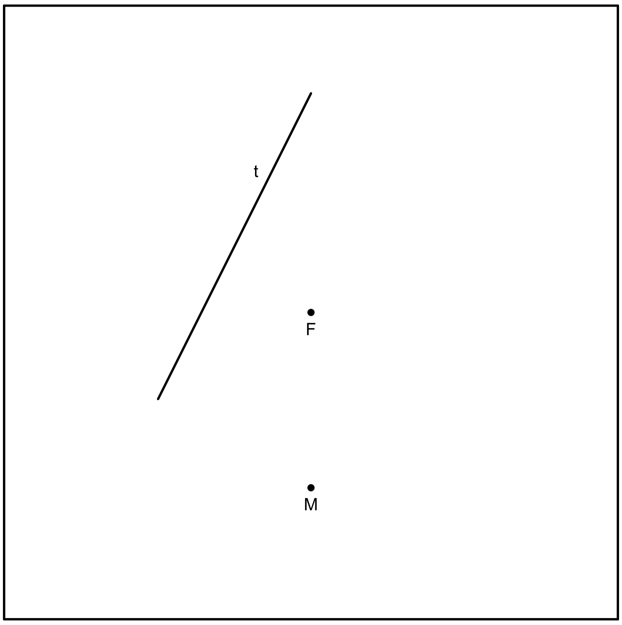
Exercício P.3



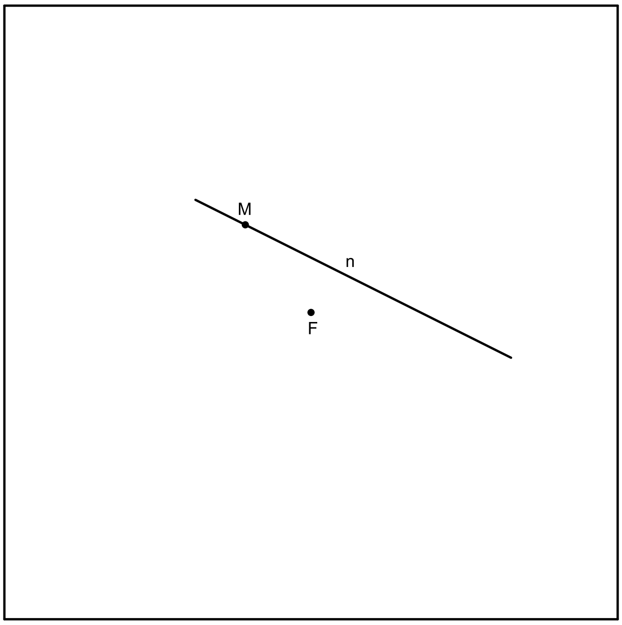
Exercício P.4

Exercício P.5: Determine a diretriz d da parábola, dados o foco F, a tangente t genérica e o ponto M da curva.

Exercício P.6: Determine a diretriz d da parábola, dados o foco F, a normal n e o ponto M de interseção da curva com n.



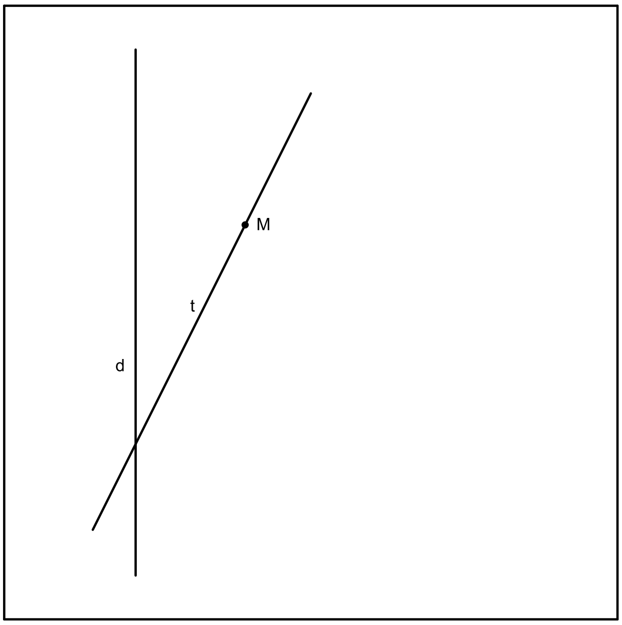
Exercício P.5



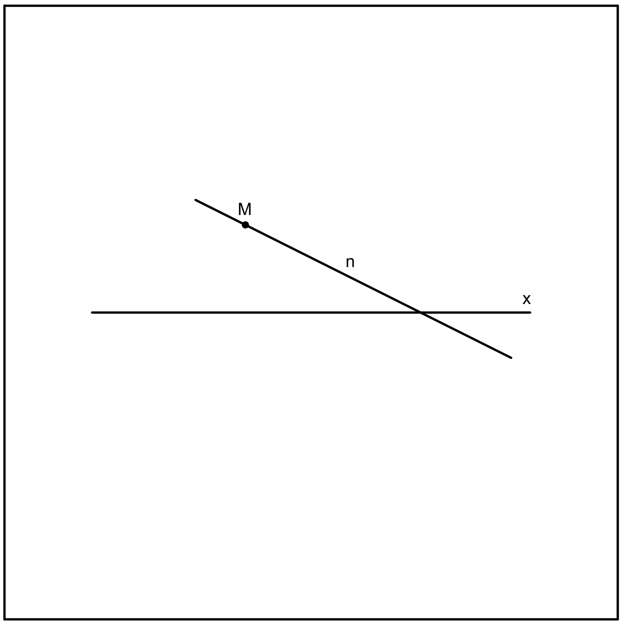
Exercício P.6

Exercício P.7: **Determine o foco F e o vértice V da parábola, dados a diretriz d, a tangente t e o ponto de tangência M.**

Exercício P.8: **Determine o foco F e diretriz d da parábola, dados o eixo x, a normal n e o ponto M de interseção da curva com n.**



Exercício P.7



Exercício P.8

Exercício P.9: **Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dados o eixo x, o vértice V e o ponto M da curva.**

Exercício P.10: **Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dados o eixo x, a tangente t e o ponto de tangência M.**

Exercício P.11: **Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dados o vértice V, a tangente t e o ponto de tangência M.**

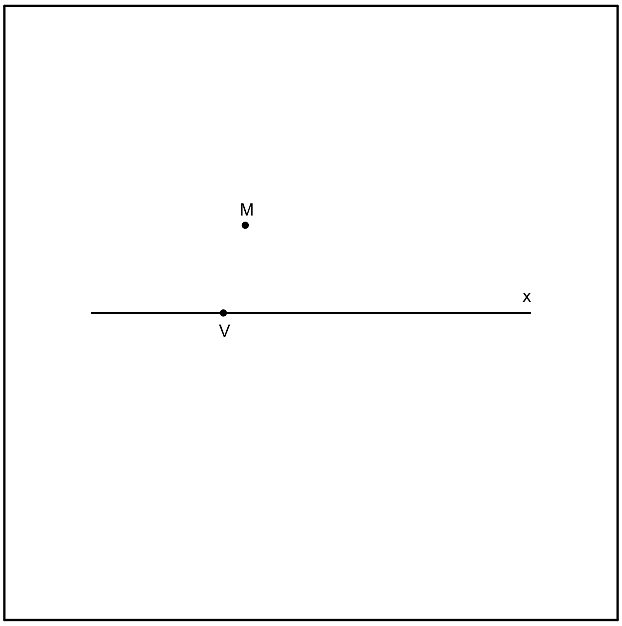
Exercício P.12: **Determine o foco F da parábola, dados a diretriz d, a tangente t e o ponto M da curva.**

Exercício P.13: **Determine o foco F da parábola, dadas a diretriz d e as tangentes genéricas t_1 e t_2.**

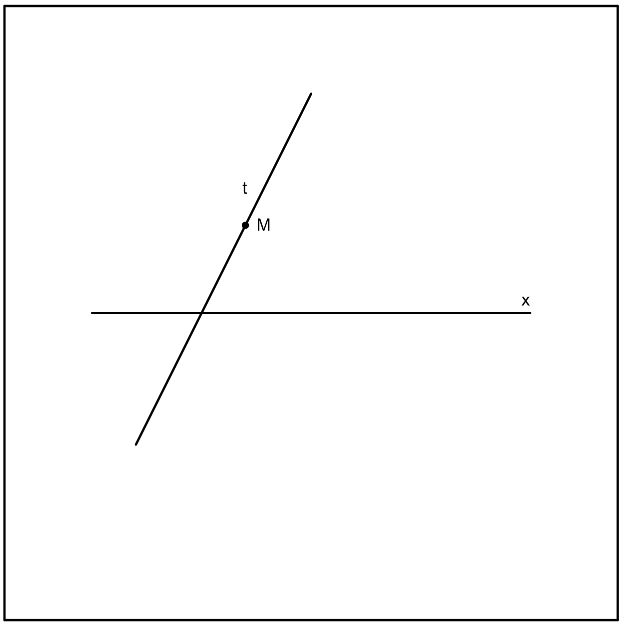
Exercício P.14: **Determine o lugar geométrico dos focos das parábolas, dados a tangente t, o ponto de tangência M e o ponto X pertencente ao eixo x.**

Exercício P.15: **Determine a corda focal de comprimento ℓ de uma parábola, dados a diretriz d e o foco F.**

