A Matemática no Vestibular do IME

Material Complementar 1: Soluções de Desenho Geométrico

sergioℓn@smt.ufrj.br

Esse material inclui as soluções de diversas questões de desenho geométrico que apareceram nas provas do vestibular do IME ao longo dos anos. Em particular, as questões aqui resolvidas são as:

- 1971/1972: Questões 6, 7, 8, 9 e 10.
- 1970/1971: Questão 1, Itens 1, 2 e 3.
- 1969/1970: Questão 1, Itens 1, 2 e 3.
- 1968/1969: Questão 1, Itens 1, 2, 3 e 4.
- 1967/1968: Questão 1, Itens 1, 2, 3, 4 e 5.
- 1966/1967: Questão 2.
- 1965/1966: Questão 1, Itens (a), (b), (c), (d), (e) e (f), e 2, Itens (a) e (b).
- 1964/1965: Questão 1, Itens 1 e 2.

IME 1971/1972 - Desenho

IME 1971/1972, Questão 6 [valor 1,0]:

Construção (item (a)): (i) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(P, 2\sqrt{3})$, onde P é a interseção do eixo radical e com a reta t suporte dos centros dos círculos de F;

Justificativa (item (a)): Os centros dos círculos do feixe F estão todos sobre a reta t passando pelo ponto O e ortogonal ao eixo radical e. Seja P a interseção do eixo radical e com esta reta t. O eixo radical é o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais aos círculos do feixe F.

Seja um círculo C_1, de raio r_1 e centro O_1 sobre e, ortogonal aos círculos do feixe F, inclusive ao círculo de centro O e raio de 2 cm. Assim,

$$\begin{cases} O_1O^2 = r_1^2 + 2^2 \\ O_1O^2 = O_1P^2 + OP^2 \end{cases} \Rightarrow r_1^2 = O_1P^2 + 4^2 - 2^2 = O_1P^2 + 12$$

Logo, o círculo C_1 de raio mínimo é tal que $O_1 \equiv P$ e $r_1 = 2\sqrt{3}$.

Construção (item (b)): (i) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(O_2, r_2)$, onde $r_2 = 6$ cm e O_2 pertence a t e é tal que $O_2P = 4\sqrt{3}$

Justificativa (item (b)): O círculo desejado deve ter raio $r_2 = 6$ cm e deve ser ortogonal ao círculo C_1 determinado no item anterior. Logo,

$$O_2P^2 = r_2^2 + r_1^2 = 48 \Rightarrow O_2P = 4\sqrt{3}$$

sln: O enunciado é dúbio, não deixando claro quem está a seis centímetros de O: a reta r ou o círculo desejado. Na solução, considerou-se que deve ser a reta r.

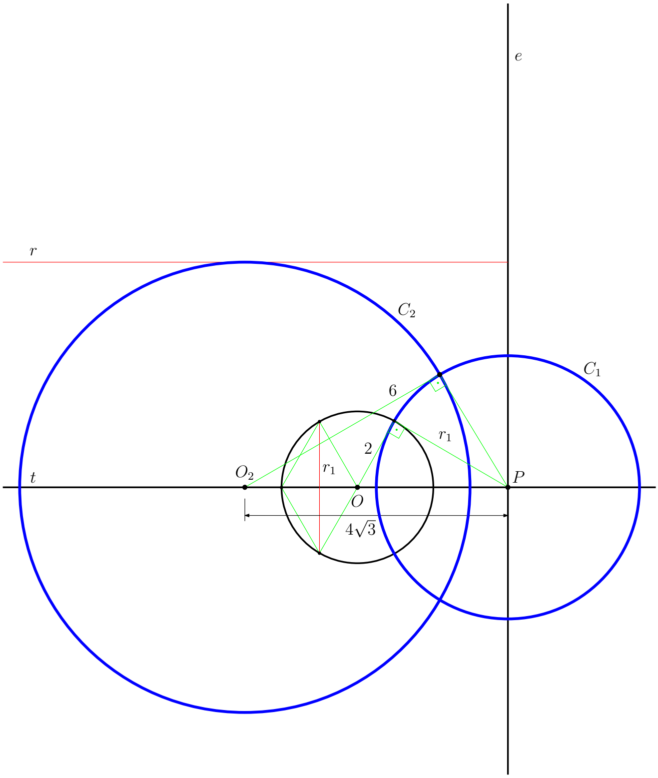
IME 1971/1972, Questão 7 [valor 1,0]:

Construção: (i) Trace o ângulo $\hat{B} = 120^{\circ}$ e marque $AB = 3$ cm e $BC = 5$ cm sobre seus lados; (ii) Determine o círculo C_1 circunscrito ao triângulo ΔABC ([1], Exercício 1.3); (iii) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(C, CB)$, cuja interseção com C_1 (distinta do vértice B) é o vértice D.

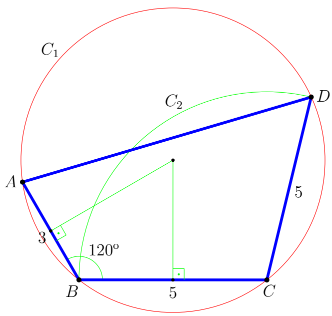
Justificativa: Da Lei dos Cossenos, a diagonal AC é tal que

$$\begin{cases} AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos\hat{B} \\ \qquad = 9 + 25 - 30\cos\hat{B} \\ AC^2 = DA^2 + CD^2 - 2DA.CD\cos(180^{\circ} - \hat{B}) \\ \qquad = 64 + 25 + 80\cos\hat{B} \end{cases}$$

Logo, $\cos\hat{B} = -\frac{1}{2}$ e então $\hat{B} = 120^{\circ}$.

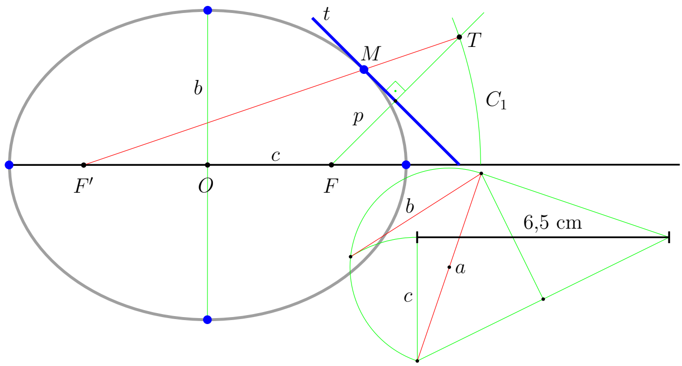


IME 1971/1972, Questão 6: Solução.



IME 1971/1972, Questão 7: Solução.

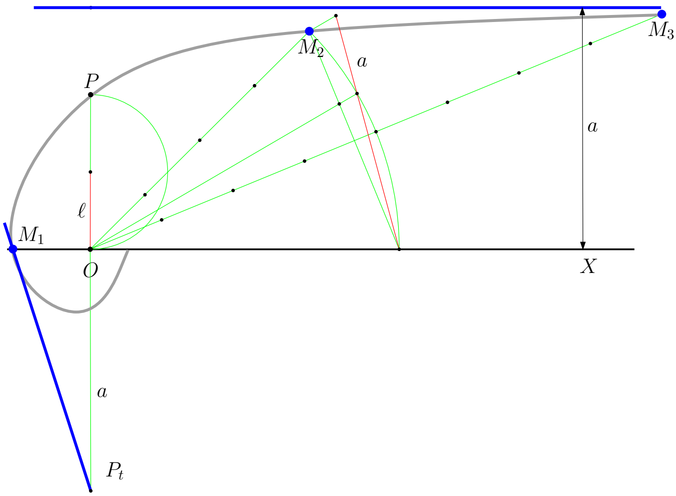
IME 1971/1972, Questão 8 [valor 1,0]:
Construção: (i) Marque F' tal que O seja médio de FF'; (ii) Determine $a = \sqrt{\frac{OF^2+OP^2}{2}}$ e $b = \sqrt{a^2 - OF^2}$ e marque os vértices da elipse $OA = OA' = a$, com A e A' sobre a reta suporte de FF', e $OB = OB' = b$, com B e B' sobre a perpendicular a FF' por O; (iii) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F', 2a)$; (iv) Trace por F uma perpendicular p à direção da tangente desejada t, cuja interseção com C_1 é o ponto T; (v) Trace a mediatriz de TF, determinando t, cuja interseção com $F'T$ é o ponto de tangência M.



IME 1971/1972, Questão 8: Solução.

Justificativa: A interseção de duas tangentes perpendiculares pertence ao círculo de Monge da elipse, cujo raio é $OP = \sqrt{a^2 + b^2}$. Assim, $a = \sqrt{\frac{c^2+OP^2}{2}}$ e, conseqüentemente, $b = \sqrt{a^2 - OF^2}$, determinando os vértices da elipse e o círculo diretor $C_1 \equiv (F', 2a)$. A tangente desejada t é mediatriz de FT, com T pertencendo a C_1. Logo, FT é perpendicular a t, o que permite determinar T.

