A Matemática no Vestibular do IME

Material Complementar 2: Enunciados Adicionais

sergioℓn@smt.ufrj.br

	Álgebra Cálculo	Geometria Trigonometria	Desenho Descritiva
1942/1943	X	X	
1943/1944	-	-	
1944/1945	X	X	
1945/1946	X	X	
1946/1947	X	X	
1947/1948	X	X	
1948/1949	X	X	
1949/1950	X	X	
1950/1951	X	X	
1951/1952	X	X	
1952/1953	X	X	
1953/1954	XX[1]	X	X
1954/1955	XX[1]	X	X
1955/1956	X	X	
1956/1957	XX[1]	X	X
1957/1958	X	X	
1958/1959	X	X	
1959/1960	XX[1]	X	XX[2]
1960/1961	XX[1]	X	
1961/1962	-	-	
1962/1963	-	-	
1963/1964	X	XX[3]	
1964/1965	X	XX[3]	X
1965/1966	X	X	X
1966/1967	X	X	X
1967/1968	X	X	X
1968/1969	X	X	X
1969/1970	X	X	X
1970/1971	X	X	X
1971/1972	X	X	X
1972/1973	X	X	
1973/1974	X	X	
1974/1975	X	X	
1975/1976	**X**	**X**	
1976/1977	**X**	**X**	
1977/1978	**X**	**X**	
1978/1979	**X**	**X**	
1979/1980	**X**	**X**	
1980/1981	**X**	**X**	
1981/1982	**X**	**X**	
1982/1983	**X**	**X**	
1983/1984	**X**	**X**	
1984/1985	**X**	**X**	
1985/1986	**X**	**X**	
1986/1987	**X**	**X**	
1987/1988	**X**	**X**	
1988/1989	**X**	**X**	
1989/1990	**X**	**X**	
1990/1991	**X**	**X**	

	Matemática
1991/1992	**X**
1992/1993	**X**
1993/1994	**X**
1994/1995	**X**
1995/1996	**X**
1996/1997	**X**
1997/1998	**X**
1998/1999	**X**
1999/2000	**X**
2000/2001	**X**
2001/2002	**X**
2002/2003	**X**
2003/2004	**X**
2004/2005	**X**
2005/2006	**X**

	Objetiva	Discursiva
2006/2007	**X**	**X**
2007/2008	**X**	**X**
2008/2009	**X**	**X**
2009/2010	**X**	**X**
2010/2011	**X**	**X**
2011/2012	**X**	**X**
2012/2013	**X**	**X**
2013/2014	**X**	**X**
2014/2015	**X**	**X**
2015/2016	**X**	**X**
2016/2017	**X**	**X**

(*1): As provas de Álgebra e Cálculo foram realizadas separadamente.
(*2): As provas de Desenho Técnico e Geometria Descritiva foram realizadas separadamente.
(*3): As provas de Geometria e Trigonometria foram realizadas separadamente.

Esse material disponibiliza novos enunciados de provas não incluídos no livro original. Em particular, os enunciados aqui incluídos são:

- 2016/2017: Provas Objetiva e Discursiva.
- 2015/2016: Provas Objetiva e Discursiva.
- 2014/2015: Provas Objetiva e Discursiva.
- 2013/2014: Provas Objetiva e Discursiva.
- 2012/2013: Provas Objetiva e Discursiva.
- 2011/2012: Provas Objetiva e Discursiva.
- 1977: Provas de Álgebra e Geometria de um suposto segundo concurso.
- 1975/1976: Prova de Álgebra (obtida no Acervo da Fundação Biblioteca Nacional - Brasil)*.
- 1942/1943: Prova de Matemática (enviada por Albert do Nascimento Colins).
- 1937/1938: Prova de Matemática (incompleta).

* A prova de Álgebra de 1975/1976 que consta no livro é na verdade a prova de Álgebra do ano de 1974/1975.

1.1 Vestibular 2016/2017

1.1.1 Prova Objetiva

Questão 01: Assinale a alternativa verdadeira:

(A) $\sqrt{2016} - \sqrt{2015} < \sqrt{2017} - \sqrt{2016} < (2\sqrt{2016})^{-1}$.
(B) $\sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015} < (2\sqrt{2016})^{-1}$.
(C) $\sqrt{2017} - \sqrt{2016} < (2\sqrt{2016})^{-1} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$.
(D) $\sqrt{2016} - \sqrt{2015} < (2\sqrt{2016})^{-1} < \sqrt{2017} - \sqrt{2016}$.
(E) $(2\sqrt{2016})^{-1} < \sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$.

Questão 02: O sistema de inequações abaixo admite k soluções inteiras. Pode-se afirmar que:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 14}{x} > 3 \\ x \leq 12 \end{cases}$$

(A) $0 \leq k < 2$. (B) $2 \leq k < 4$. (C) $4 \leq k < 6$. (D) $6 \leq k < 8$. (E) $k \geq 8$.

Questão 03: Sejam Z_1 e Z_2 números complexos tais que Z_2 é imaginário puro e $|Z_1 - Z_2| = |Z_2|$. Para quaisquer valores de Z_1 e Z_2 que atendam a essas condições tem-se que:

(A) Im$(Z_2) > 0$.
(B) Im$(Z_2) < 0$.
(C) $|Z_1| \leq 2|Z_2|$.
(D) Re$(Z_1) \geq 0$.
(E) Re$(Z_1) \leq$ Im(Z_2).