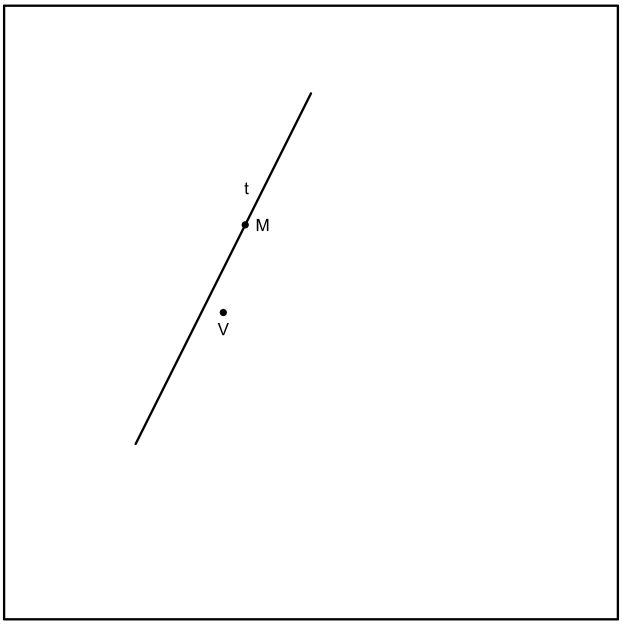
Exercício P.16: **Determine a tangente comum t e os pontos de tangência M_1 e M_2 a duas parábolas de mesmo foco F, dadas as respectivas diretrizes d_1 e d_2.**



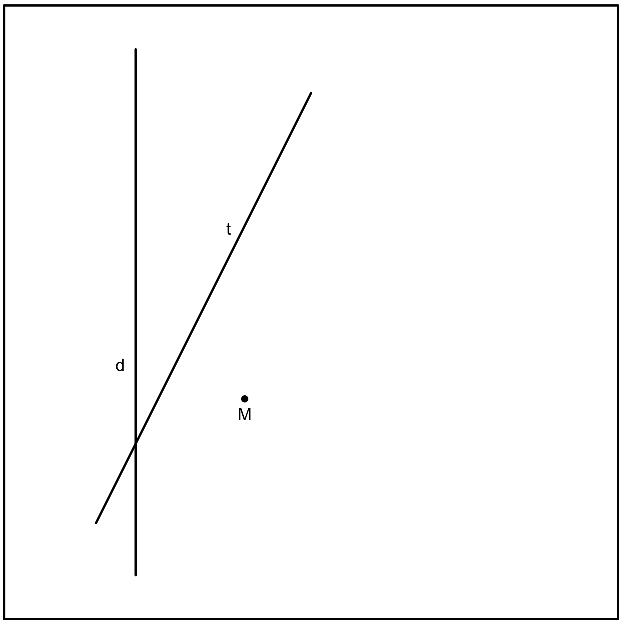
Exercício P.9



Exercício P.10



Exercício P.11



Exercício P.12

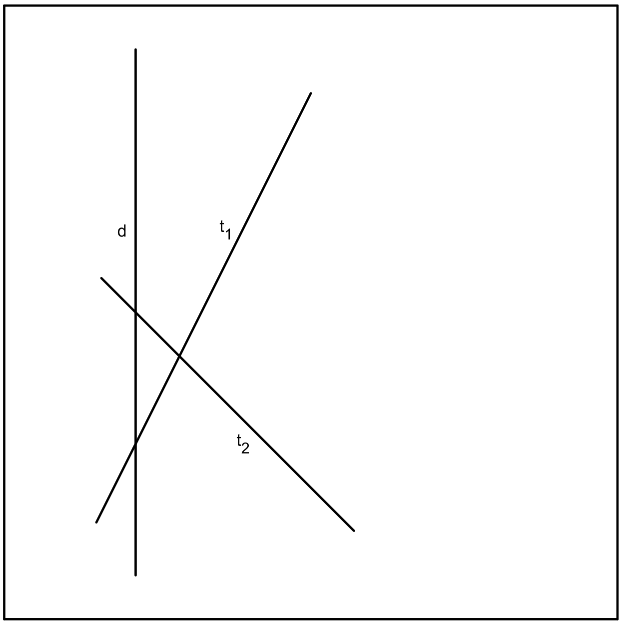
3.3 Exemplos Resolvidos

Exemplo P.1: Determine os pontos da parábola, dados o foco F e a diretriz d.

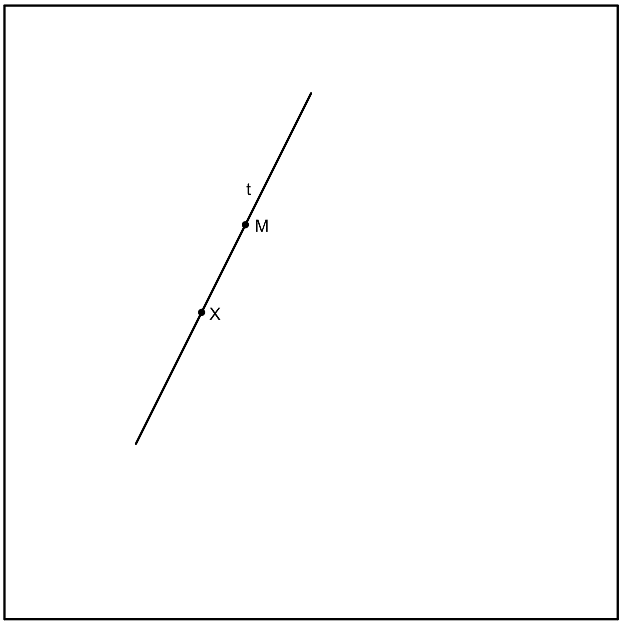
Solução: (i) Trace uma perpendicular p à diretriz d por um ponto qualquer M' sobre d; (ii) Trace a mediatriz m de FM', determinando o ponto M da parábola P sobre p.

Exemplo P.2: Determine o eixo x e o vértice V da parábola, dados o foco F e a diretriz d.

Solução: (i) Trace uma perpendicular x à diretriz d pelo foco F, determinando o eixo desejado e a interseção F' do eixo com d; (ii) Marque o vértice V desejado como o ponto médio de FF'.

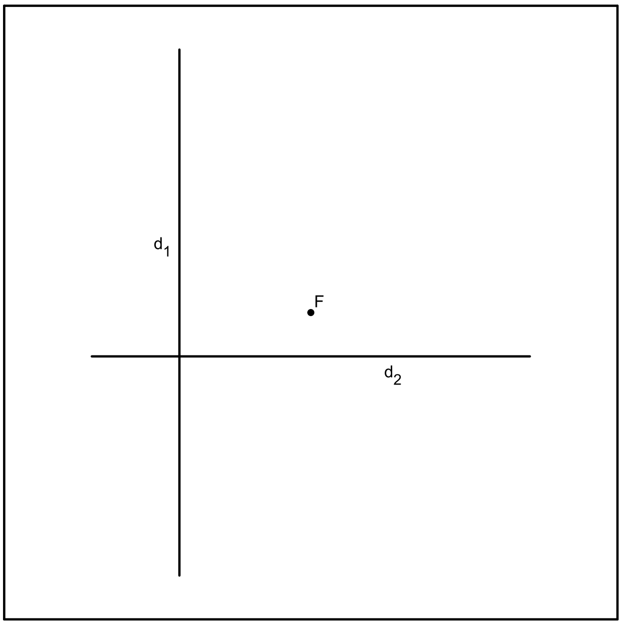


Exercício P.13



Exercício P.14

Exercício P.15



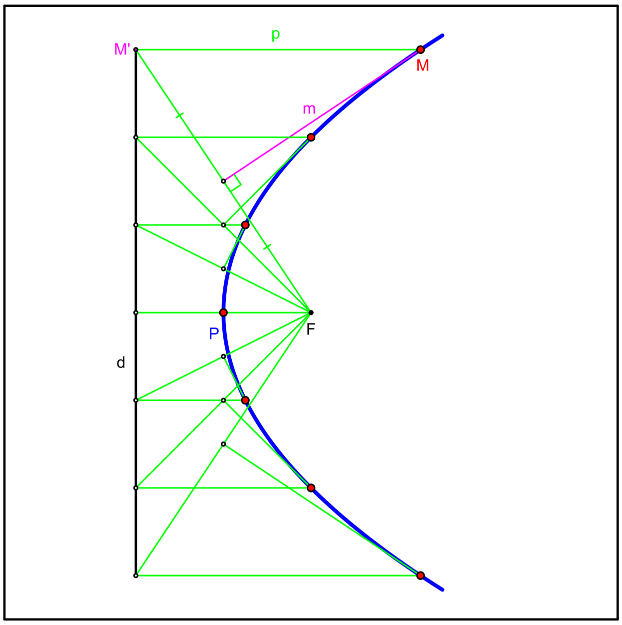
Exercício P.16

Exemplo P.3: Determine a diretriz d e o vértice V da parábola, dados o foco F, o eixo x e o ponto M da curva.

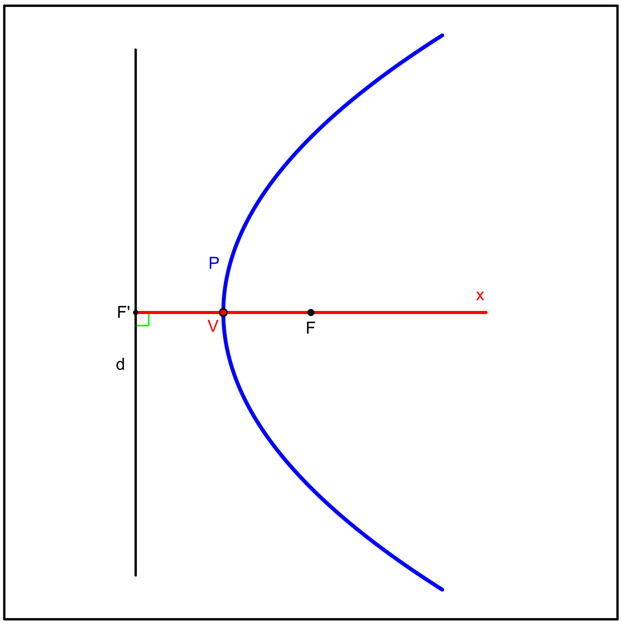
Solução: (i) Trace uma paralela p ao eixo x por M e marque $MM' = MF$ sobre esta paralela; (ii) Trace uma perpendicular d a p por M', determinando a diretriz desejada e o ponto F' sobre o eixo x; (iii) Marque o vértice V desejado como o ponto médio de FF'.