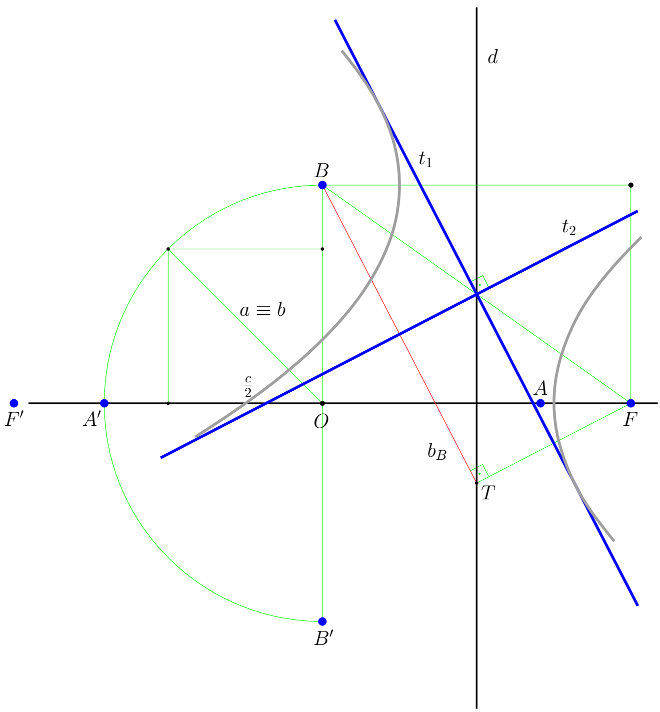
IME 1971/1972, Questão 9 [valor 1,0]:
Construção: (i) Determine $\ell = \frac{OP}{2} = 2\ \mathrm{cm}$ e marque as distâncias ℓ, 4ℓ e 8ℓ em ângulos π, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{8}$, respectivamente, em relação a OX, determinando os pontos M_1, M_2 e M_3; (ii) Retifique o arco do círculo (O, OM_3), entre OX e OM_3, determinando a distância a entre OX e a assíntota; (iii) Determine o ponto P_t, sobre a perpendicular a OM_1 por O, tal que $OP_t = a$, e trace a tangente desejada P_tM_1.



IME 1971/1972, Questão 9: Solução.

Justificativa: Na espiral hiperbólica, o raio vetor é inversamente proporcional ao ângulo deste com o eixo polar OX. Com isto, a medida a do arco associada ao raio vetor é constante e a assíntota é a paralela a uma distância a do eixo. Além disto, a sub-tangente por um ponto da espiral é constante e igual a a também (ver [2], pp. 263–265).

IME 1971/1972, Questão 10 [valor 1,0]:
Construção: (i) Marque sobre o eixo transverso os focos F e F', tais que $F'O = OF = c = 8$ cm, e os vértices A e A', tais que $A'O = OA = a = 4\sqrt{2}$ cm, e sobre o eixo não transverso os vértices B e B', tais que $BO = OB' = b = 4\sqrt{2}$ cm; (ii) Trace a bissetriz b_B de $O\hat{B}F$, direção da tangente comum; (iii) Trace uma perpendicular a b_B por F, cuja interseção com d é o ponto T; (iv) Trace a mediatriz de FT, determinando a tangente comum t_1; (v) Trace a perpendicular a t_1 pelo ponto médio de BF, determinando a outra tangente comum t_2.



IME 1971/1972, Questão 10: Solução.

Justificativa: (a) Dos dados do problema, têm-se

$$\begin{cases} \frac{a^2}{c} = 4 \text{ cm} \\ c = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow c = 8 \text{ cm} \;\text{ e }\; a = b = 4\sqrt{2} \text{ cm},$$

o que permite determinar os focos e os vértices de H.
(b) (Justificativa geométrica): Como t_1 é mediatriz de TF, pelo conceito de base média no triângulo ΔBTF, a interseção de t_1 com BF é o ponto M médio deste segmento. Pela simetria de B e F, o ponto M pertence a d. Logo, $BM = MF$ e $MT = MF$, de forma que $BM = MT$, indicando que o triângulo ΔBMT é isósceles com base BT. Uma análise angular simples indica que $O\hat{B}T = O\hat{F}T = B\hat{T}M = M\hat{B}T$, de forma que BT é a bissetriz de $O\hat{B}F$.
(b) (Justificativa algébrica): Considerando eixos coordenados com origem em O, com o eixo das abscissas ao longo de OF, as parábolas são descritas por

$$\begin{cases} P1 : cx + (y-b)^2 = \frac{c^2}{4} \\ P2 : cx - y^2 = \frac{3c^2}{4} \end{cases},$$

onde $P1$ e $P2$ têm focos B e F, respectivamente, e diretriz d. Assim, as tangentes genéricas de cada parábola pelos respectivos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são descritas por

$$\begin{cases} T1 : 2(y_1 - b)y = -cx + +(y_1^2 - b^2 + \frac{c^2}{4}) \\ T2 : 2y_2 y = cx + (y_2^2 - \frac{3c^2}{4}) \end{cases}.$$

Igualando estas equações, tem-se

$$\begin{cases} y_2 = b - y_1 \\ y_1^2 - b^2 + \frac{c^2}{4} = -y_2^2 + \frac{3c^2}{4} \end{cases} \Rightarrow y_1^2 - by_1 - \frac{c^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + c^2}}{2}.$$

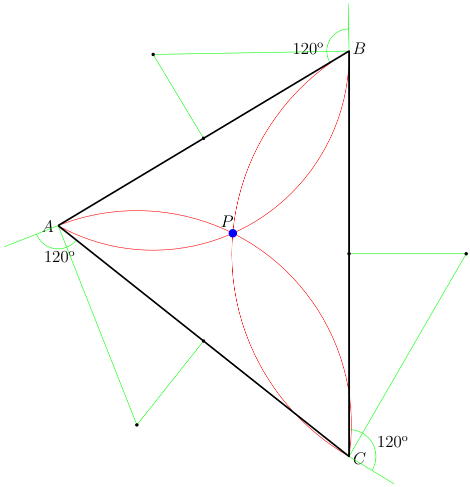
Substituindo as soluções para y_1 na equação de $T1$ e considerando $c = b\sqrt{2}$, tem-se a equação geral das tangentes comuns:

$$T : y = -(1 \pm \sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2}x + (2 \pm \sqrt{3})\frac{b}{2}.$$

Multiplicando os coeficientes angulares das duas tangentes, obtém-se o produto -1, indicando que as duas tangentes são perpendiculares. Além disto, usando $x = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$, tem-se $y = \frac{b}{2}$ para as duas tangentes, indicando que ambas passam pelo ponto médio de BF.

IME 1970/1971 - Desenho

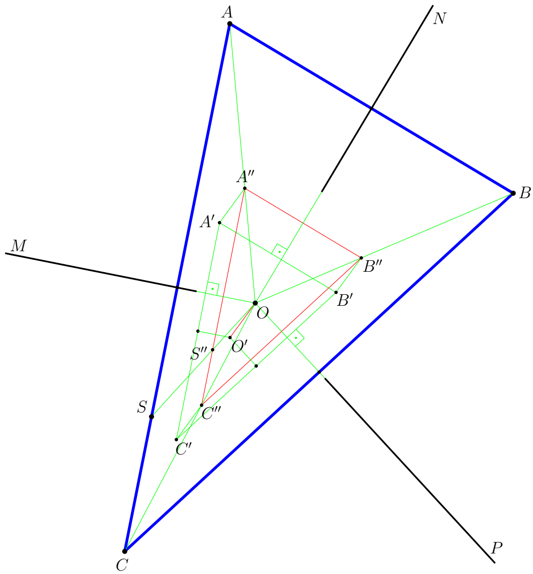
IME 1970/1971, Questão 1, Item 1 [valor 0,5]:
Construção: (i) Trace os arcos-capazes do ângulo de 120^{o} relativos a cada lado do triângulo dado, cuja interseção é o ponto P desejado.



IME 1970/1971, Questão 1, Item 1: Solução.

Justificativa: Ver [3], pp. 430–434.
sln: Este ponto é chamado de *ponto de Fermat*, que foi quem primeiro teria proposto tal problema. Em [3], porém, este problema é atribuído a Steiner.

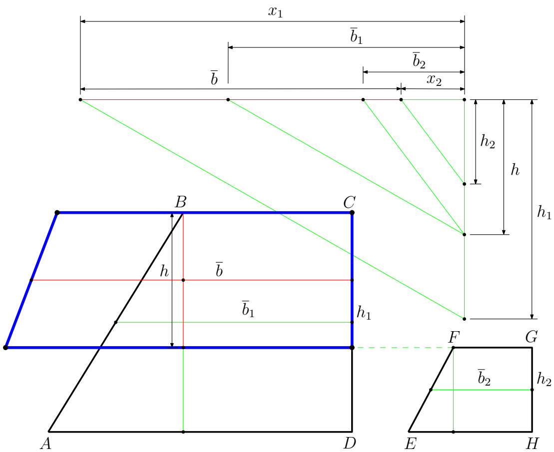
IME 1970/1971, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]:
Construção: (i) Prolongue as mediatrizes M, N e P, cuja interseção é o circuncentro O do triângulo desejado; (ii) Trace uma reta perpendicular qualquer para cada mediatriz dada, cujas interseções duas-a-duas determinam o triângulo auxiliar $\Delta A'B'C'$; (iii) Determine o circuncentro O' do triângulo $\Delta A'B'C'$, ponto de encontro de suas mediatrizes ([1], Exercício 1.3); (iv) Aplique uma translação $O'O$ no triângulo $\Delta A'B'C'$, determinando o triângulo $\Delta A''B''C''$, cujo circuncentro é O; (v) Trace o segmento OS, cuja interseção com o triângulo $\Delta A''B''C''$ é o ponto S''; (vi) Aplique uma homotetia, de centro O e razão $\frac{OS}{OS''}$, no triângulo $\Delta A''B''C''$, determinando o triângulo desejado ΔABC.



IME 1970/1971, Questão 1, Item 2: Solução.