Questão 04: No desenvolvimento de

$$\left(x.\operatorname{sen} 2\beta + \frac{1}{x}\cos 2\beta\right)^{10}$$

o valor do termo independente de x é igual a 63/256. Considerando que β é um número real, com $0 < \beta < \pi/8$ e $x \neq 0$, o valor de β é:

(A) $\pi/9$. (B) $\pi/12$. (C) $\pi/16$. (D) $\pi/18$. (E) $\pi/24$.

Questão 05: Calcule o valor de $\dfrac{\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha}{\operatorname{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha}$, sabendo-se que $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$.

(A) $\dfrac{22}{21}$. (B) $\dfrac{23}{22}$. (C) $\dfrac{25}{23}$. (D) $\dfrac{13}{12}$. (E) $\dfrac{26}{25}$.

Questão 06: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ com $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $\det(A^2 - 2A + I) = 16$. A soma dos valores de a que satisfazem essa condição é:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

Obs: $\det(X)$ denota o determinante da matriz X.

Questão 07: Seja a equação

$$y^{\log_3 \sqrt{3y}} = y^{\log_3 3y} - 6, \quad y > 0.$$

O produto das raízes reais desta equação é igual a:

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{3}{4}$. (D) 2. (E) 3.

Questão 08: Seja $\sqrt{|x-1| + |x-2| + |x-3| + \cdots + |x-2017|}$. O valor mínimo de $f(x)$ está no intervalo:

(A) $(-\infty, 1008]$.
(B) $(1008, 1009]$.
(C) $(1009, 1010]$.
(D) $(1010, 1011]$.
(E) $(1011, +\infty]$.

Questão 09: Sejam x, y e z números complexos que satisfazem ao sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

O valor da soma $x^3 + y^3 + z^3$ é:

(A) 210. (B) 235. (C) 250. (D) 320. (E) 325.

Questão 10: Um hexágono é dividido em 6 triângulos equiláteros. De quantas formas podemos colocar os números de 1 a 6 em cada triângulo, sem repetição, de maneira que a soma dos números em três triângulos adjacentes seja sempre múltiplo de 3? Soluções obtidas por rotação ou reflexão são **diferentes**, portanto as figuras abaixo mostram duas soluções distintas.

(A) 12. (B) 24. (C) 36. (D) 48. (E) 96.

Questão 11: Sejam uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ e uma progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots)$ de termos inteiros, de razão r e razão q, respectivamente, onde r e q são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$. Sabe-se, também, que $a_1 + b_2 = 3$, $a_4 + b_3 = 26$. O valor de b_1 é:

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

Questão 12: Sejam os pontos $A(0,0)$, $B(-1,1)$, $C(1,2)$, $D(4,1)$ e $E(3,\frac{1}{2})$. A reta r passa por A e corta o lado CD, dividindo o pentágono $ABCDE$ em dois polígonos de mesma área. Determine a soma das coordenadas do ponto de interseção da reta r com a reta que liga C e D.

(A) $\frac{25}{7}$. (B) $\frac{51}{14}$. (C) $\frac{26}{7}$. (D) $\frac{53}{14}$. (E) $\frac{27}{7}$.

Questão 13: Dado um quadrado $ABCD$, de lado a, marcam-se os pontos E sobre o lado AB, F sobre o lado BC, G sobre o lado CD e H sobre o lado AD, de modo que os segmentos formados AE, BF, CG e DH tenham comprimento igual a $\frac{3a}{4}$. A área do novo quadrilátero formado pelas interseções dos segmentos AF, BG, CH e DE mede:

(A) $\frac{a^2}{25}$. (B) $\frac{a^2}{18}$. (C) $\frac{a^2}{16}$. (D) $\frac{a^2}{9}$. (E) $\frac{2a^2}{9}$.

Questão 14: Um tronco de pirâmide regular possui 12 vértices. A soma dos perímetros das bases é 36 cm, a soma das áreas das bases é $30\sqrt{3}$ cm^2 e sua altura mede 3 cm. Calcule o volume do tronco de pirâmide.

(A) 50 cm^3. (B) $42\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm^3. (C) $43\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm^3. (D) $43\sqrt{2}$ cm^3. (E) $42\sqrt{3}$ cm^3.

Questão 15: O polinômio $P(x) = x^3 - bx^2 + 80x - c$ possui três raízes inteiras positivas distintas. Sabe-se que duas das raízes do polinômio são divisoras de 80 e que o produto dos divisores positivos de c menores do que c é c^2. Qual o valor de b?

(A) 11. (B) 13. (C) 17. (D) 23. (E) 29.

1.1.2 Prova de Matemática

1ª Questão [Valor 1,0]: Seja M uma matriz real 2×2. Defina uma função f na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, se $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, implica que $f(M) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$. Encontre todas as matrizes simétricas 2×2 reais na qual $M^2 = f(M)$.

2ª Questão [Valor 1,0]: Resolva a inequação, onde $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{9x^2}{\left(1 - \sqrt{3x+1}\right)^2} > 4$$

3ª Questão [Valor 1,0]: Resolva o sistema de equações, onde $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \log_3(\log_{\sqrt{3}} x) - \log_{\sqrt{3}}(\log_3 y) = 1 \\ \left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = 3^{143} \end{cases}$$

4ª Questão [Valor 1,0]: Classifique o sistema abaixo como determinado, possível indeterminado e impossível de acordo com os valores reais de m.