Exemplo P.4: Determine a corda focal mínima da parábola, dados o foco F e a diretriz d.

Solução: (i) Trace a perpendicular p à diretriz d por F, determinando o ponto F' sobre d; (ii)

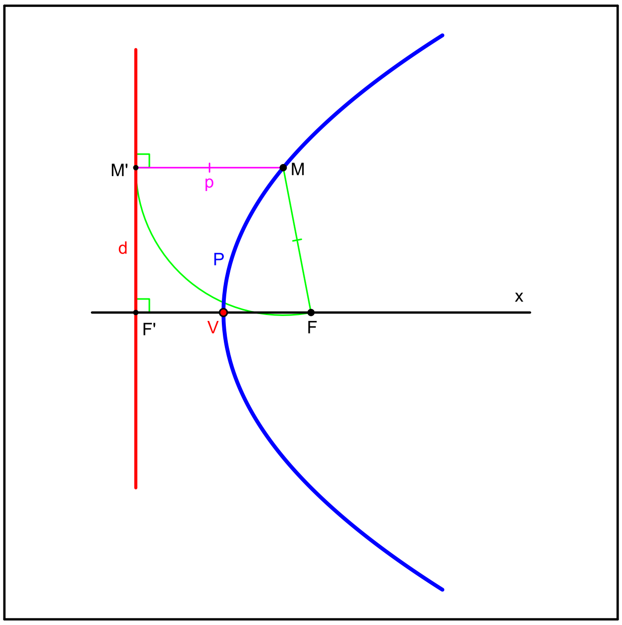


Solução do Exemplo P.1

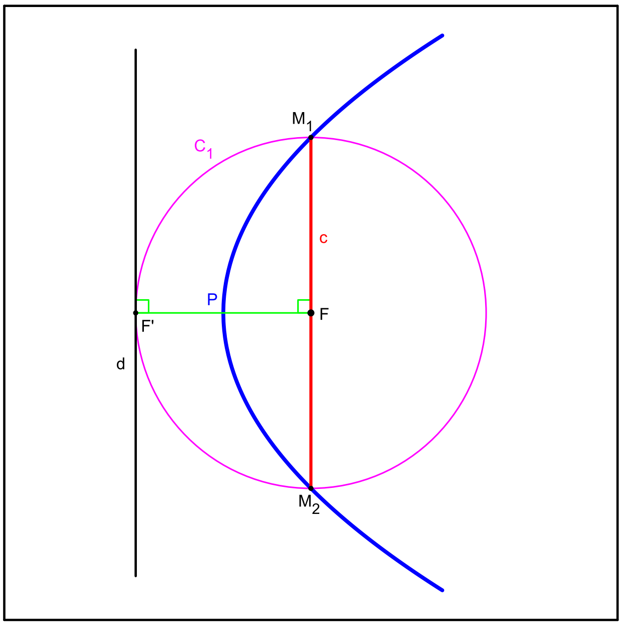


Solução do Exemplo P.2

Trace uma paralela c à diretriz d por F; (ii) Trace o círculo $C_1 = (F, FF')$, determinando a corda focal mínima M_1M_2 sobre c.



Solução do Exemplo P.3



Solução do Exemplo P.4

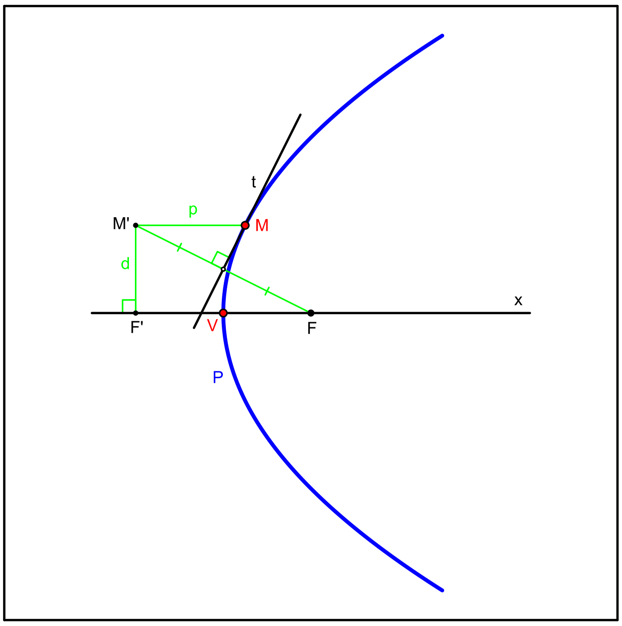
Exemplo P.5: Determine o ponto de tangência M e o vértice V da parábola, dados o foco F, o eixo x e a tangente t pelo ponto M.

Solução: (i) Determine o simétrico M' de F em relação à tangente t; (ii) Trace uma paralela p ao eixo x por M', determinando o ponto de tangência M desejado sobre t; (iii) Trace uma perpendicular d ao eixo x por M', determinando o ponto F' sobre o eixo; (iv) Marque o vértice V, ponto médio de FF'.

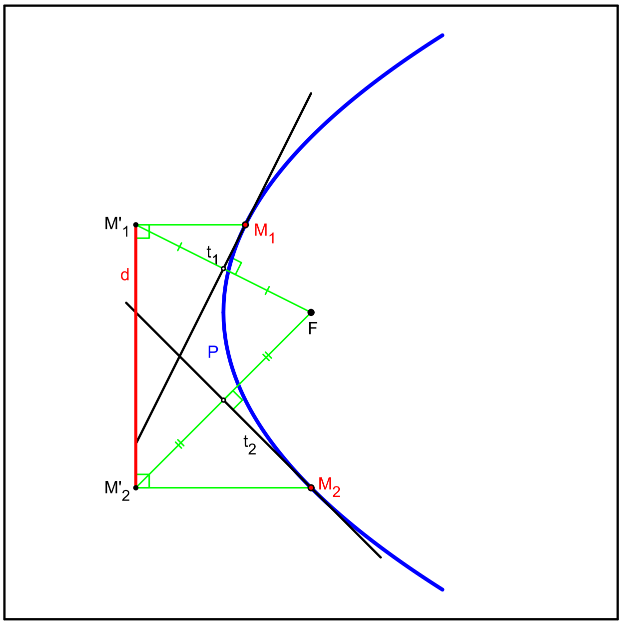
Exemplo P.6: Determine a diretriz d e os pontos de tangência M_1 e M_2 da parábola,

dados o foco F e as tangentes t_1 e t_2 por M_1 e M_2, respectivamente.

Solução: (i) Determine os simétricos M_1' e M_2' de F em relação às tangentes t_1 e t_2, respectivamente, determinando a diretriz $d \equiv M_1'M_2'$; (ii) Trace perpendiculares à diretriz d por M_1' e M_2', determinando os pontos de tangência sobre as respectivas tangentes t_1 e t_2.



Solução do Exemplo P.5



Solução do Exemplo P.6

Exemplo P.7: Determine a tangente t da parábola, dados o foco F, a diretriz d e a direção r da tangente.

Solução: (i) Trace uma perpendicular à reta r por F, determinando o ponto M' sobre a diretriz d dada; (ii) Trace a mediatriz t de FM', que é a tangente desejada.

Exemplo P.8: Determine as tangentes t_1 e t_2 da parábola, dados o foco F, a diretriz d e o ponto M externo pertencente a t_1 e t_2.

Solução: (i) Trace o círculo $C_1 \equiv (M, MF)$, determinando os pontos M_1' e M_2' sobre a diretriz d; (ii) Trace as mediatrizes t_1 e t_2 de FM_1' e FM_2', respectivamente, que são as tangentes desejadas.

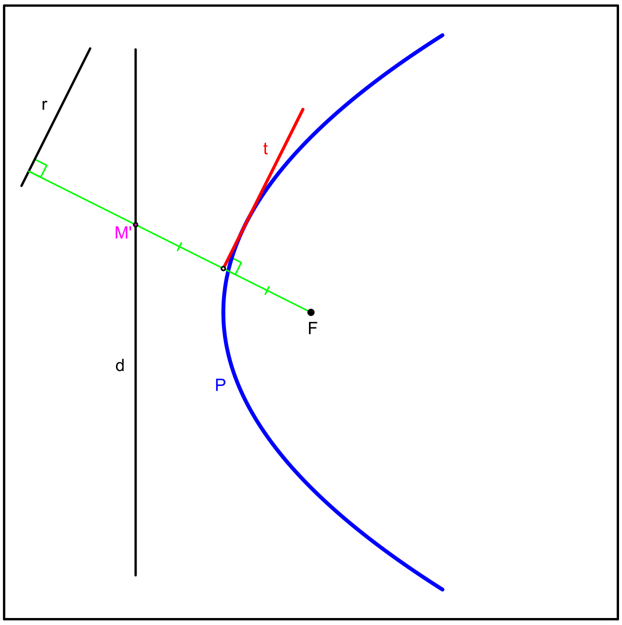
Justificativa: O ponto M dado deve pertencer às mediatrizes de FM_1' e FM_2'. Logo, $MF = MM_1' = MM_2'$, de modo que M deve ser o centro do círculo passando por F, M_1' e M_2', o que permite determinar M_1' e M_2'.