Justificativa: Os lados dos triângulos $\Delta A'B'C'$ e ΔABC são ortogonais às respectivas mediatrizes M, N e P dadas. Assim, os triângulos $\Delta A''B''C''$ (obtido pela translação $O'O$ do triângulo $\Delta A'B'C'$) e ΔABC possuem os mesmos ângulos internos, os respectivos lados paralelos e o mesmo circuncentro O. Logo, o triângulo ΔABC pode ser obtido por uma transformação de homotetia, de centro O, do triângulo $\Delta A''B''C''$. A razão de homotetia é determinada para que o ponto S pertença ao triângulo ΔABC desejado.

IME 1970/1971, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]:
Construção: (i) Determine a quarta proporcional $h : \overline{b}_1 = h_1 : x_1$; (ii) Determine a quarta proporcional $h : \overline{b}_2 = h_2 : x_2$; (iii) Trace um trapézio de altura $h = (h_1 - h_2)$ e base média $\overline{b} = (x_1 - x_2)$.



IME 1970/1971, Questão 1, Item 3: Solução.

Justificativa: Pela relação das áreas, tem-se

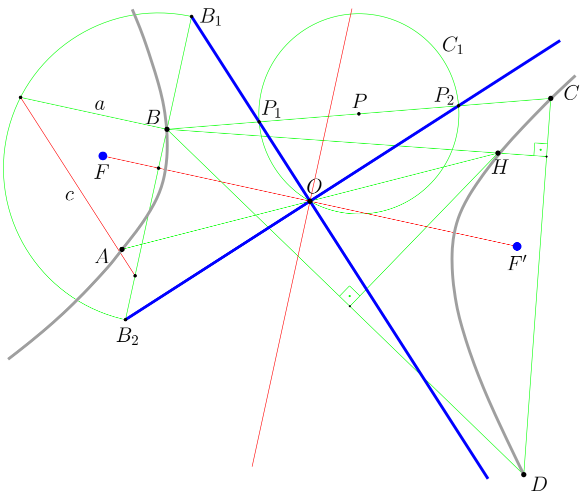
$$\frac{h\overline{b}}{2} = \frac{h_1\overline{b}_1}{2} - \frac{h_2\overline{b}_2}{2} \Rightarrow \overline{b} = \frac{h_1\overline{b}_1 - h_2\overline{b}_2}{h_1 - h_2}$$

sln: Existem infinitas soluções que satisfazem as condições do problema.

IME 1969/1970 - Desenho

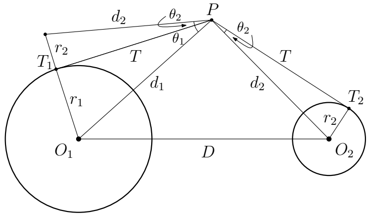
IME 1969/1970, Questão 1, Item 1 [valor 1,5]:

Construção (fornecida por Nikolaos e Bernard Gilbert, via Luís Lopes): (i) Determine o ortocentro H do triângulo ΔBCD; (ii) Determine o ponto médio O de HA, centro da hipérbole desejada; (iii) Sendo P o ponto médio de BC, trace $C_1 \equiv (P, PO)$, cujas interseções com BC são os pontos P_1 e P_2 tais que OP_1 e OP_2 são as assíntotas, cujas bissetrizes são os eixos da hipérbole; (iv) Trace uma perpendicular ao eixo transverso por B, determinando B_1 e B_2 sobre as assíntotas, de modo que $c = a\sqrt{2} = \sqrt{2(BB_1 \times BB_2)} = OF = OF'$, o que permite determinar os focos F e F'.



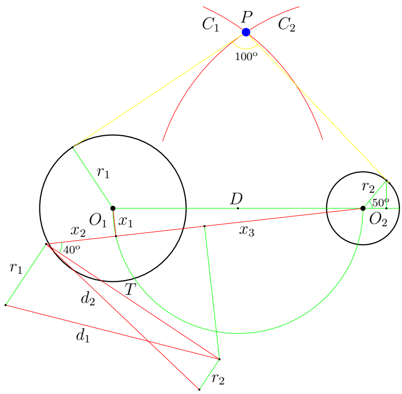
IME 1969/1970, Questão 1, Item 1.

IME 1969/1970, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]:



IME 1969/1970, Questão 1, Item 2: Análise algébrica.

Construção (Algébrica): (i) Determine $x_1 = (r_1 - r_2)\text{sen}50^{\text{o}} = r_2\text{sen}50^{\text{o}}$ e $x_2 = (r_1 + r_2)\cos 50^{\text{o}} = 3r_2 \cos 50^{\text{o}}$; (ii) Construa o triângulo retângulo de hipotenusa D e cateto x_1, determinando o outro cateto x_3; (iii) Construa o triângulo retângulo de cateto $\frac{x_2+x_3}{2}$ e ângulo adjacente 40^{o}, determinando a hipotenusa T; (iv) Construa o triângulo retângulo de catetos T e r_1, determinando a hipotenusa d_1; (v) Construa o triângulo retângulo de catetos T e r_2, determinando a hipotenusa d_2; (vi) Trace os círculos $C_1 \equiv (O_1, d_1)$ e $C_2 \equiv (O_2, d_2)$, cuja interseção é o ponto P desejado.



IME 1969/1970, Questão 1, Item 2.

Justificativa (Algébrica): Sejam P a solução do problema, T_1 e T_2 os pontos de tangência por P aos círculos de centros O_1 e O_2, respectivamente. Sejam as distâncias $D = O_1O_2$, $T = PT_1 = PT_2$, $d_1 = PO_1$ e $d_2 = PO_2$. Justapondo os triângulos ΔPO_1T_1 e ΔPO_2T_2, têm-se, pela lei dos cossenos, que

$$\begin{cases} (r_1+r_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ D^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos(100^{\rm o} - (\theta_1+\theta_2)) \end{cases}$$

Da primeira equação,

$$r_1^2+2r_1r_2+r_2^2 = (T^2+r_1^2)+(T^2+r_2^2)-2d_1d_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$

de modo que

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \frac{T^2-r_1r_2}{d_1d_2} \Rightarrow \text{sen}(\theta_1+\theta_2) = \frac{T(r_1+r_2)}{d_1d_2}$$

Com isto, da segunda equação do sistema, tem-se

$$\begin{aligned} D^2 &= d_1^2+d_2^2-2d_1d_2[\cos(\theta_1+\theta_2)\cos 100^{\rm o}+\text{sen}(\theta_1+\theta_2)\,\text{sen}100^{\rm o}] \\ &= d_1^2+d_2^2-2\left[(T^2-r_1r_2)\cos 100^{\rm o}+T(r_1+r_2)\,\text{sen}100^{\rm o}\right] \end{aligned}$$

de modo que o comprimento T das tangentes por P é solução de

$$\begin{aligned} &2T^2(1-\cos 100^{\rm o})-2T(r_1+r_2)\,\text{sen}100^{\rm o} \\ &+\ (r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos 100^{\rm o})-D^2 = 0 \end{aligned}$$

Assim,

$$T = \frac{2(r_1+r_2)\text{sen}100^{\rm o}\pm\sqrt{\Delta}}{4(1-\cos 100^{\rm o})} = \frac{4(r_1+r_2)\text{sen}50^{\rm o}\cos 50^{\rm o}\pm\sqrt{\Delta}}{8\text{sen}^2 50^{\rm o}}$$

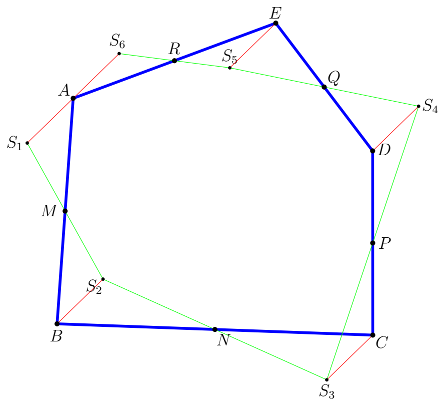
pois $\text{sen}100^{\rm o} = 2\text{sen}50^{\rm o}\cos 50^{\rm o}$ e $(1-\cos 100^{\rm o}) = 2\text{sen}^2 50^{\rm o}$, com

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(r_1+r_2)^2\text{sen}^2 100^{\rm o} \\ &-\ 8(1-\cos 100^{\rm o})(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos 100^{\rm o}-D^2) \\ &= 4(r_1+r_2)^2 - 4(r_1+r_2)^2\cos^2 100^{\rm o} - 8(r_1^2+r_2^2) \\ &-\ 16r_1r_2\cos 100^{\rm o} + 8(r_1^2+r_2^2)\cos 100^{\rm o} \\ &+\ 16r_1r_2\cos^2 100^{\rm o} + 8D^2(1-\cos 100^{\rm o}) \\ &= -4(r_1-r_2)^2+8(r_1-r_2)^2\cos 100^{\rm o} \\ &-\ 4(r_1-r_2)^2\cos^2 100^{\rm o}+8D^2(1-\cos 100^{\rm o}) \\ &= -4(r_1-r_2)^2(1-\cos 100^{\rm o})^2 + 8D^2(1-\cos 100^{\rm o}) \\ &= 16\text{sen}^2 50^{\rm o}[-(r_1-r_2)^2\text{sen}^2 50^{\rm o} + D^2] \end{aligned}$$

Logo,

$$T = \frac{(r_1+r_2)\cos 50^{\rm o}\pm\sqrt{-(r_1-r_2)^2\text{sen}^2 50^{\rm o}+D^2}}{2\text{sen}50^{\rm o}}$$

IME 1969/1970, Questão 1, Item 3 [valor 0,5]:
Construção: (i) Reflita um ponto S_1 qualquer pelos pontos M, N, P, Q e R dados, gerando os pontos S_2, S_3, S_4, S_5 e S_6, em seqüência; (ii) Determine o vértice A, ponto médio de S_1S_6; (iii) Reflita o ponto A pelos pontos M, N, P, Q e R dados, gerando os demais vértices B, C, D e E do pentágono desejado.