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = m+1 \\ 2x + my + 2z = m^2 + 2 \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = m^3 + 3 \end{cases}$$

5ª Questão [Valor 1,0]: Sejam os complexos $z = a + bi$ e $w = 47 + ci$, tais que $z^3 + w = 0$. Determine o valor de a, b e c, sabendo que esses números são inteiros e positivos.

6ª Questão [Valor 1,0]: Um triângulo ABC tem o seu vértice A na origem do sistema cartesiano, seu baricentro é o ponto $D(3,2)$ e seu circuncentro é o ponto $E(55/18, 5/6)$. Determine:

a) A equação da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

b) As coordenadas dos vértices B e C.

7ª Questão [Valor 1,0]: Se $\dfrac{\cos x}{\cos y} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = -1$, calcule o valor de S.

$$S = \frac{3\cos y + \cos 3y}{\cos x} + \frac{3\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} 3y}{\operatorname{sen} x}$$

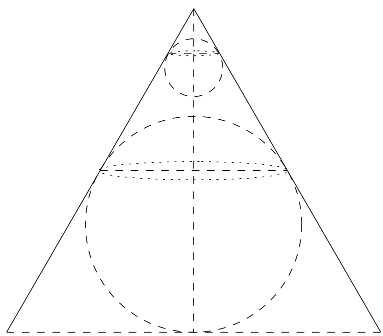
8ª Questão [Valor 1,0]: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Quantas funções de A para A têm exatamente 2 elementos em seu conjunto imagem?

b) Entre as 256 funções de A para A, sorteiam-se as funções f e g, podendo haver repetição. Qual a probabilidade da função composta $f \circ g$ ser uma função constante?

9ª Questão [Valor 1,0]: Em um triângulo ABC, a medida da bissetriz interna AD é a média geométrica entre as medidas dos segmentos BD e DC, e a medida da mediana AM é a média geométrica entre os lados AB e AC. Os pontos D e M estão sobre o lado BC de medida a. Pede-se determinar os lados AB e AC do triângulo ABC em função de a.

10ª Questão [Valor 1,0]: Em um cone equilátero são inscritas duas esferas de raios $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R$ e R, conforme a figura abaixo. Um plano secante ao cone é traçado de forma que este seja tangente às duas esferas. Determine em termos de R o maior segmento possível que une dois pontos da curva formada pela interseção do referido plano com o cone.



1.2 Vestibular 2015/2016

1.2.1 Prova Objetiva

Questão 01: Dados três conjuntos quaisquer F, G e H. O conjunto $G - H$ é igual ao conjunto:

(A) $(G \cup F) - (F - H)$.
(B) $(G \cup H) - (H - F)$.
(C) $(G \cup (H - F)) \cap \overline{H}$.
(D) $\overline{G} \cup (H \cap F)$.
(E) $(\overline{H} \cap G) \cap (G - F)$.

Questão 02: O polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ tem raízes reais α, $-\alpha$ e $\frac{1}{\alpha}$. Portanto o valor da soma $b + c^2 + ac + \frac{b}{c^2}$ é:

(A) -2. (B) -1. (C) 0. (D) 1. (E) 2.

Questão 03: Sabendo-se que m e n são inteiros positivos tais que $3^m + 14400 = n^2$, determine o resto da divisão de $m + n$ por 5.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

Questão 04: O valor do somatório abaixo é:

$$\sum_{k=1}^{15} \operatorname{Img}\left(\operatorname{cis}^{2k-1} \frac{\pi}{36}\right)$$

(A) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{36}}$. (B) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{36}}$. (C) $\dfrac{1}{4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{36}}$. (D) $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{36}$. (E) $\dfrac{1}{4}$.

Obs: $\operatorname{Img}(w)$ é a parte imaginária de w.

Questão 05: Seja $P(x) = x^2 + ax + b$. Sabe-se que $P(x)$ e $P(P(P(x)))$ têm uma raiz em comum. Pode-se afirmar que para todo valor de a e b:

(A) $P(-1)P(1) < 0$.
(B) $P(-1)P(1) = 0$.
(C) $P(-1) + P(1) = 2$.
(D) $P(0)P(1) = 0$.
(E) $P(0) + P(1) = 0$.

Questão 06: Sabendo-se que os números reais positivos a, b e c formam uma progressão geométrica e $\log\left(\frac{5c}{a}\right)$, $\log\left(\frac{3b}{5c}\right)$ e $\log\left(\frac{a}{3b}\right)$ formam uma progressão aritmética, ambas nessa ordem, então pode-se afirmar que a, b e c:

(A) formam os lados de um triângulo obtusângulo.
(B) formam os lados de um triângulo acutângulo não equilátero.
(C) formam os lados de um triângulo equilátero.
(D) formam os lados de um triângulo retângulo.
(E) não podem formar os lados de um triângulo.

Questão 07: O valor da soma abaixo é:

$$\binom{2016}{5}+\binom{2017}{5}+\binom{2018}{5}+\binom{2019}{5}+\binom{2020}{5}+\binom{2016}{6}$$

(A) $\binom{2020}{6}$. (B) $\binom{2020}{7}$. (C) $\binom{2021}{5}$. (D) $\binom{2021}{6}$. (E) $\binom{2022}{5}$.