Exemplo P.9: Determine a diretriz d da parábola, dados o foco F, o eixo x e a normal n.

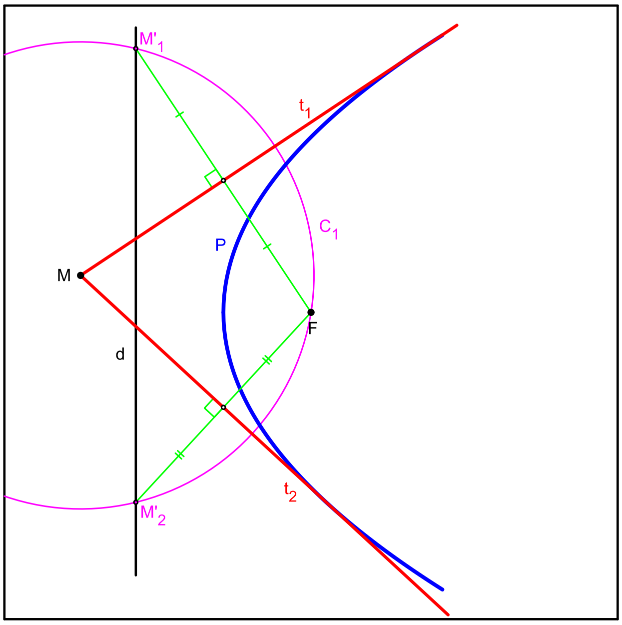
Solução: (i) Marque a interseção N da normal n com o eixo x e determine o simétrico T de N em relação ao foco F; (ii) Trace a perpendicular t à normal n por T, determinando uma tangente à parábola P; (iii) Determine o simétrico M' de F em relação à tangente t; (iv) Trace a perpendicular ao eixo x por M', determinando a diretriz d desejada.

Justificativa: Pelo Teorema 3, Corolário 2, o foco F é ponto médio das interseções T da tangente e N da normal por um ponto M qualquer da parábola com o eixo x. Além disto, pelo Corolário 3 do mesmo teorema, o simétrico M' do foco em relação a uma tangente pertence à diretriz d, que é perpendicular ao eixo, o que a permite determinar.

Exemplo P.10: Determine o lugar geométrico do foco F das parábolas, dadas a



Solução do Exemplo P.7

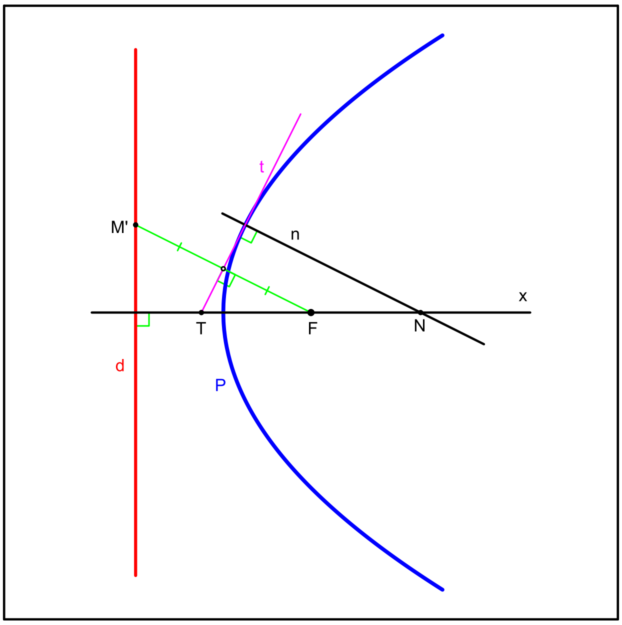


Solução do Exemplo P.8

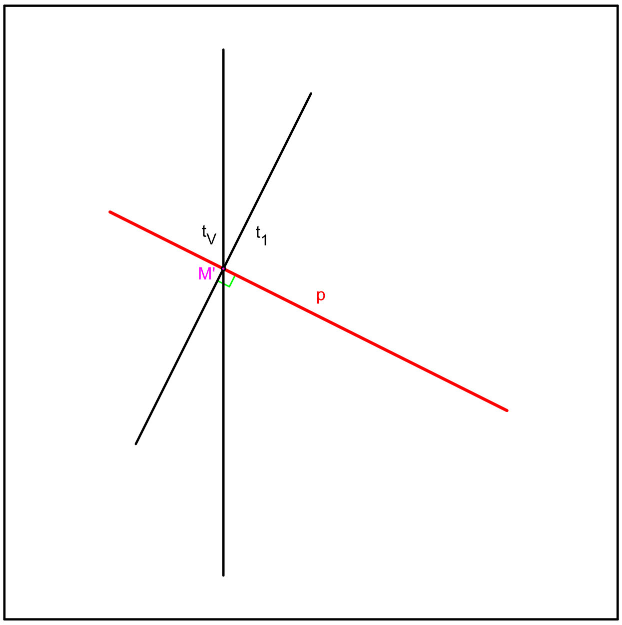
tangente no vértice t_V e a tangente genérica t_1.

Solução: (i) Trace a perpendicular p à tangente genérica t_1 pelo ponto M' de interseção entre t_1 e t_V, determinando o lugar geométrico desejado.

Justificativa: A perpendicular p é o lugar geométrico dos pontos que pertencem à tangente pelo vértice t_V quando projetados na tangente genérica t_1.



Solução do Exemplo P.9



Solução do Exemplo P.10

Exemplo P.11: Determine o foco F de uma parábola, dadas a tangente no vértice t_V e as tangentes genéricas t_1 e t_2.

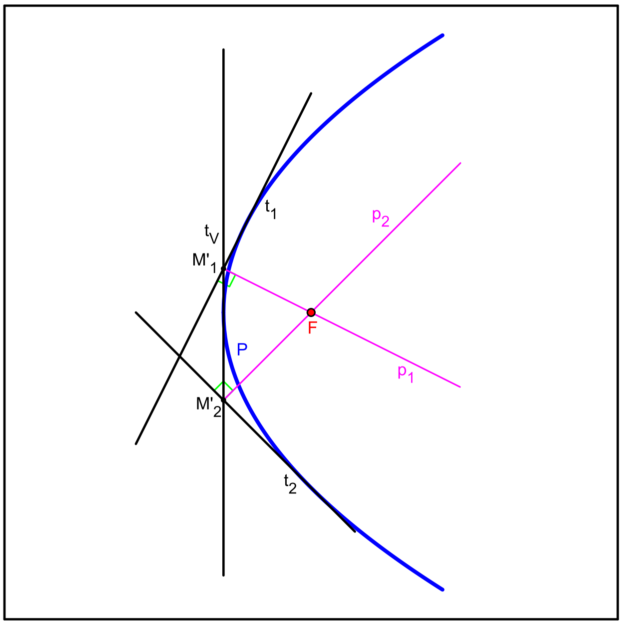
Solução: (i) Trace as perpendiculares p_1 e p_2 às tangentes genéricas t_1 e t_2 pelas respectivas interseções M_1' e M_2' destas tangentes com a tangente pelo vértice t_V, determinando o foco F.

Justificativa: Basta aplicar duas vezes a solução do Exemplo P.10.

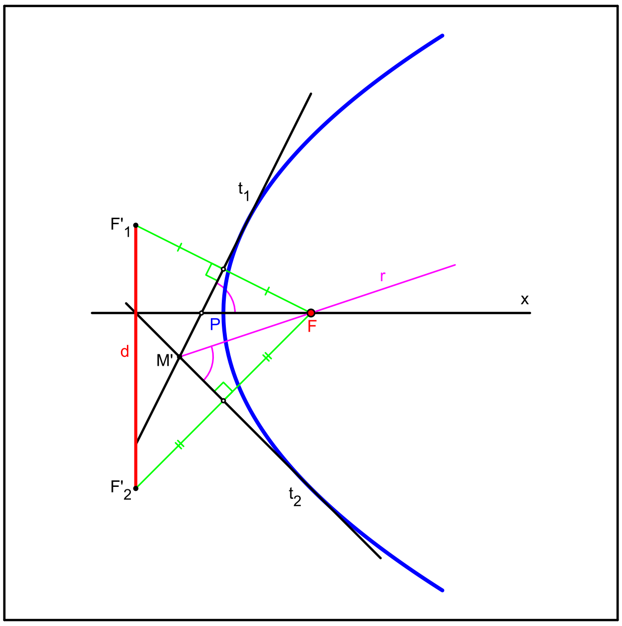
Exemplo P.12: Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dados o eixo x e as tangentes genéricas t_1 e t_2.

Solução: (i) Trace, pela interseção M' das duas tangentes, uma reta r que faz com a tangente t_2 o mesmo ângulo que o eixo x faz com a tangente t_1, determinando o foco desejado F sobre o próprio eixo x, enquanto que a diretriz d é determinada como descrito no Exemplo P.6.

Justificativa: O foco é determinado pela aplicação direta do Teorema de Poncelet.