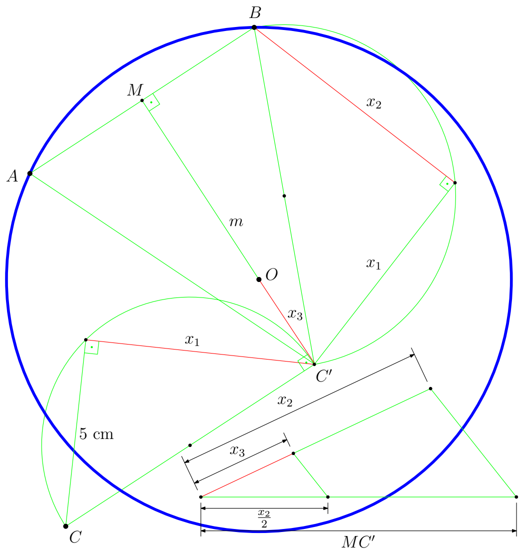


IME 1969/1970, Questão 1, Item 3: Solução II [4].

Justificativa [4]: Os pontos S_2 e B são simétricos de S_1 e A, respectivamente, em relação ao ponto M. Logo, o segmento S_2B é paralelo e de mesmo tamanho que o segmento S_1A. Estendendo o raciocínio, o mesmo pode ser concluído para todos os segmentos S_1A, S_2B, S_3C, S_4D, S_5E e S_6A, de modo que o vértice A é ponto médio de S_1S_6.

IME 1968/1969 - Desenho

IME 1968/1969, Questão 1, Item 1 [valor 1,0]:
Construção: (i) Determine a projeção C' de C sobre a mediatriz m de AB; (ii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa CC' e cateto de 5 cm, determinando o outro cateto x_1; (iii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa BC' e cateto x_1, determinando o outro cateto x_2; (iv) Determine a quarta proporcional $MC' : x_2 = \frac{x_2}{2} : x_3$, onde M é o ponto médio de AB; (v) Trace a circunferência desejada $C_1 \equiv \mathcal{C}(O, OA)$, com O entre M e C' é tal que $OC' = x_3$.



IME 1968/1969, Questão 1, Item 1: Solução.

Justificativa: Como a tangente por C mede 5 cm, tem-se

$$5^2 + R^2 = OC^2 = OC'^2 + CC'^2$$
$$\Rightarrow \; R^2 = OC'^2 + (CC'^2 - 5^2) = OC'^2 + x_1^2$$

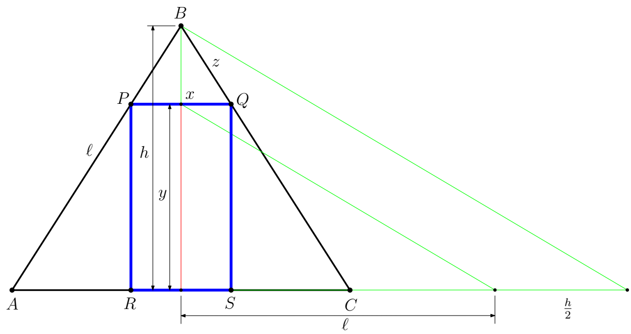
Além disto, do triângulo retângulo ΔOMB, tem-se

$$OM^2 + MB^2 = (MC' - OC')^2 + MB^2 = R^2$$

de modo que

$$OC' = \frac{(MC'^2 + MB^2) - x_1^2}{2MC'} = \frac{BC'^2 - x_1^2}{2MC'} = \frac{x_2^2}{2MC'}$$

IME 1968/1969, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]:
Construção: (i) Determine a quarta proporcional $\frac{h+2\ell}{2} : h = \ell : y$, onde ℓ e h são o lado e a altura do triângulo isósceles, respectivamente; (ii) Trace uma paralela à base do triângulo a uma distância y da mesma, cujas interseções com o triângulo determinam os vértices P e Q; (iii) Trace por A e B perpendiculares à base do triângulo, cujas interseções com a mesma determinam os outros dois vértices R e S do retângulo desejado.

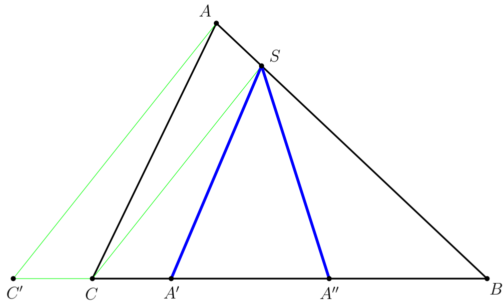


IME 1968/1969, Questão 1, Item 2: Solução.

Justificativa: Sejam x e y a base e a altura do retângulo desejado, respectivamente. Seja z o lado do triângulo isósceles, de perímetro $(2p)_T$, acima do retângulo desejado, de perímetro $(2p)_R$. Por semelhança de triângulos e para que $(2p)_R = 2(2p)_T$, têm-se

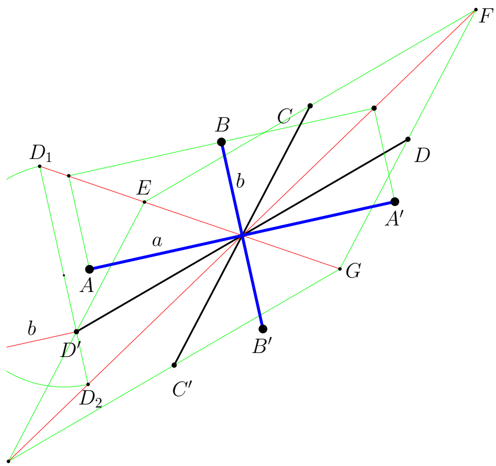
$$\begin{cases} \frac{\ell}{h} = \frac{z}{h-y} \\ 2x + 2y = 2(2z + x) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2\ell h}{h + 2\ell}$$

IME 1968/1969, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]:
Construção: (i) Trace por A uma paralela a SC, determinando o ponto C' sobre o prolongamento de BC; (ii) Divida BC' em três partes iguais, determinando os pontos A' e A'', que devem ser unidos a S.
Justificativa: Como $AC' \parallel SC$, as alturas de A e C' em relação a SC são iguais. Assim, as áreas dos triângulos ΔACS e $\Delta C'CS$, que possuem a mesma base CS, são iguais, fazendo com que as áreas dos triângulos ΔACB e $\Delta SC'B$ sejam iguais. Dividindo a base $C'B$ em três partes iguais, dividimos o triângulo $\Delta SC'B$, e conseqüentemente o triângulo ΔACB, em três partes iguais.



IME 1968/1969, Questão 1, Item 3: Solução.

IME 1968/1969, Questão 1, Item 4 [valor 0,5]:
Construção: (i) Trace por C e C' paralelas a DD' e por D e D' paralelas a CC', determinando o paralelogramo $EFGH$, cujas diagonais EG e FH são as assíntotas da hipérbole; (ii) Trace as bissetrizes dos ângulos formados por EG e FH, determinando as direções dos eixos da hipérbole; (iii) Trace por D' uma paralela ao eixo não transverso, cujas interseções com as assíntotas D_1 e D_2 permitem determinar o comprimento deste semi-eixo $\frac{BB'}{2} = b = \sqrt{DD_1 \times DD_2}$; (iv) Trace por B uma paralela ao eixo transverso, cujas interseções com as assíntotas, quando projetadas no eixo transverso, são os extremos deste eixo.

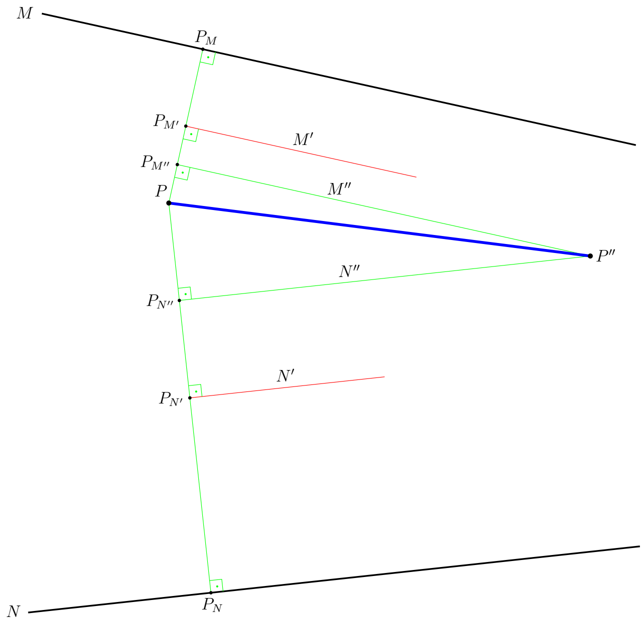


IME 1968/1969, Questão 1, Item 4.

Justificativa: Ver [5], Hipérbole, Problema 13.
sln: Considerou-se o diâmetro transverso DD', de modo que D e D' pertencem à hipérbole.