Questão 08: Os inteiros n e m são sorteados do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$, podendo haver repetição. Qual a probabilidade do produto $n\times m$ ser múltiplo de 12?

(A) $\frac{5}{12}$. (B) $\frac{5}{18}$. (C) $\frac{5}{24}$. (D) $\frac{5}{36}$. (E) $\frac{5}{144}$.

Questão 09: Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. O maior valor de a, com $a \neq 1$, que satisfaz $A^{24} = I$ é:

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$. (E) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.

Obs: I é a matriz identidade 2×2.

Questão 10: Quantos inteiros k satisfazem a desigualdade $2\sqrt{\log_{10} k - 1} + 10\log_{10^{-1}} k^{1/4} + 3 > 0$?

(A) 10. (B) 89. (C) 90. (D) 99. (E) 100.

Questão 11: Seja a equação $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}$. As soluções dessa equação para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ formam um polígono no círculo trigonométrico de área:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$. (D) $\frac{1}{2}$. (E) 1.

Questão 12: O lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{R}^2$ equidistantes das retas de equações

$$4x + 3y - 2 = 0 \quad \text{e} \quad 12x - 16y + 5 = 0$$

é:

(A) $4x + 28y + 13 = 0$.
(B) $8x - 7y - 13 = 0$.
(C) $28x - 4y - 3 = 0$.
(D) $56x^2 + 388xy - 184x - 56y^2 - 16y + 19 = 0$.
(E) $112x^2 + 768xy - 376x - 112y^2 - 32y + 39 = 0$.

Questão 13: Considere quatro pontos distintos coplanares. Das distâncias entre esses pontos, quatro delas valem a e duas delas valem b. O valor máximo da relação $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ é:

(A) 2. (B) $1 + \sqrt{3}$. (C) $2 + \sqrt{3}$. (D) $1 + 2\sqrt{2}$. (E) $2 + 2\sqrt{3}$.

Questão 14: Em um triângulo ABC, o ponto D é o pé da bissetriz relativa ao ângulo A. Sabe-se que

$$\overline{AC} = \overline{AD}, \quad r = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}, \quad \text{e que} \quad \hat{C} = \alpha.$$

Portanto o valor de $\operatorname{sen}^2\alpha$ é:

(A) $\frac{3r-1}{4}$. (B) $\frac{3r-1}{4r}$. (C) $\frac{r+3}{4}$. (D) $\frac{3r+1}{4r}$. (E) $\frac{3r+1}{4}$.

Questão 15: Sejam dois quadrados de lado a situados em planos distintos que são paralelos entre si e situados a uma distância d um do outro. A reta que liga os centros dos quadrados é perpendicular a esses planos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado. Liga-se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro quadrado. Obtêm-se, assim, triângulos que, conjuntamente com os quadrados, formam um sólido S. Qual a distância entre estes planos distintos em função de a, de modo que os triângulos descritos acima sejam equiláteros?

(A) $\dfrac{a}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{10}}{8}$. (D) $\dfrac{a\sqrt[4]{8}}{2}$. (E) $\dfrac{a(4-3\sqrt{2})}{2}$.

1.2.2 Prova de Matemática

1ª Questão [Valor 1,0]: Os inteiros $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{25}$ estão em PA com razão não nula. Os termos a_1, a_2 e a_{10} estão em PG, assim como a_6, a_j e a_{25}. Determine j.

2ª Questão [Valor 1,0]: Sejam as funções f_n, para $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, tais que: $f_0(x) = \frac{1}{(1-x)}$ e $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$, para $n \geq 1$. Calcule $f_{2016}(2016)$.

3ª Questão [Valor 1,0]: Seja Z um número complexo tal que $\frac{2Z}{\overline{Z}i}$ possui argumento igual a $\frac{3\pi}{4}$ e $\log_3(2Z+2\overline{Z}+1) = 2$. Determine o número complexo Z.

4ª Questão [Valor 1,0]: Define-se A como a matriz 2016×2016, cujos elementos satisfazem a igualdade:

$$a_{i,j} = \binom{i+j-2}{j-1}, \quad \text{para} \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, 2016\}.$$

Calcule o determinante de A.

5ª Questão [Valor 1,0]: Determine o conjunto solução da equação:

$$(\operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}) = 4 - \operatorname{cotg} x.$$

6ª Questão [Valor 1,0]: Seja a equação $n^2 - 7m^2 = (5m - 2n)^2 + 49$. Determine todos os pares inteiros (m, n) que satisfazem esta equação.

7ª Questão [Valor 1,0]: Três jogadores sentam ao redor de uma mesa e jogam, alternadamente, um dado não viciado de seis faces. O primeiro jogador lança o dado, seguido pelo que está sentado à sua esquerda, continuando neste sentido até o jogo acabar. Aquele que jogar o dado e o resultado for 6, ganha e o jogo acaba. Se um jogador obtiver o resultado 1, o jogador seguinte perderá a vez, isto é, a vez passará ao jogador sentado à direita de quem obteve 1. O jogo seguirá até que um jogador ganhe ao tirar um 6. Qual é a probabilidade de vitória do primeiro jogador a jogar?

8ª Questão [Valor 1,0]: A circunferência C tem equação $x^2 + y^2 = 16$. Seja C' uma circunferência de raio 1 que se desloca tangenciando internamente a circunferência C, sem escorregamento entre os pontos de contato, ou seja, C' rola internamente sobre C.