Solução do Exemplo P.11



Solução do Exemplo P.12

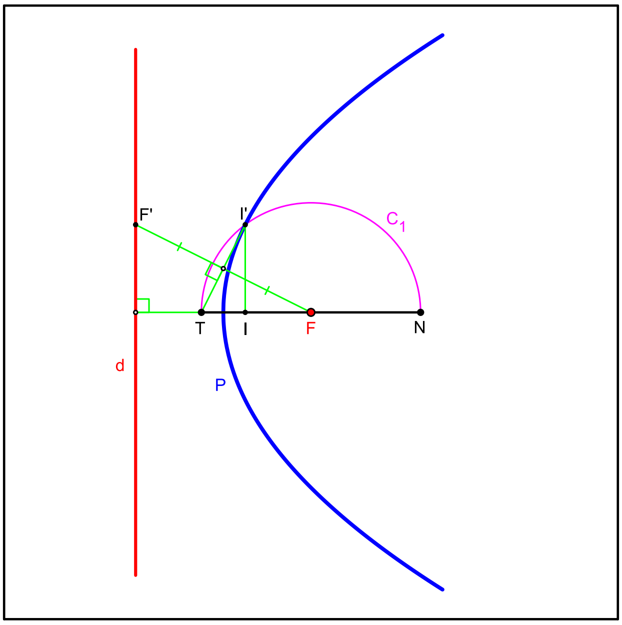
Exemplo P.13: Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dados a subtangente IT e a subnormal IN.

Solução: (i) Marque o foco F como o ponto médio de TN; (ii) Trace o círculo $C_1 \equiv (F, FT)$; (iii) Trace uma perpendicular ao segmento TN por I, determinando o ponto auxiliar I' sobre C_1; (iv) Determine o simétrico F' de F em relação à tangente TI'; (v) Trace a perpendicular d à reta suporte do segmento TN por F', determinando a diretriz desejada.

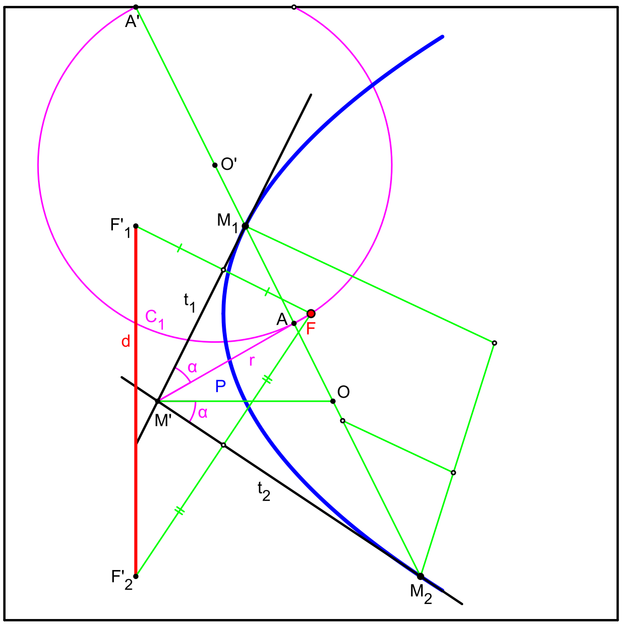
Exemplo P.14: Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dados as tangentes t_1 e t_2 pelos pontos M_1 e M_2 da parábola, respectivamente.

Solução: (i) Trace a reta suporte de $M'O$, onde M' é a interseção das tangentes dadas t_1 e t_2 e O é o ponto médio de M_1M_2; (ii) Trace a reta r fazendo um ângulo com a tangente t_1 igual ao ângulo α entre $M'O$ e a tangente t_2, determinando o ponto auxiliar A sobre o segmento M_1M_2; (iii) Determine o conjugado harmônico A' de A em relação ao segmento M_1M_2. Para isto, definindo $M_1M_2 = \ell$ e $M_1A = x_1$, determine a quarta proporcional $(\ell - 2x_1) : \ell = x_1 : x_2$ e marque $M_1A' = x_2$; (iv) Trace o círculo de Apolônio C_1 relativo ao segmento M_1M_2 e razão $\frac{M_1A}{M_2A}$ (círculo com diâmetro AA'), determinando o foco F sobre a reta r, enquanto que a diretriz d é determinada como descrito no Exemplo P.6.

Justificativa: Pelo Teorema de Poncelet, Item B, a reta r é bissetriz do ângulo $\widehat{M_1FM_2}$, de modo que o foco F pertence ao círculo de Apolônio C_1 do segmento M_1M_2 com razão $\frac{M_1A}{M_2A}$.



Solução do Exemplo P.13



Solução do Exemplo P.14

Exemplo P.15: Determine o lugar geométrico do foco F das parábolas, dadas três tangentes genéricas t_1, t_2 e t_3.

Solução: (i) Marque as três interseções das tangentes duas a duas e trace o círculo C_1 circunscrito às três interseções, determinando o lugar geométrico desejado para o foco das parábolas tangentes a t_1, t_2 e t_3.

Justificativa: Aplicação direta do Teorema P.9.

Exemplo P.16: Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dadas quatro tangentes genéricas t_1, t_2, t_3 e t_4.

Solução: (i) Marque as seis interseções das quatro tangentes duas a duas e trace os círculos C_1, C_2, C_3 e C_4 circunscritos às interseções três a três, determinando o foco F desejado, enquanto que a diretriz d é determinada como descrito no Exemplo P.6.

Justificativa: Pelo Teorema de Miquel, os círculos C_1, C_2, C_3 e C_4 se interceptam em um ponto, que no caso é o foco desejado.

3.4 Exercícios Resolvidos

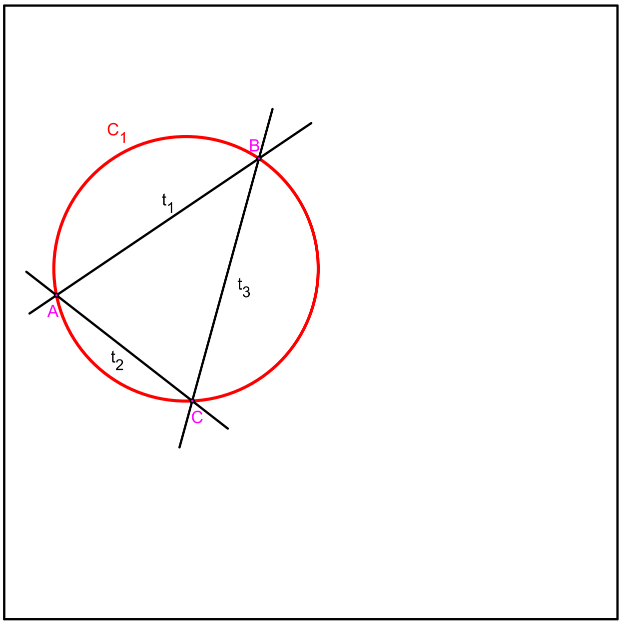
Exercício P.1: Determine o lugar geométrico dos focos das parábolas, dados a diretriz d e o ponto M da curva.

Solução: (i) Determine a projeção M' de M sobre a diretriz d e trace o círculo $C_1 \equiv (M, MM')$ que, retirando o ponto M', constitui o lugar geométrico desejado.

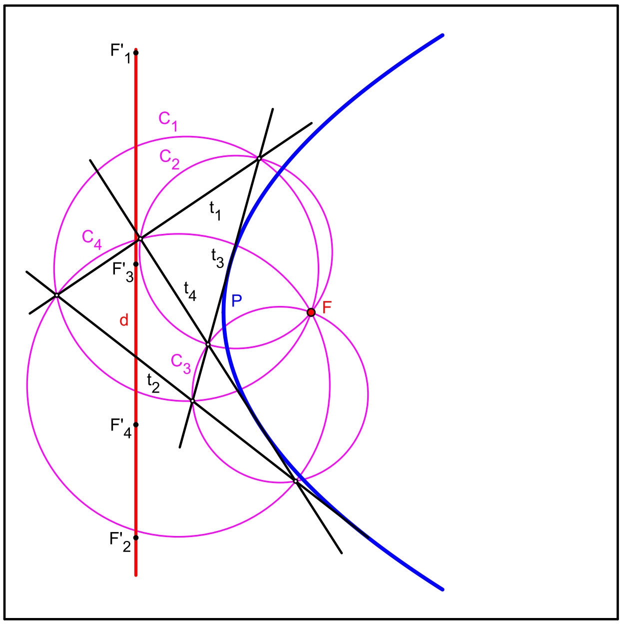
Justificativa: Pelo definição de parábola, devemos ter $MF = MM'$.

Exercício P.2: Determine o foco F e o vértice V da parábola, dados a diretriz d e os pontos M_1 e M_2 da curva.