IME 1967/1968 - Desenho

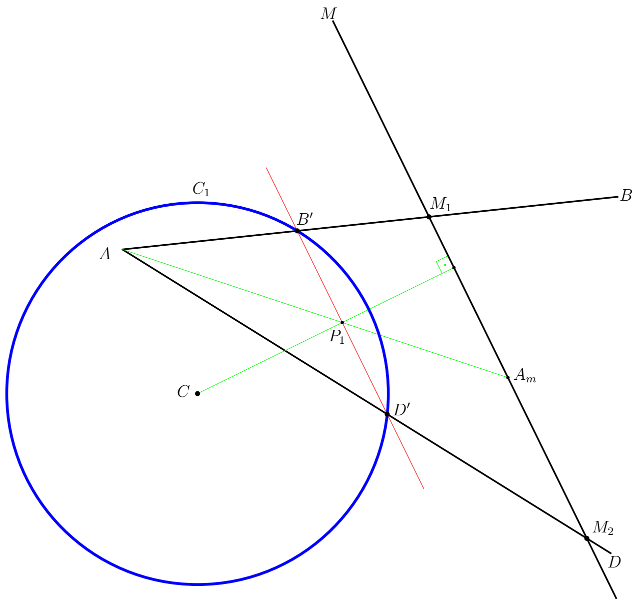
IME 1967/1968, Questão 1, Item 1 [valor 0,5]:
Construção: (i) Trace por P as perpendicular às retas M e N, cujas interseções com estas mesmas retas determinam, respectivamente, os pontos P_M e P_N; (ii) Trace as mediatrizes M' de PP_M e N' de PP_N, cuja interseção é o ponto P' (que não cabe na folha de resposta); (iii) Sejam $P_{M'}$ e $P_{N'}$ as projeções de P em M' e N', respectivamente. Trace as mediatrizes M'' de $PP_{M'}$ e N'' de $PP_{N'}$, cuja interseção é o ponto P''; (iv) Trace a reta PP'' desejada.



IME 1967/1968, Questão 1, Item 1: Solução.

Justificativa: Seja Q o ponto de interseção das retas M e N. Como $P\hat{P_M}Q = P\hat{P_N}Q = 90^{\circ}$, então o quadrilátero PP_MP_NQ é inscritível num círculo, de diâmetro PQ, que é também o círculo circunscrito ao triângulo ΔPP_MP_N, cujo centro é determinado pela interseção das mediatrizes M' de PP_M e N' de PP_N. No caso, esta interseção é indeterminada. Assim, devemos repetir o procedimento usando as retas M' e N' em substituição às retas M e N, respectivamente.

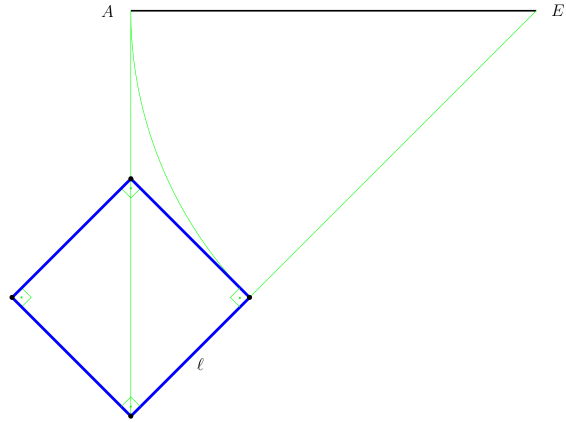
IME 1967/1968, Questão 1, Item 2 [valor 0,5]:
Construção: (i) Trace a mediana AA_m, onde A_m é o ponto médio de M_1M_2, que são as interseção da reta M com os lados AB e AD, respectivamente; (ii) Trace pelo ponto C uma perpendicular à reta M, cuja interseção com a mediana AA_m é o ponto P_1; (iii) Trace por P_1 uma paralela à reta M, cujas interseções com os lados AB e AD são os pontos B' e D', respectivamente; (iv) Trace a circunferência desejada $C_1 \equiv \mathcal{C}(C, CB')$.



IME 1967/1968, Questão 1, Item 2: Solução.

Justificativa: Da construção acima, tem-se $B'D' \parallel M_1M_2$. Assim, pela semelhança dos triângulos $\Delta AB'D'$ e ΔAM_1M_2, como A_m é médio de M_1M_2, então P_1 é médio de $B'D'$. Além disto, como $CP_1 \perp M$, então $CP_1 \perp B'D'$, de forma que CP_1 é mediatriz de $B'D'$. Logo, B' e D' pertencem a uma mesma circunferência de centro C.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]:
Construção: (i) Determine $\ell = (AE\sqrt{2} - AE)$; (ii) Trace o quadrado de lado ℓ.

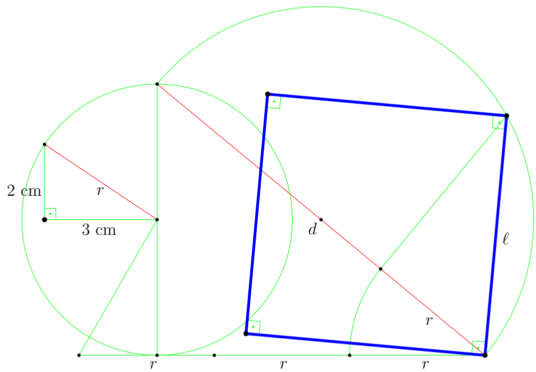


IME 1967/1968, Questão 1, Item 3: Solução.

Justificativa: Do enunciado,

$$AE = \ell\sqrt{2} + \ell \Rightarrow \ell = AE(\sqrt{2} - 1)$$

IME 1967/1968, Questão 1, Item 4 [valor 1,0]:
Construção: (i) Trace um triângulo retângulo de catetos 3 e 2 cm, determinando a hipotenusa $r = \sqrt{3^2 + 2^2}$ cm; (ii) Retifique o semi-círculo de raio r, determinando a distância $d \approx \pi r$ cm; (iii) Determine a média geométrica $\ell = \sqrt{dr} \approx \sqrt{\pi r^2}$ cm^2; (iv) Trace o quadrado de lado ℓ.

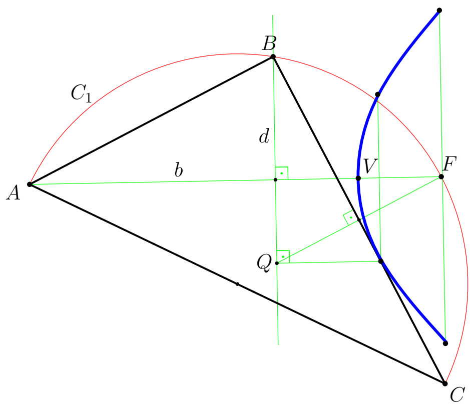


IME 1967/1968, Questão 1, Item 4: Solução.

Justificativa: Sendo $r = \sqrt{3^2 + 2^2}$ cm, tem-se

$$\ell^2 = \pi r^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{\pi r r}$$

IME 1967/1968, Questão 1, Item 5 [valor 1,0]:
Construção: (i) Trace o círculo C_1 circunscrito ao triângulo ΔABC; (ii) Trace a bissetriz b de $B\hat{A}C$, cuja interseção com C_1 é o foco F da parábola; (iii) Trace pelo vértice B uma perpendicular a b, determinando a diretriz d da parábola; (iv) Trace perpendiculares à diretriz por pontos Q quaisquer de d e determine as interseções destas perpendiculares com as respectivas mediatrizes de QF, obtendo os pontos desejados da parábola.



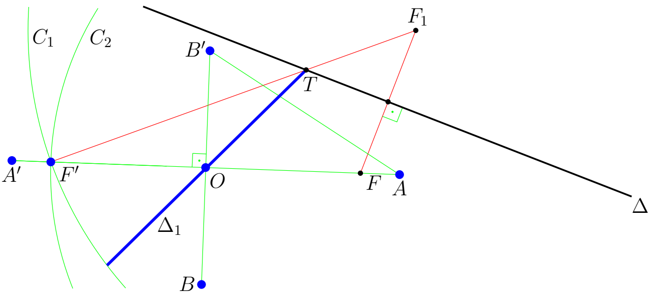
IME 1967/1968, Questão 1, Item 5: Solução.

Justificativa: O foco F pertence ao círculo circunscrito ao triângulo formado pelas interseções das tangentes duas a duas ([6], Teorema 9, Parábola). Como F pertence à bissetriz b de $B\hat{A}C$, lugar geométrico dos pontos equidistantes às retas suportes de AB e AC, tangentes à parábola, então b é o próprio eixo de simetria da parábola. A diretriz d é a perpendicular a b passando pelo vértice B, encontro de duas tangentes perpendiculares ([6], Teorema 7, Parábola). Conhecendo-se d e F, os pontos da parábola são facilmente determinados.