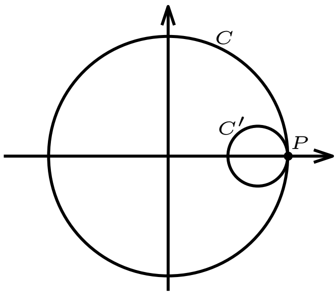


Figura (a)

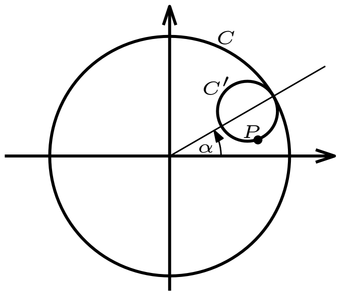


Figura (b)

Define-se o ponto P sobre C' de forma que no início do movimento de C' o ponto P coincide com o ponto de tangência $(4, 0)$, conforme figura (a). Após certo deslocamento, o ângulo entre o eixo x e a reta que une o centro das cicunferências é α, conforme figura (b).

a) Determine as coordenadas do ponto P marcado sobre C' em função do ângulo α.

b) Determine a equação em coordenadas cartesianas do lugar geométrico do ponto P quando α varia no intervalo $[0, 2\pi)$.

9ª Questão [Valor 1,0]: Uma corda intercepta o diâmetro de um círculo de centro O no ponto C' segundo um ângulo de 45°. Sejam A e B os pontos extremos desta corda, e a distância AC' igual a $\sqrt{3} + 1$ cm. O raio do círculo mede 2 cm e C é a extremidade do diâmetro mais distante de C'. O prolongamento do segmento AO intercepta BC em A'. Calcule a razão em que A' divide BC.

10ª Questão [Valor 1,0]: Um cone é inscrito em um cubo $ABCDEFGH$ de forma que a base do cone é o círculo inscrito na base $ABCD$. O vértice do cone é o centro da face oposta do cubo. A projeção do vértice H na base $ABCD$ coincide com o vértice D. Determine a área da seção do cone pelo plano ABH em função de a, a medida da aresta do cubo.

1.3 Vestibular 2014/2015

1.3.1 Prova Objetiva

Questão 01: Os lados a, b e c de um triângulo estão em PA nesta ordem, sendo opostos os ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Determine o valor da expressão:

$$\frac{\cos\dfrac{\hat{A}-\hat{C}}{2}}{\cos\dfrac{\hat{A}+\hat{C}}{2}}.$$

(A) $\sqrt{2}$. (B) 2. (C) $2\sqrt{2}$. (D) 3. (E) 4.

Questão 02: Sejam x e y números reais não nulos tais que:

$$\begin{cases} \log_x y^{\pi} + \log_y x^{e} = a \\ \dfrac{1}{\log_y x^{\pi^{-1}}} - \dfrac{1}{\log_x y^{e^{-1}}} = b \end{cases}.$$

O valor de $\dfrac{x^{a+b+2e}}{y^{a-b+2\pi}}$ é:

(A) 1. (B) $\sqrt{\dfrac{\pi}{e}}$. (C) $\sqrt{\dfrac{a.e}{b.\pi}}$. (D) $a-b$. (E) $\dfrac{(a+b)^{\frac{e}{\pi}}}{\pi}$.

Questão 03: A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x) = \ln\frac{8+3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{8-4\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} 2x\cos x}.$$

Marque a opção verdadeira:

(A) f não tem raízes reais.
(B) f é uma função ímpar.
(C) f é uma função par.
(D) $|f(x)| \leq 1$.
(E) f é sobrejetora.

Questão 04: A soma dos termos de uma progressão aritmética é 244. O primeiro termo, a razão e o número de termos formam, nessa ordem, outra progressão aritmética de razão 1. Determine a razão da primeira progressão aritmética.

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) 10. (E) 11.

Questão 05: Determine o produto dos valores máximo e mínimo de y que satisfazem as inequações dadas para algum valor de x:

$$2x^2 - 12x + 10 \leq 5y \leq 10 - 2x.$$

(A) $-3{,}2$. (B) $-1{,}6$. (C) 0. (D) $1{,}6$. (E) $3{,}2$.

Questão 06: Qual o resto da divisão do polinômio $x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2$ pelo polinômio $x^3 - 3x^2 - x + 3$?

(A) $x^2 + x - 2$. (B) $6x^2 - 4x + 3$. (C) $3x - 9$. (D) $6x^2 - 17x - 3$. (E) $6x + 1$.

Questão 07: Quantos restos diferentes são possíveis da divisão de n^2 por 11, sendo n um número natural?

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6. (E) 7.

Questão 08: O número de soluções da equação $\cos(8x) = \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{tg}^2(x) + \operatorname{cotg}^2(x)$ no intervalo $[0, 2\pi)$ é:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4. (E) 8.

Questão 09: Dada a matriz A, a soma do módulo dos valores de x que tornam o determinante da matriz nulo é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}.$$

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) 10. (E) 11.

Questão 10: Sejam Γ a circunferência que passa pelos pontos $(6, 7)$, $(4, 1)$ e $(8, 5)$ e t a reta tangente a Γ, que passa por $(0, -1)$ e o ponto de tangência tem ordenada 5. A menor distância do ponto $P(-1, 4)$ à reta t é:

(A) $3\sqrt{2}$. (B) 4. (C) $2\sqrt{3}$. (D) 3. (E) $4\sqrt{10}/5$.