Solução: (i) Determines as respectivas projeções M'_1 e M'_2 dos pontos dados M_1 e M_2 sobre a diretriz d; (ii) Trace os círculos $C_1 \equiv (M_1, M_1M'_2)$ e $C_2 \equiv (M_2, M_2M'_2)$, determinando os

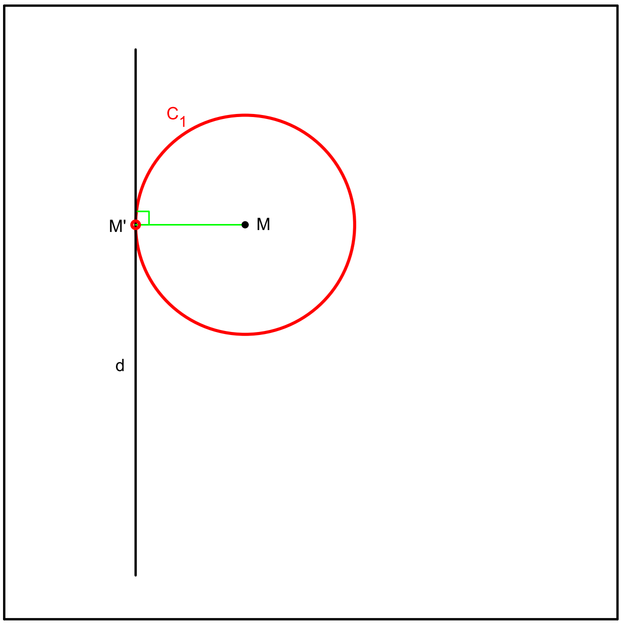


Solução do Exemplo P.15

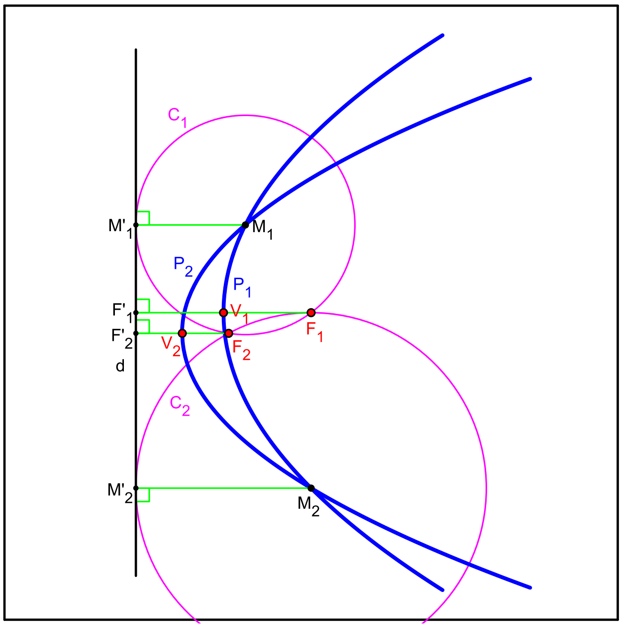


Solução do Exemplo P.16

focos F_1 e F_2 de duas parábolas distintas P_1 e P_2 que satisfazem as condições do enunciado; (iii) Determine as respectivas projeções F_1' e F_2' dos focos F_1 e F_2 sobre a diretriz d, e determine os vértices desejados V_1 e V_2 como pontos médios de F_1F_1' e F_2F_2', respectivamente.



Solução do Exercício P.1



Solução do Exercício P.2

Exercício P.3: Determine a diretriz d da parábola, dados o foco F e os pontos M_1 e M_2 da curva.

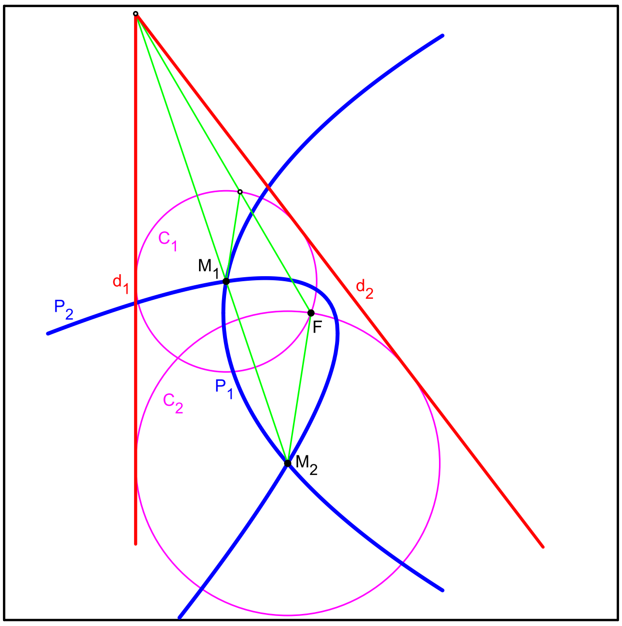
Solução: (i) Trace os círculos $C_1 \equiv (M_1, FM_1)$ e $C_2 \equiv (M_2, FM_2)$; (ii) Trace as tangentes comuns externas[1] d_1 e d_2 a C_1 e C_2, determinando as diretrizes de duas parábolas P_1 e P_2 que

[1]Exercício 1.11 de S. L. Netto, "Construções Geométricas: Exercícios e Soluções", Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

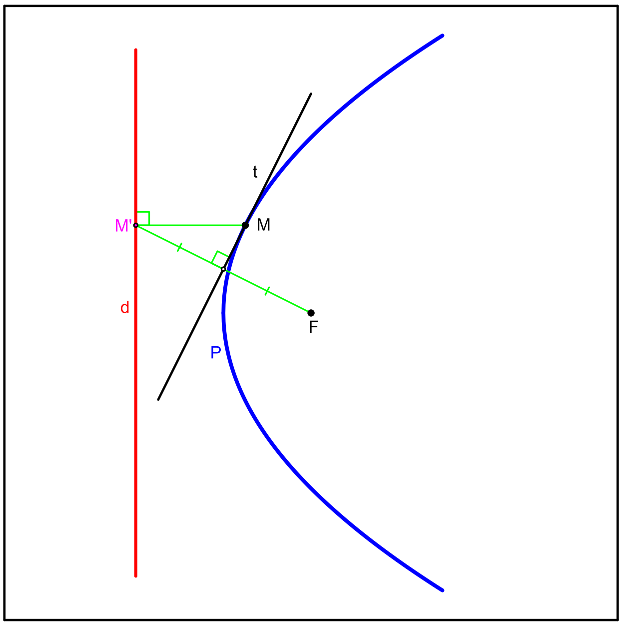
satisfazem as condições do problema.

Exercício P.4: Determine a diretriz d da parábola, dados o foco F, a tangente t e o ponto de tangência M.

Solução: (i) Determine o simétrico M' do foco F em relação à tangente t dada; (ii) Trace a perpendicular d a MM' por M', determinando a diretriz desejada.



Solução do Exercício P.3



Solução do Exercício P.4

Exercício P.5: Determine a diretriz d da parábola, dados o foco F, a tangente t genérica e o ponto M da curva.

Solução: (i) Determine o simétrico M_1' do foco F em relação à tangente t dada; (ii) Trace o círculo $C_1 \equiv (M, MF)$; (iii) Trace as tangentes d_1 e d_2 ao círculo C_1 por M_1', determinando as diretrizes de duas parábolas P_1 e P_2 que satisfazem as condições do problema.

Exercício P.6: Determine a diretriz d da parábola, dados o foco F, a normal n e o ponto M de interseção da curva com n.

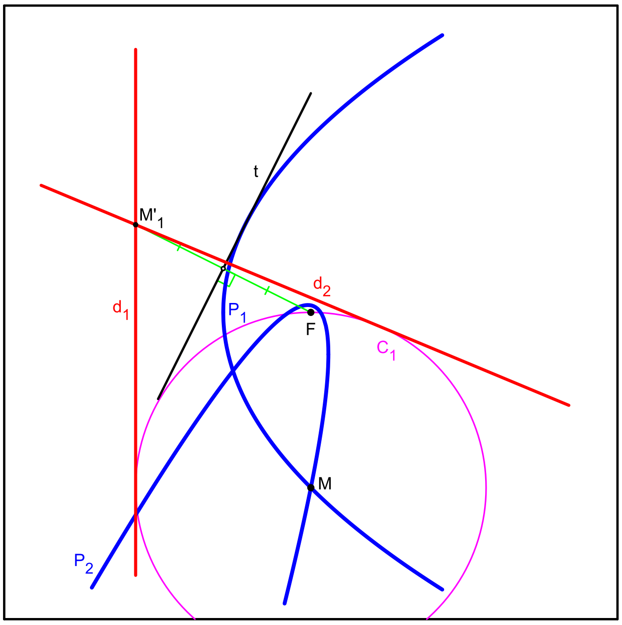
Solução: (i) Trace a perpendicular t à reta n pelo ponto M, tornando a questão equivalente ao Exercício P.4.

Exercício P.7: Determine o foco F e o vértice V da parábola, dados a diretriz d, a tangente t e o ponto de tangência M.

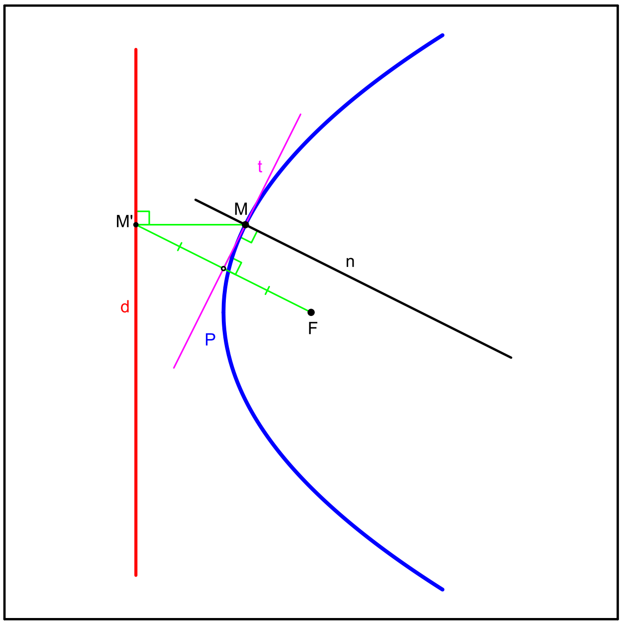
Solução: (i) Determine a projeção M' do ponto M sobre a diretriz d; (ii) Determine o simétrico F de M' em relação à tangente t dada, obtendo o foco desejado; (iii) Determine o vértice desejado V como o ponto médio de FF', onde F' é a projeção do foco F na diretriz d.