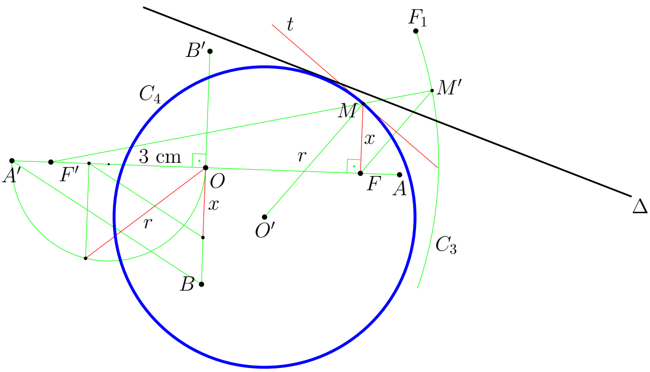
IME 1966/1967 - Desenho

IME 1966/1967, Questão 2 [valor 3,0]:

Construção: (a.i) Determine o ponto F_1, simétrico de F em relação à reta Δ; (a.ii) Trace $C_1 \equiv (F, 8\text{ cm})$ e $C_2 \equiv (F_1, 10\text{ cm})$, cuja interseção à esquerda de F é o outro foco F'; (a.iii) Determine o ponto O, médio de FF' e marque $OA = OA' = 5$ cm sobre o prolongamento de FF' e $OB = OB' = 3$ cm sobre a perpendicular por O a FF'. (b.i) Trace $F'F_1$, cuja interseção com a tangente Δ é o ponto de tangência T; (b.ii) A direção do diâmetro conjugado Δ_1 de Δ é determinada por TO. (c.i) Determine a quarta proporcional $a : b = b : x$ e marque $FM = x$, perpendicular a FF' por F; (c.ii) Trace $C_3 \equiv (F', 10\text{ cm})$, cuja interseção com o prolongamento de $F'M$ é o ponto M'; (c.iii) Trace a mediatriz t de $M'F$, determinando a tangente à elipse no ponto M; (c.iv) Trace a perpendicular à reta t por M, e marque a distância $MO' = r = \sqrt{ab}$; (c.v) Trace a circunferência desejada $C_4 \equiv (O', r)$.



IME 1966/1967, Questão 2, Itens (a) e (b): Solução.



IME 1966/1967, Questão 2, item (c): Solução.

Justificativa: (a) Pelos dados do problema, têm-se

$$\begin{cases} 2c = 8 \text{ cm} \\ \frac{c}{a} = 0{,}8 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \text{ cm} \\ b = 3 \text{ cm} \\ c = 4 \text{ cm} \end{cases}.$$

A tangente Δ é mediatriz de FF_1, onde F_1 pertence ao círculo diretor de centro F' e raio $2a = 10$ cm. Assim, F_1 é simétrico de F em relação à tangente Δ e F' pode ser determinado pelas relações

$$\begin{cases} FF' = 2c = 8 \text{ cm} \\ F_1F' = 2a = 10 \text{ cm} \end{cases}.$$

Os demais pontos podem ser determinados a partir do centro O da elipse, médio de FF', usando as medidas a e b determinadas acima.
(b) Como Δ é mediatriz de FF_1, tem-se que

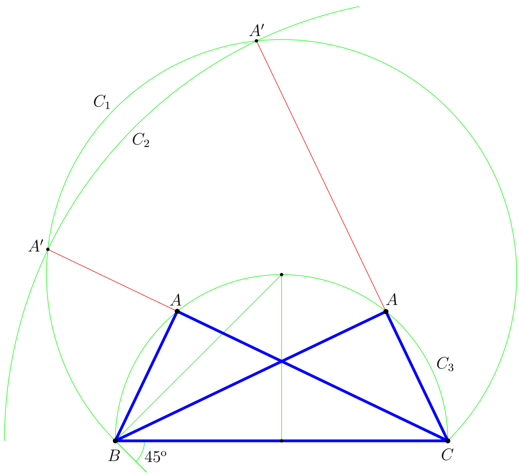
$$2a = F'F_1 = F'T + TF_1 = F'T + TF.$$

Assim, T pertence à elipse, sendo de fato o ponto de contato da tangente Δ, caso-limite das secantes de mesma direção. Neste limite, T pode ser visto como o *ponto médio* das interseções de Δ com a elipse. Traçando pelo centro O uma secante paralela à Δ, o ponto médio das interseções desta secante com a elipse, por simetria, é o próprio centro O. Assim, T e O determinam a direção dos diâmetros conjugados à direção Δ.
(c) A corda focal tem comprimento $FM = \frac{b^2}{a}$, sendo perpendicular a FF'. A tangente t em M é a mediatriz de $M'F$, onde M' é a interseção do prolongamento de $F'M$ com o círculo diretor $C_3 \equiv (F', 2a)$. Para que a cirunferência desejada seja tangente à elipse em M (extremo superior da corda focal), seu centro O' deve estar na perpendicular à tangente t. Igualando as áreas, tem-se que o raio da circunferência desejada é dado por $r = \sqrt{ab}$.

IME 1965/1966 - Desenho

IME 1965/1966, Questão 1, Item (a):

Construção: (i) Trace o arco-capaz C_1 do ângulo de 45^{o} relativo à hipotenusa $BC = 9$ cm; (ii) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(C, 12\text{ cm})$, cuja interseção com C_1 são os pontos A'; (iii) Trace o arco-capaz C_3 do ângulo de 90^{o} relativo à hipotenusa BC, cuja interseção com os segmentos CA' é o vértice A.



IME 1965/1966, Questão 1, Item (a): Solução.

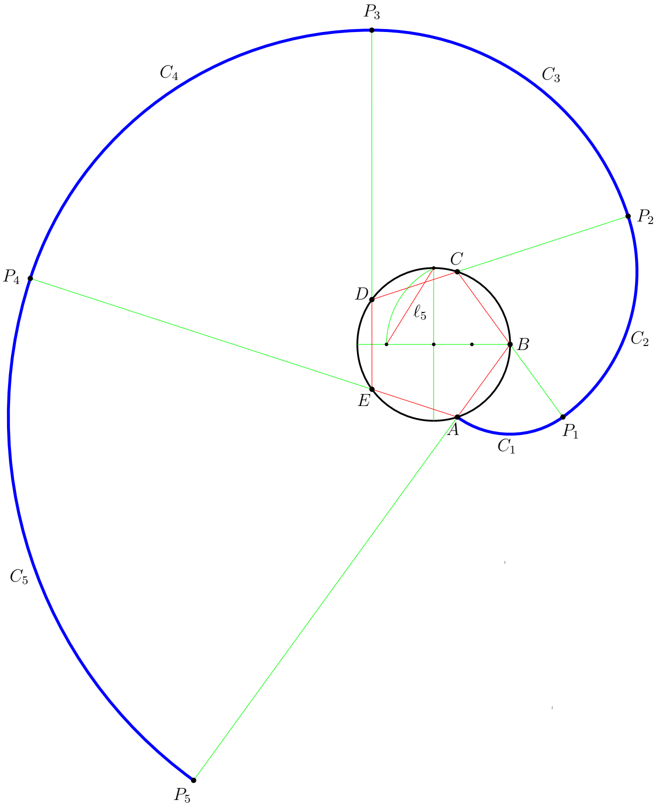
Justificativa: Da construção acima, $BA \perp A'C$ e $B\hat{A}'A = 45^{\text{o}}$. Logo, $A'\hat{B}A = 45^{\text{o}}$ e então $BA = AA'$, de forma que $(BA + AC) = (AA' + AC) = A'C = 12$ cm, como desejado.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (b):

Construção: (i) Inscreva o pentágono $ABCDE$ de lado

$$\ell_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R$$

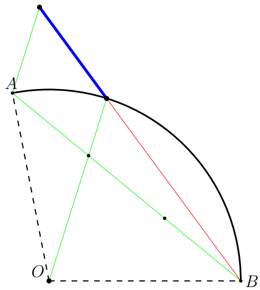
em uma circunferência de diâmetro $2R = 4$ cm (ver [1], Exercício 2.25) e prolongue os lados AB, BC, CD, DE e EA; (ii) Trace o arco $C_1 \equiv (B, BA) = \overset{\frown}{AP_1}$, com P_1 sobre o prolongamento de CB; (iii) Trace o arco $C_2 \equiv (C, CP_1) = \overset{\frown}{P_1P_2}$, com P_2 sobre o prolongamento de DC; (iv) Trace o arco $C_3 \equiv (D, DP_2) = \overset{\frown}{P_2P_3}$, com P_3 sobre o prolongamento de ED; (v) Trace o arco $C_4 \equiv (E, EP_3) = \overset{\frown}{P_3P_4}$, com P_4 sobre o prolongamento de AE; (vi) Trace o arco $C_5 \equiv (A, AP_4) = \overset{\frown}{P_4P_5}$, com P_5 sobre o prolongamento de BA.



IME 1965/1966, Questão 1, Item (b): Solução.

Justificativa: A falsa espiral de n centros é formada por uma seqüência de arcos de circunferências, com os centros destas percorrendo os vértices de um n-ágono regular (ver [2], pp. 169–171).

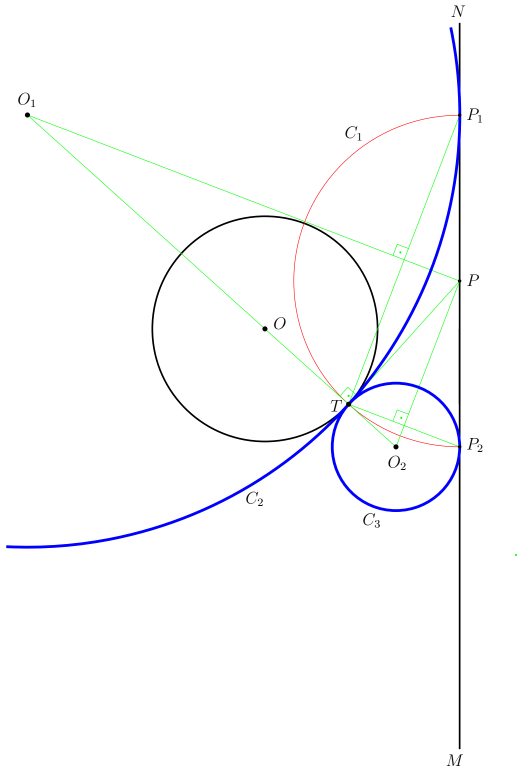
IME 1965/1966, Questão 1, Item (c):
Construção: (i) Retifique o arco dado usando, por exemplo, o método de d'Ocagne ([7], pp. 63–65); (ii) Divida o arco retificado em três partes iguais.