Questão 11: O lugar geométrico no plano complexo de $w = z + 1/z$, sendo z número complexo tal que $|z| = k$ e $k > 1$, é um(a):

(A) segmento de reta. (B) circunferência. (C) hipérbole.
(D) elipse. (E) parábola.

Questão 12: O time de futebol “X” irá participar de um campeonato no qual não são permitidos empates. Em 80% dos jogos, “X” é o favorito. A probabilidade de “X” ser o vencedor do jogo quando ele é o favorito é $0{,}9$. Quando “X” não é o favorito, a probabilidade de ele ser o vencedor é $0{,}02$. Em um determinado jogo de “X” contra “Y”, o time “X” foi o vencedor. Qual a probabilidade de “X” ter sido o favorito nesse jogo?

(A) $0{,}80$. (B) $0{,}98$. (C)180/181. (D) 179/181. (E) 170/181.

Questão 13: Seja um trapézio retângulo de bases a e b com diagonais perpendiculares. Determine a área do trapézio.

(A) $\dfrac{ab}{c}$. (B) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$. (C) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$. (D) $\left(\dfrac{2a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$. (E) $\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)a^2b}$.

Questão 14: Em um prisma oblíquo $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, cuja base $ABCDEF$ é um hexágono regular de lado a, a face lateral $EFF'E'$ está inclinada de 45° em relação à base, e a projeção ortogonal da aresta $F'E'$ sobre a base $ABCDEF$ coincide com a aresta BC. O volume do prisma é:

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^3$. (B) $\dfrac{9}{4}a^3$. (C) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}a^3$. (D) $\dfrac{9}{2}a^3$. (E) $\dfrac{5}{2}a^3$.

Questão 15: Sejam um tetraedro regular $ABCD$ de aresta a e um octaedro inscrito no tetraedro, com seus vértices posicionados nos pontos médios das arestas do tetraedro. Obtenha a área da seção do octaedro formada pelo plano horizontal paralelo à base do tetraedro BCD, distando desta base de um quarto da altura do tetraedro.

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{192}a^2$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{96}a^2$. (C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{32}a^2$. (D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{64}a^2$. (E) $\dfrac{9\sqrt{3}}{64}a^2$.

1.3.2 Prova de Matemática

1ª Questão [Valor 1,0]: Determine os valores reais de x que satisfazem a inequação:

$$\frac{4}{\log_3 x^2 - 2} + \log_x \frac{1}{9} > 1.$$

2ª Questão [Valor 1,0]: Encontre as soluções reais da equação:

$$\sqrt{x+\sqrt{4x-4}} + \sqrt{x-\sqrt{4x-4}} = \sqrt{x+3}.$$

3ª Questão [Valor 1,0]: Descreva o lugar geométrico do número complexo z que atende à equação

$$\arg\left(z - z_1\right) - \arg\left(z - z_2\right) - \arg\left(z - z_3\right) = k\pi,$$

em que z_1 é real, z_2 e z_3 são complexos conjugados com parte imaginária não nula e k é um número inteiro.
Obs: $\arg\left(z\right)$ é o argumento do número complexo z.

4ª Questão [Valor 1,0]: Sejam n um inteiro positivo cuja representação decimal é $a_m \ldots a_1 a_0$ e f a função que troca a posição dos dígitos a_{2i} e a_{2i+1}, de forma que $f(a_{2k+1}a_{2k} \ldots a_1 a_0) = a_{2k}a_{2k+1} \ldots a_0 a_1$. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
&f(123456) = 214365\\
&f(1034) = 143\\
&f(123) = 1032\\
&f(10) = 1
\end{aligned}$$

Determine o menor número maior que 99 que satisfaça a equação

$$x^2 = 9x + 9f(x) + (f(x))^2.$$

5ª Questão [Valor 1,0]: Um tetraedro regular, com arestas de comprimento igual a d, é cortado por 2 planos paralelos entre si e a uma das bases, dividindo-o em 3 sólidos de volumes iguais. Determine a altura de cada um destes 3 sólidos em função de d.

6ª Questão [Valor 1,0]: Pelo ponto P de coordenadas $(-1, 0)$ traçam-se as tangentes t e s à parábola $y^2 = 2x$. A reta t intercepta a parábola em A e a reta s intercepta a parábola em B. Pelos pontos A e B traçam-se paralelas às tangentes encontrando a parábola em outros pontos C e D, respectivamente. Calcule o valor da razão AB/CD.

7ª Questão [Valor 1,0]: Num triângulo ABC isósceles, com ângulos iguais em B e C, o seu incentro I se encontra no ponto médio do segmento de reta que une o seu ortocentro H a seu baricentro G. O segmento de reta AG é menor que o segmento de reta AH. Os comprimentos dos segmentos de reta HI e IG são iguais a d. Determine o perímetro e a área desse triângulo em função de d.

8ª Questão [Valor 1,0]: De quantas maneiras podemos decompor um eneágono convexo em triângulos traçando suas diagonais, de forma que essas diagonais não se cortem?