Exercício P.8: Determine o foco F e diretriz d da parábola, dados o eixo x, a normal n e o ponto M de interseção da curva com n.

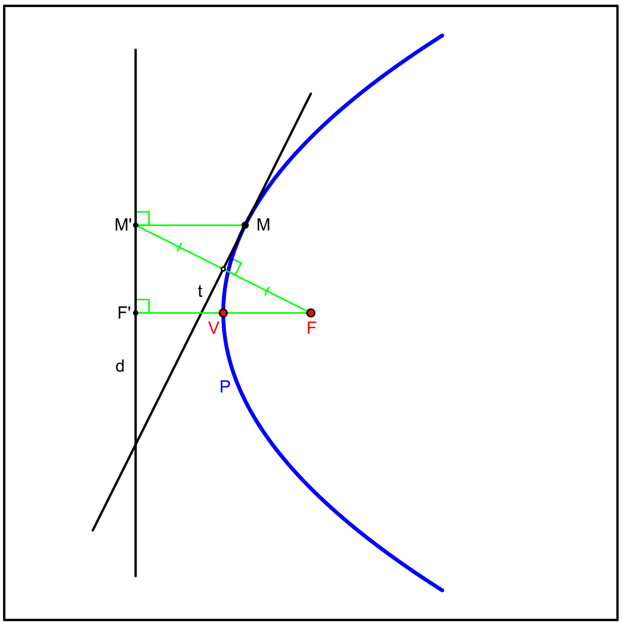
Solução: (i) Trace a perpendicular t à normal n pelo ponto M dado, determinando o ponto T sobre o eixo x; (ii) Marque o foco F desejado como o ponto médio de TN, onde N é a interseção da normal n com o eixo x, fazendo com que a diretriz d possa ser determinada como no Exercício P.4.



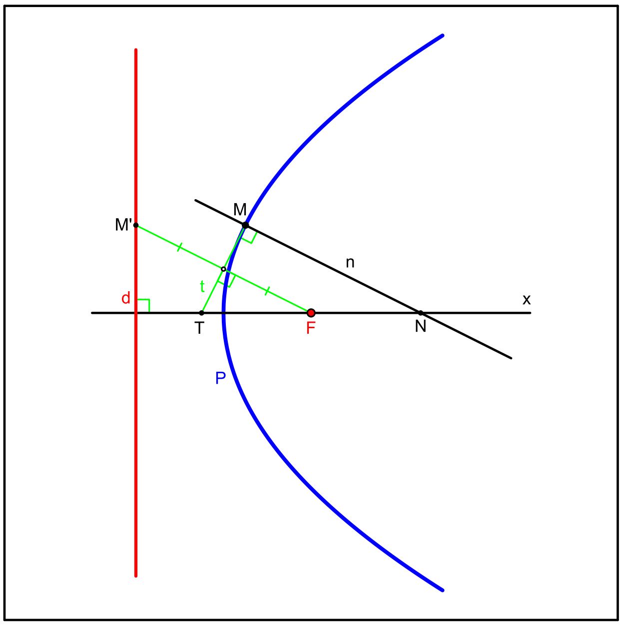
Solução do Exercício P.5



Solução do Exercício P.6



Solução do Exercício P.7



Solução do Exercício P.8

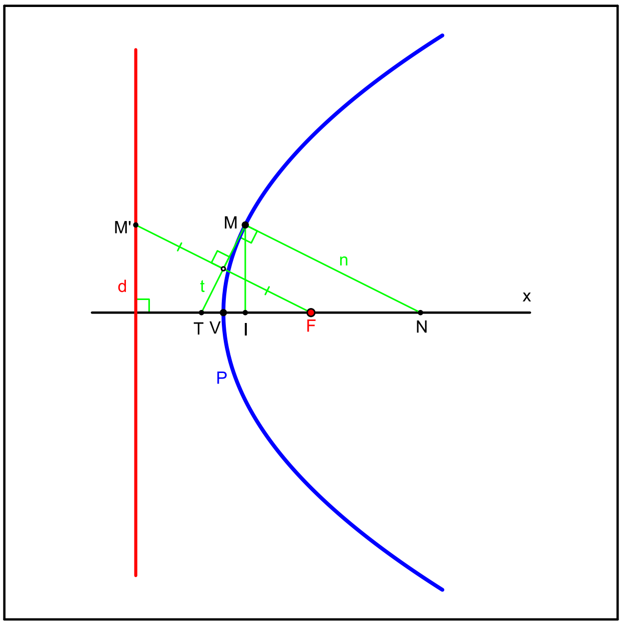
Exercício P.9: Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dados o eixo x, o vértice V e o ponto M da curva.

Solução: (i) Determine a projeção I do ponto M dado sobre o eixo x; (ii) Marque o ponto T sobre o eixo x de modo que V seja o ponto médio de TI; (iii) Trace a reta suporte do segmento TM, determinando a tangente t pelo ponto M; (iv) Trace a perpendicular n à tangente t por M, determinando o ponto N sobre o eixo x; (v) Marque o ponto médio F de TN, determinando o foco desejado e fazendo com que a diretriz d possa ser determinada como no Exercício P.4.

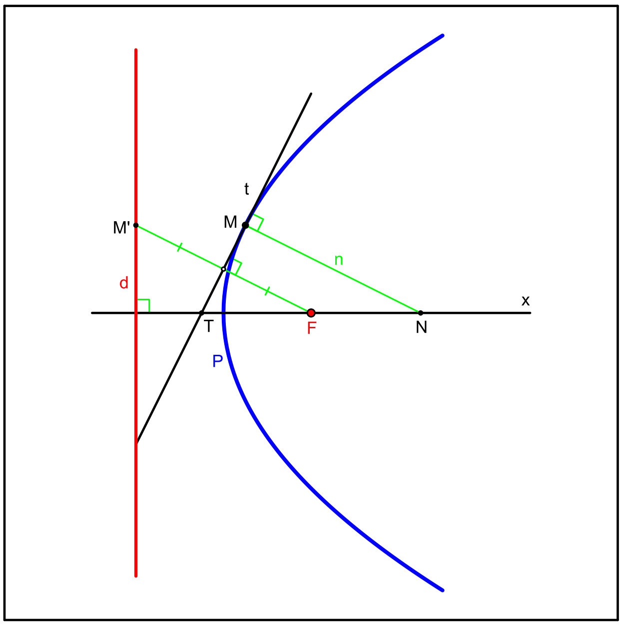
Exercício P.10: Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dados o eixo x, a

tangente t e o ponto de tangência M.

Solução: (i) Trace a perpendicular n à tangente dada t por M, determinando o ponto N sobre o eixo x; (ii) Marque o foco desejado F como ponto médio do segmento TN, onde T é a interseção da tangente dada t com o eixo x, fazendo com que a diretriz d possa ser determinada como no Exercício P.4.



Solução do Exercício P.9



Solução do Exercício P.10

Exercício P.11: Determine o foco F e a diretriz d da parábola, dados o vértice V, a tangente t e o ponto de tangência M.

Solução: (i) Trace o círculo $C_1 \equiv (O, \frac{MV}{2})$, onde O é o ponto médio de MV; (ii) Determine a reta simétrica t' da tangente t em relação ao vértice V, determinando sobre C_1 a projeção I_1 de M sobre o eixo da parábola (há na verdade duas interseções I_1 e I_2 de t' com C_1, relativas a duas parábola-solução, sendo que apenas uma é mostrada para melhor visualização); (iii) Trace o eixo x_1 da parábola definido pela reta suporte do segmento VI_1, determinando o ponto T_1 sobre t; (iv) Trace a normal n à tangente t por M, determinando o ponto N_1 sobre o eixo x_1; (v) Marque o foco desejado F_1 como o ponto médio de T_1N_1, fazendo com que a diretriz d_1 da parábola P_1 possa ser determinada como no Exercício P.4.

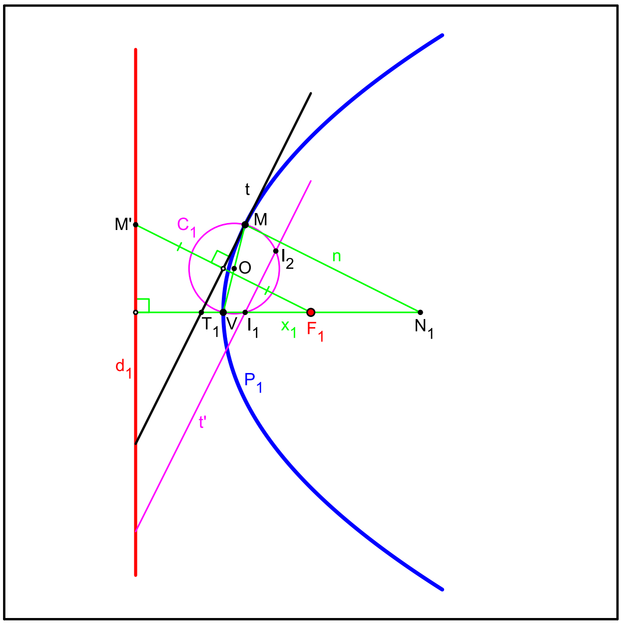
Justificativa: A projeção I do ponto M sobre o eixo x (ainda desconhecido) é tal que $\widehat{MIV} = 90^o$ e $VT = VI$. Logo, I deve pertencer a C_1 e t' determinados como acima. O ponto I permite a determinação do eixo da parábola, permitindo a solução completa do problema.

Exercício P.12: Determine o foco F da parábola, dados a diretriz d, a tangente t e o ponto M da curva.