IME 1965/1966, Questão 1, Item (c): Solução.

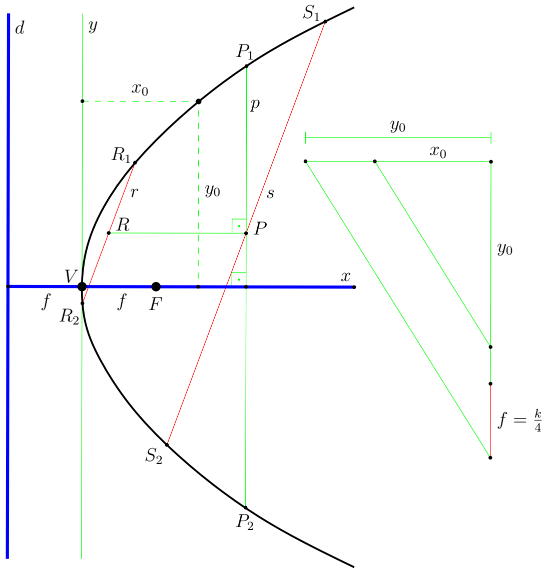
Justificativa: O método de d'Ocagne é propício para a trisecção do arco retificado.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (d):
Construção: (i) Trace a perpendicular a OT, cuja interseção com a reta MN determina o ponto P; (ii) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(P, PT)$, cujas interseções com a reta MN determinam os pontos P_1 e P_2; (iii) Trace as mediatrizes das retas TP_1 e TP_2, cujas respectivas interseções com o prolongamento da reta OT são os pontos O_1 e O_2; (iv) Trace os círculos desejados $C_2 \equiv \mathcal{C}(O_1, O_1T)$ e $C_3 \equiv \mathcal{C}(O_2, O_2T)$.
Justificativa: A reta PT é tangente comum aos círculos desejados. Logo, os centros O_1 e O_2 destes círculos são tais que $O_1T \perp PT$ e $O_2T \perp PT$, de forma que O_1 e O_2 estão sobre a reta suporte de OT. Além disto, as outras tangentes por P a estes círculos são tais que $PP_1 = PP_2 = PT$, com P_1 e P_2 sobre MN como desejado no enunciado. Assim, os centros O_1 e O_2 estão, respectivamente, sobre as mediatriz das cordas TP_1 e TP_2.



IME 1965/1966, Questão 1, Item (d): Solução.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (e):
Construção: (i) Trace duas retas paralelas, r e s, secantes à parábola nos pontos R_1 e R_2 e S_1 e S_2, respectivamente; (ii) Trace uma perpendicular p qualquer a RS, onde R é médio de R_1R_2 e S é médio de S_1S_2, cujas interseções com a parábola são os pontos P_1 e P_2; (iii) Trace a mediatriz x de P_1P_2, determinando o eixo da parábola, cuja interseção com a parábola constitui o vértice V da mesma; (iv) Trace uma perpendicular y a x por V e marque um ponto (x_0, y_0) qualquer da parábola; (v) Determine a quarta proporcional $x_0 : y_0 = y_0 : k$ e marque o foco F sobre o eixo x com $VF = f = \frac{k}{4}$; (vi) Trace a diretriz d paralela ao eixo y a uma distância f de V.



IME 1965/1966, Questão 1, Item (e): Solução.

Justificativa: As interseções da parábola $x = ay^2 + by + c$ com uma reta descrita por $x = \alpha y + \beta$ são da forma

$$ay^2 + (b - \alpha)y + (c - \beta) = 0,$$

de modo que o ordenada média das interseções é dada por

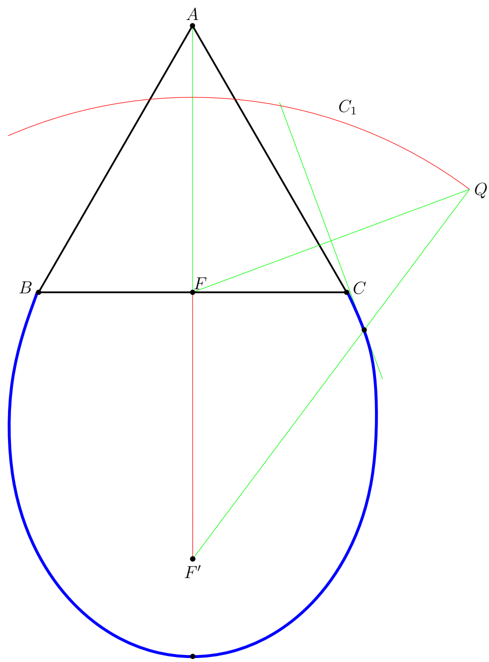
$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\alpha - b}{2a}.$$

Assim, retas paralelas, com mesmo coeficiente angular α, geram interseções com mesma ordenada média, o que permite determinar a direção do eixo da parábola. Uma perpendicular a esta direção intercepta a parábola em dois pontos, cuja mediatriz x é o eixo desejado, que intercepta a parábola dada no vértice V da mesma.

Traçando eixos coordenados com origem no vértice V, um ponto (x_0, y_0) da parábola é descrito por $x_0 = \frac{y_0^2}{k}$. O foco $F \equiv (f, 0)$ é tal que

$$(f - x_0)^2 + y_0^2 = (f + x_0)^2 \Rightarrow y_0^2 = 4fx_0 \Rightarrow f = \frac{y_0^2}{4x_0} = \frac{k}{4}.$$

IME 1965/1966, Questão 1, Item (f):
Construção: (i) Trace o triângulo equilátero ΔABC de lado 8 cm e marque os pontos F, médio de BC, e F', simétrico de A em relação a F, de modo que $AF = FF' = 4\sqrt{3}$ cm; (ii) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F', 12 \text{ cm})$; (iii) Os pontos da elipse são dados pela interseção de $F'Q$, com Q pertencente a C_1, com a mediatriz de FQ.



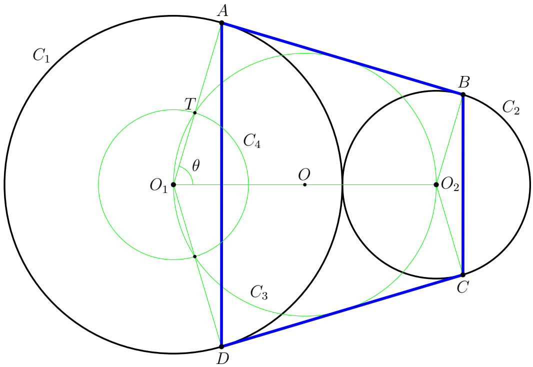
IME 1965/1966, Questão 1, Item (f): Solução.

Justificativa: Por simetria, F é médio de BC. Assim, A é encontro de tangentes pelos extremos da corda focal BC, de forma que $AO = \frac{a^2}{c} = AF + FO = 4\sqrt{3} + c$, onde O é o centro da elipse. Além disto, BC é a corda focal mínima, de forma que BF é o parâmetro da elipse, e assim $BF = \frac{BC}{2} = \frac{b^2}{4}$.

Logo, a elipse é caracterizada por

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 4\sqrt{3}c \\ b^2 = 4a \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 12 \text{ cm} \\ 2b = 2\sqrt{6} \text{ cm} \\ 2c = 4\sqrt{3} \text{ cm} \end{cases}.$$

IME 1965/1966, Questão 2, Item (a):
Construção (item (a)): (i) Marque $O_1O_2 = 7$ cm e trace $C_1 \equiv \mathcal{C}(O_1, r_1)$ e $C_2 \equiv \mathcal{C}(O_2, r_2)$, com $r_1 = 4{,}5$ cm e $r_2 = 2{,}5$ cm; (ii) Trace $C_3 \equiv \mathcal{C}(O, OO_1)$, onde o ponto O é médio de O_1O_2; (iii) Trace $C_4 \equiv \mathcal{C}(O_1, r)$, com $r = 2$ cm, cujas interseções com C_3 determinam os ângulos $\pm\theta$ dos segmentos O_1A, O_2B, O_2C e O_1D que definem o trapézio $ABCD$ desejado.

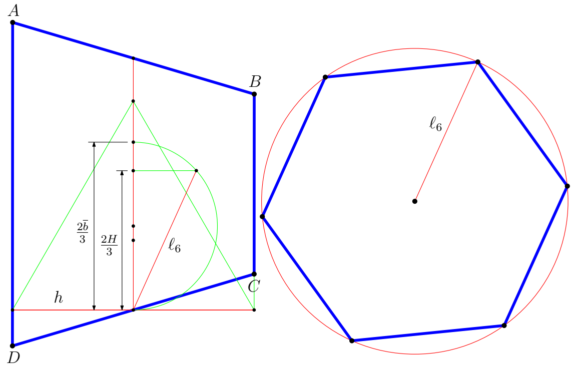


IME 1965/1966, Questão 2, Item A(a): Solução.

Justificativa: Seja T a interseção, sobre O_1A, de C_3 e C_4. Como o triângulo ΔO_1TO_2 está inscrito na semi-circunferência C_3, então $O_1T \perp TO_2$. Como $AB \parallel TO_2$, pois $TA = O_2B = r_2$ e $TA \parallel O_2B$, então $O_1A \perp AB$, como desejado. Um raciocínio análogo verifica que $O_2B \perp AB$, $O_1D \perp DC$ e $O_2C \perp DC$.