9ª Questão [Valor 1,0]: Sejam $S = a + b + c$ e $P = a.b.c$. Calcule o determinante abaixo unicamente em função de S e P.

$$\begin{vmatrix} a^2 + (b+c)^2 & 2b^2 & (a+b)^2 + c^2 \\ 2a^2 & (a+c)^2 + b^2 & (a+b)^2 + c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

10ª Questão [Valor 1,0]: Os coeficientes $a_0, \ldots, a_{1024}$ do polinômio $P(x) = x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + \ldots + a_1 x + a_0$ são tais que $a_i \in \{0, 1\}$, para $0 \leq i \leq 2014$.

a) Quais são as possíveis raízes inteiras de $P(x)$?

b) Quantos polinômios da forma acima têm duas raízes inteiras distintas?

1.4 Vestibular 2013/2014

1.4.1 Prova Objetiva

1ª Questão [Valor 0,25]: Qual é o menor número?

(A) $\pi.8!$ (B) 9^9 (C) $2^{2^{2^2}}$ (D) 3^{3^3} (E) $2^{13}.5^3$

2ª Questão [Valor 0,25]: Seja a matriz $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, em que a, b e c são números reais positivos satisfazendo $abc = 1$. Sabe-se que $A^T A = I$, em que A^T é a matriz transposta de A e I é a matriz identidade de 3ª ordem. O produto dos possíveis valores de $a^3 + b^3 + c^3$ é

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

3ª Questão [Valor 0,25]: Sejam $W = \{y \in \mathbb{R} | 2k + 1 \leq y \leq 3k - 5\}$ e $S = \{y \in \mathbb{R} | 3 \leq y \leq 22\}$. Qual é o conjunto dos valores de $k \in \mathbb{R}$ para o qual $W \neq \emptyset$ e $W \subseteq (W \cap S)$?

(A) $\{1 \leq k \leq 9\}$ (B) $\{k \leq 9\}$ (C) $\{6 \leq k \leq 9\}$ (D) $\{k \leq 6\}$ (E) $\emptyset$

4ª Questão [Valor 0,25]: Sabe-se $y.z.\sqrt{z.\sqrt{x}} = x.y^3.z^2 = \dfrac{x}{z.\sqrt{y.z}} = e$, em que e é a base dos logaritmos naturais. O valor de $x + y + z$ é

(A) $e^3 + e^2 + 1$ (B) $e^2 + e^{-1} + e$ (C) $e^3 + 1$
(D) $e^3 + e^{-2} + e$ (E) $e^3 + e^{-2} + e^{-1}$

5ª Questão [Valor 0,25]: Uma elipse cujo centro encontra-se na origem e cujos eixos são paralelos ao sistema de eixos cartesianos possui comprimento da semi-distância focal igual a $\sqrt{3}$ e excentricidade igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Considere que os pontos A, B, C e D representam as interseções da elipse com as retas de equações $y = x$ e $y = -x$. A área do quadrilátero $ABCD$ é

(A) 8 (B) 16 (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\frac{16}{5}$ (E) $\frac{16}{7}$

6ª Questão [Valor 0,25]: Em um quadrilátero $ABCD$, os ângulos $A\hat{B}C$ e $C\hat{D}A$ são retos. Considere que $\operatorname{sen}(B\hat{D}C)$ e $\operatorname{sen}(B\hat{C}A)$ sejam as raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$, onde $b, c \in \mathbb{R}$. Qual a verdadeira relação satisfeita por b e c?

(A) $b^2 + 2c^2 = 1$ (B) $b^4 + 2c^2 = b^2c$ (C) $b^2 + 2c = 1$
(D) $b^2 - 2c^2 = 1$ (E) $b^2 - 2c = 1$

7ª Questão [Valor 0,25]: Sejam uma circunferência C, com centro O e raio R, e uma reta r tangente a C no ponto T. Traça-se o diâmetro AB oblíquo a r. A projeção de AB sobre r é o segmento PQ. Sabendo que a razão entre OQ e o raio R é $\frac{\sqrt{7}}{2}$, o ângulo, em radianos, entre AB e PQ é

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{5\pi}{18}$ (D) $\frac{\pi}{3}$ (E) $\frac{7\pi}{18}$

8ª Questão [Valor 0,25]: Seja $SABCD$ uma pirâmide, cuja base é um quadrilátero convexo $ABCD$. A aresta SD é a altura da pirâmide. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{5}$, $\overline{AD} = \overline{DC} = \sqrt{2}$, $\overline{AC} = 2$ e $\overline{SA} + \overline{SB} = 7$. O volume da pirâmide é

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{7}$ (C) $\sqrt{11}$ (D) $\sqrt{13}$ (E) $\sqrt{17}$

9ª Questão [Valor 0,25]: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real definida por $f(x) = x^2 - \pi x$. Sejam também a, b, c e d números reais tais que: $a = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$; $b = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$; $c = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ e $d = \operatorname{cotg}^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$. A relação de ordem, no conjunto dos reais, entre as imagens $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ e $f(d)$ é

(A) $f(b) > f(a) > f(d) > f(c)$
(B) $f(d) > f(a) > f(c) > f(b)$
(C) $f(d) > f(a) > f(b) > f(c)$
(D) $f(a) > f(d) > f(b) > f(c)$
(E) $f(a) > f(b) > f(d) > f(c)$