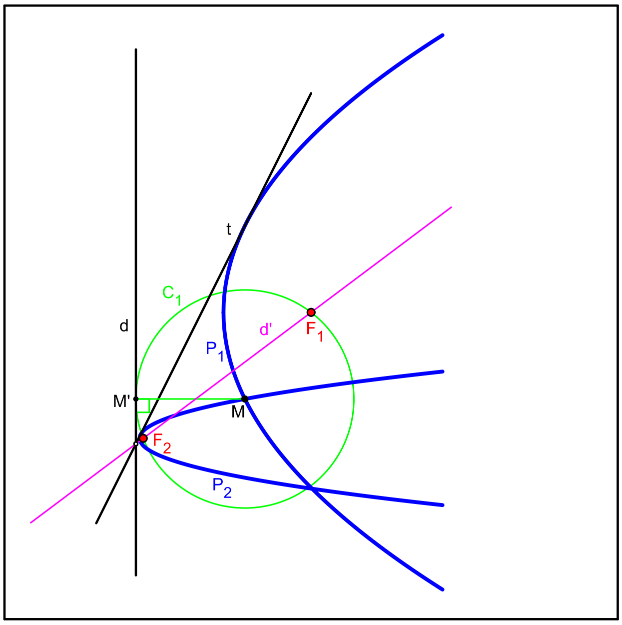
Solução: (i) Determine a projeção M' do ponto M sobre a diretriz d e trace o círculo $C_1 \equiv (M, MM')$; (ii) Trace a reta simétrica d' da diretriz d em relação à tangente dada t, determinando sobre C_1 os focos F_1 e F_2 de duas parábolas P_1 e P_2 que satisfazem as condições do problema.

Justificativa: O foco F da parábola é tal que $MF = MM'$ e seu simétrico em relação à tangente t pertence à diretriz d. Logo, F pertence a C_1 e d'.

Exercício P.13: Determine o foco F da parábola, dadas a diretriz d e as tangentes



Solução do Exercício P.11



Solução do Exercício P.12

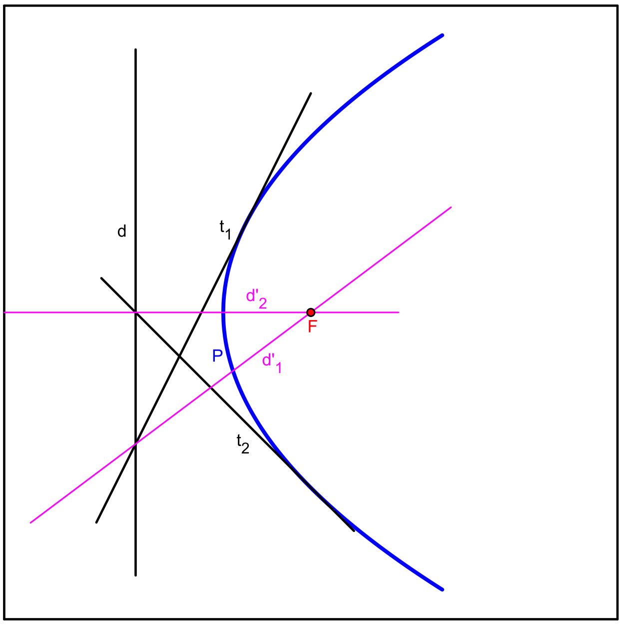
genéricas t_1 e t_2.

Solução: (i) Trace as retas simétricas d'_1 e d'_2 da diretriz d em relação às tangentes dadas t_1 e t_2, respectivamente, determinando o foco desejado F.

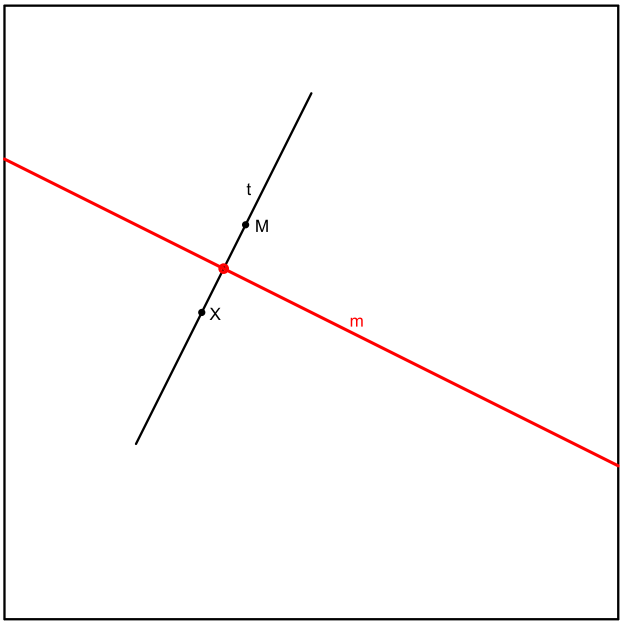
Exercício P.14: Determine o lugar geométrico dos focos das parábolas, dados a tangente t, o ponto de tangência M e o ponto X pertencente ao eixo x.

Solução: (i) Trace a mediatriz m de XM, determinando o lugar geométrico desejado.

Justificativa: O foco F é ponto médio de X (interseção da tangente t com o eixo x) é o pé da normal por M. Logo, F pertence à mediatriz de XM.



Solução do Exercício P.13



Solução do Exercício P.14

Exercício P.15: Determine a corda focal de comprimento ℓ de uma parábola, dados a diretriz d e o foco F.

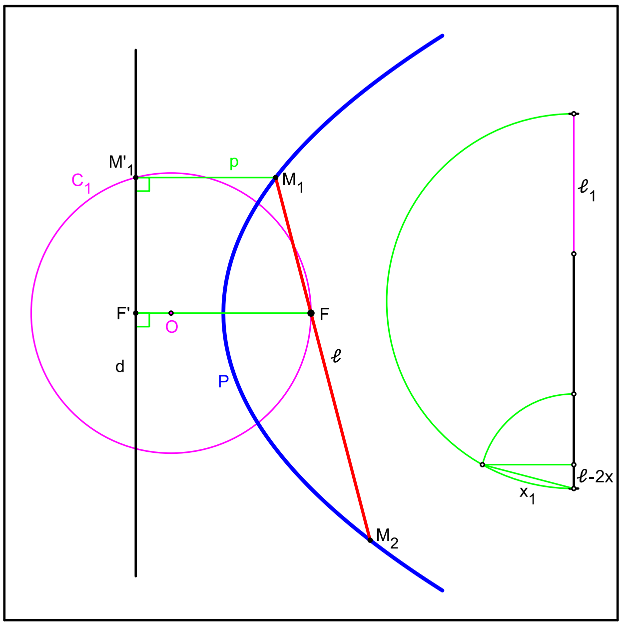
Solução (geométrica): (i) Determine o comprimento auxiliar $\ell_1 = \frac{\ell - \sqrt{\ell^2 - 2\ell x}}{2}$, com $x = FF'$ onde F' é a projeção do foco F sobre a diretriz (ou seja, x é o parâmetro da parábola); (ii) Marque sobre FF' o ponto O tal que $FO = \ell_1$ e trace o círculo $C_1 \equiv (O, \ell_1)$, determinando o ponto M_1' sobre a diretriz; (iii) Trace uma perpendicular p à diretriz d por M_1' e marque sobre p o ponto M_1 tal que $M_1'M_1 = \ell_1$; (iv) Trace a reta suporte de M_1F e marque o ponto M_2 tal que $M_1M_2 = \ell$ sobre esta reta, determinando a corda focal desejada.

Justificativa:

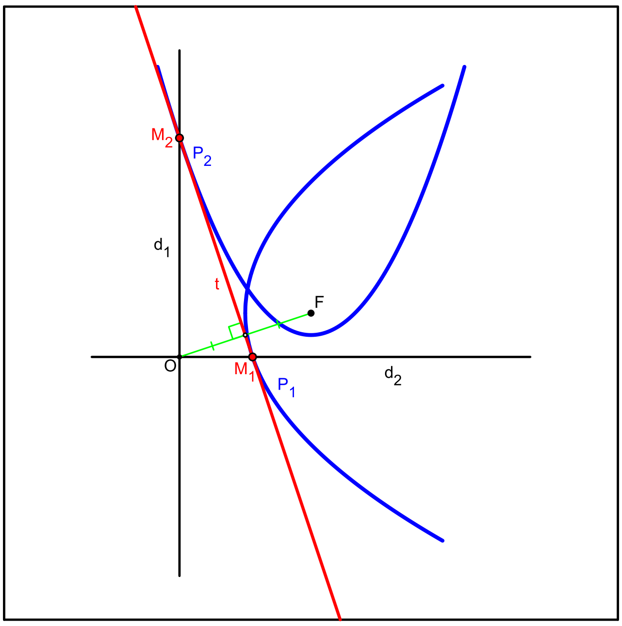
Exercício P.16: Determine a tangente comum t e os pontos de tangência M_1 e M_2 a duas parábolas de mesmo foco F, dadas as respectivas diretrizes d_1 e d_2.

Solução: (i) Trace a mediatriz t de FO, onde O é a interseção das duas diretrizes d_1 e d_2 dadas, determinando a tangente comum desejada. (ii) Trace perpendiculares às diretrizes d_1 e d_2 por O, determinando sobre a tangente t os respectivos pontos de tangência M_1 e M_2 desejados.

Justificativa: O simétrico do foco F em relação à tangente comum t deve pertencer simultaneamente a ambas as diretrizes d_1 e d_2. Logo, O é este simétrico e a tangente desejada deve ser a mediatriz de FO.



Solução do Exercício P.15



Solução do Exercício P.16