Construção (item (b)): (i) Seja o trapézio $ABCD$ determinado no item anterior, de altura h e base média $\overline{b}$; (iii) Construa um triângulo equilátero de lado h cuja altura é $H = \frac{h\sqrt{3}}{2}$; (iv) Determine a grandeza $\ell_6 = \sqrt{\frac{2\overline{b}}{3}\frac{2H}{3}}$; (v) Trace circunferência de raio ℓ_6 e trace hexágono inscrito de lado também ℓ_6.
Justificativa: A equivalência das áreas S_T do trapézio, de base média $\overline{b}$ e altura h, e S_H do hexágono, de semi-perímetro p_6, apótema a_6 e lado ℓ_6, é obtida para

$$\left\{\begin{array}{l} S_T = \overline{b}h \\ \\ S_H = p_6a_6 = 3\ell_6\frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \ell_6 = \frac{\sqrt{2\overline{b}h\sqrt{3}}}{3}$$



IME 1965/1966, Questão 2, Item A(b): Solução.

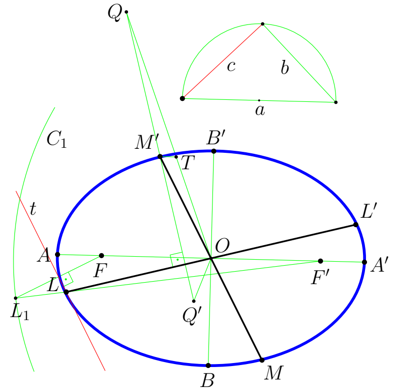
IME 1965/1966, Questão 2, Item (b):

Construção: (i) Determine os eixos da elipse (ver ITA 1984, Questão 20, ou [2], p. 230) e, em seguida, sua distância focal, marcando os extremos e os focos, o que permite traçar a curva; (ii) Trace $C_1 \equiv (F', 2a)$ e a reta $F'L$, cujo prolongamento intercepta C_1 em L_1; (iii) Trace a mediatriz de FL_1, determinando a tangente comum t; (iv) Determine o ponto simétrico L_1' de L e a reta simétrica t_1 de t em relação ao eixo menor da elipse; (v) Trace as retas r_1 e r_2 fazendo ângulos de $\pm 25^{\circ}$ com t e as retas r_1' e r_2' fazendo ângulos de $\pm 25^{\circ}$ com t_1, cujas interseções de r_1 com r_1' e de r_2 com r_2' são os focos F_h e F_h' da hipérbole; (vi) Determine o comprimento $2a = |F_h'L - F_hL|$ do eixo transverso da hipérbole, que permite determinar os demais dados desta curva, viabilizando o seu traçado.

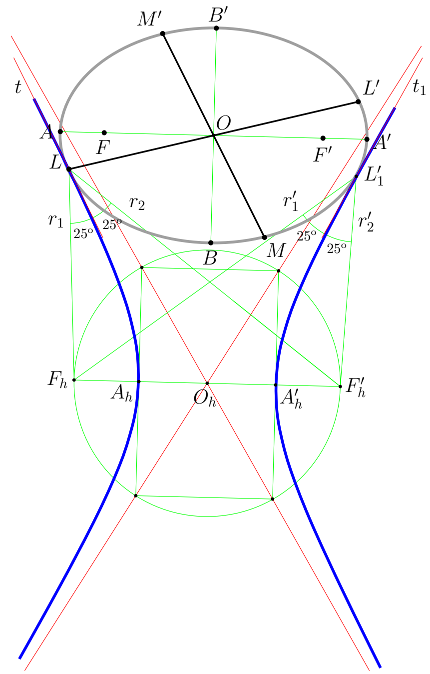
Justificativa: Para o traçado da elipse, ver [2], p. 230. A tangente comum por L é mediatriz de FL_1, onde L_1 é a interseção do prolongamento do raio vetor $F'L$ com o círculo diretor relativo a F'.

Como a elipse é tangente a ambos os ramos da hipérbole e seus eixos são paralelos dois a dois (maior da elipse com o transverso da hipérbole e o menor da elipse com o não transverso da hipérbole), por simetria, o outro ponto de tangência é o simétrico de L em relação ao eixo menor da elipse.

Pelo teorema de Poncelet, a tangente de uma hipérbole pelo ponto L (ou L_1') é a bissetriz dos raios vetores F_hL e $F_h'L$ (ou F_hL_1' e $F_h'L_1'$). Como o ângulo entre os raios vetores é de 50°, então cada raio vetor faz um ângulo de 25° com a respectiva tangente. Isto permite determinar os focos F_h e F_h' da hipérbole, encontro dos respectivos raios vetores para cada ponto de tangência L e L_1'. Como L pertence à hipérbole, é possível determinar o comprimento do eixo transverso pela definição de hipérbole, ou seja, $2a = |F_hL - F_h'L|$, viabilizando o traçado da hipérbole.



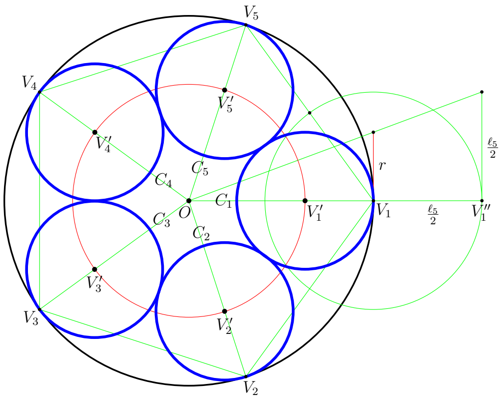
IME 1965/1966, Questão 2, Item (b): Solução - Elipse.



IME 1965/1966, Questão 2, Item (b): Solução - Hipérbole.

IME 1964/1965 - Desenho

IME 1964/1965, Questão 1, Item 1 [valor 1,0]:
Construção: (i) Construa o pentágono regular $V_1V_2V_3V_4V_5$ inscrito na circunferência de centro O e raio $R = 5$ cm ([1], Exercício 2.25), determinando o lado $\ell_5 = R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$; (ii) Determine a quarta proporcional $(R + \frac{\ell_5}{2}) : R = \frac{\ell_5}{2} : r$, (iii) Marque, para cada vértice V_i do pentágono regular, a distância $V_iV_i' = r$, com V_i' entre O e V_i; (iv) Trace as circunferências desejadas $C_i \equiv \mathcal{C}(V_i', r)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

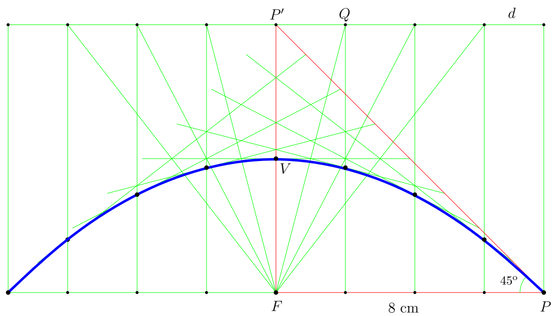


IME 1964/1965, Questão 1, Item 1: Solução.

Justificativa: A circunferência C_1 pode ser obtida a partir da circunferência $C_x \equiv \mathcal{C}(V_1, \frac{\ell}{2})$ por uma homotetia de centro O e razão $k = \frac{R}{R+\frac{\ell_5}{2}}$, que mapeia o ponto V_1'' da figura-solução no ponto V_1 e determina $r = \frac{\ell_5}{2}k$.

IME 1964/1965, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]:

Construção: (i) Trace o triângulo retângulo isósceles $\Delta FPP'$ com catetos $FP = FP' = 8$ cm; (ii) Marque o vértice V da parábola, médio de FP'; (iii) Trace a diretriz d, paralela a FP por P'; (iv) Determine pontos da parábola, interseções das perpendiculares a d por Q qualquer com a mediatriz de FQ.



IME 1964/1965, Questão 1, Item (2): Solução.

Justificativa: A tangente por um ponto P de uma parábola é a bissetriz do ângulo formado por PF, sendo F o foco da parábola, e a perpendicular à diretriz d por P. Como a tangente dada faz um ângulo de 45°, então o foco F da parábola é a própria projeção de P no eixo vertical. Por definição, a distância de P a d é igual a $PF = 8$ cm, o que permite determinar d e, em seguida, o vértice V, médio de F e a projeção P' deste em d.

Os pontos da parábola devem ser equidistantes de F e da diretriz d. Assim traçando uma perpendicular a d por Q qualquer, determina-se um ponto da parábola pela interseção desta perpendicular com a mediatriz de FQ.

Referências Bibliográficas

[1] S. L. Netto, *Problemas Selecionados de Desenho Geométrico*, www.lps.ufrj.br/profs/sergioln/geometria.html, vol. 1, versão 3, Out. 2007.

[2] B. de A. Carvalho, *Desenho Geométrico*, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 3ª ed., 1982.

[3] R. Courant e H. Robbins, *O Que É Matemática?*, Ciência Moderna Ed., Rio de Janeiro, 2000.

[4] I. M. Yaglom, *Geometric Transformations I*, Mathematical Association of America, 1962.

[5] A. Ribeiro, *Desenho Geométrico*, vol. MG-7, Colégio Dom Bosco.

[6] C. da C. P. Brandão, *Desenho*, vol. 2, Sistema Impacto de Ensino.

[7] E. Wagner (com J. P. Q. Carneiro), *Construções Geométricas*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 5ª ed., 2000.