10ª Questão [Valor 0,25]: Sabe-se que o valor do sexto termo da expansão em binômio de Newton de $\left(2^{\log_2 \sqrt{9^{(x-1)}+7}} + \dfrac{1}{\frac{1}{25}\log_2\left(3^{(x-1)}+1\right)}\right)^7$ é 84. O valor da soma dos possíveis valores de x é

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

11ª Questão [Valor 0,25]: Para o número complexo z que descreve o lugar geométrico representado pela desigualdade $|z - 26i| \leq 10$, sejam α_1 e α_2 os valores máximo e mínimo de seu argumento. O valor de $|\alpha_1 - \alpha_2|$ é

(A) $\pi - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$

(B) $2. \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$

(C) $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$

(D) $2. \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$

(E) $2. \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$

12ª Questão [Valor 0,25]: Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é S_1 e a soma de seus quadrados é S_2. Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1 x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$. A razão dessa PA é

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (E) 1

13ª Questão [Valor 0,25]: Sabe-se que uma das raízes da equação $y^2 - 9y + 8 = 0$ pode ser representada pela expressão $e^{(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x + \cdots)\ln 2}$. Sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor da razão $\frac{\cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x}$ é

(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (B) $\sqrt{3} - 1$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (E) $\sqrt{3} + 1$

Obs: $\ln 2$ representa o logaritmo neperiano de 2.

14ª Questão [Valor 0,25]: Sejam $f(x) = \operatorname{sen}(\log x)$ e $g(x) = \cos(\log x)$ duas funções reais, nas quais $\log x$ representa o logaritmo decimal de x. O valor da expressão $f(x).f(y) - \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{x}{y}\right) - g(x.y)\right]$ é

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

15ª Questão [Valor 0,25]: Em uma festa de aniversário estão presentes n famílias com pai, mãe e 2 filhos, além de 2 famílias com pai, mãe e 1 filho. Organiza-se uma brincadeira que envolve esforço físico, na qual uma equipe azul enfrentará uma equipe amarela. Para equilibrar a disputa, uma das equipes terá apenas o pai de uma das famílias, enquanto a outra equipe terá 2 pessoas de uma mesma família, não podendo incluir o pai. É permitido que o pai enfrente 2 pessoas de sua própria família. Para que se tenham exatamente 2014 formas distintas de se organizar a brincadeira, o valor de n deverá ser

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21

1.4.2 Prova de Matemática

1ª Questão [Valor 1,0]: O polinômio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 81x - 243$ possui raízes complexas simétricas e uma raiz com valor igual ao módulo das raízes complexas. Determine todas as raízes do polinômio.

2ª Questão [Valor 1,0]: Calcule o determinante abaixo, no qual $w = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ e $i = \sqrt{-1}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & w & 0 & i \\ i & 1 & -i & w^2 \\ 1-i & w & i-1 & 1 \\ 0 & w & 1 & i \end{vmatrix}$$

3ª Questão [Valor 1,0]: Determine o(s) valor(es) de x, inteiro(s) e positivo(s), que satisfaz(em) a equação

$$x^2 = \sum_{y=1}^{x} \left[\prod_{z=0}^{y-1} (y - z) \right].$$

4ª Questão [Valor1,0]: Resolva a equação $\left(\log_{\cos x} \operatorname{sen}^2 x\right).(\log_{\cos^2 x} \operatorname{sen} x) = 4$.

5ª Questão [Valor 1,0]: Seja $ABCDA'B'C'D'$ um prisma reto de base retangular $ABCD$. Projeta-se o ponto médio M da maior aresta da base sobre a diagonal AC, obtendo-se o ponto P. Em seguida projeta-se o ponto P na face oposta, obtendo-se o ponto N. Sabe-se que $|\overline{NA}^2 - \overline{NC}^2| = k$. Determine o comprimento da menor aresta da base.

6ª Questão [Valor 1,0]: Calcular o valor da expressão abaixo

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\cdots037}_{89\text{ algarismos}} - \underbrace{11\cdots1}_{30\text{ algs "1"}}\ \underbrace{00\cdots0}_{30\text{ algs "0"}}}.$$

Obs: algs = algarismos.

7ª Questão [Valor 1,0]: O lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC é fixo e tem comprimento a. O ortocentro H do triângulo percorre uma reta paralela à reta suporte de $\overline{BC}$ e distante $\frac{a}{4}$ da mesma.

a) Determine o lugar geométrico do ponto A quando H varia.

b) Determine o valor mínimo da área do triângulo ABC quando A e H estão no mesmo semi-plano definido pela reta suporte de $\overline{BC}$.

8ª Questão [Valor 1,0]: Um professor dá um teste surpresa para uma turma de 9 alunos, e diz que o teste pode ser feito sozinho ou em grupos de 2 alunos. De quantas formas a turma pode se organizar para fazer o teste? (Por exemplo, uma turma de 3 alunos pode se organizar de 4 formas e uma turma de 4 alunos pode se organizar de 10 formas.)

9ª Questão [Valor 1,0]: Resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \frac{y}{x} \\ 2^{x+2} + 8^x = 5.4^y \end{cases} .$$

10ª Questão [Valor 1,0]: Sejam p o semiperímetro de um triângulo, S sua área, r e R os raios de suas circunferências inscrita e circunscrita, respectivamente. Demonstre que vale a seguinte desigualdade

$$\frac{2\sqrt{3}}{9} S \leq r.R \leq \frac{2p^2}{27} .$$

1.5 Vestibular 2012/2013

1.5.1 Prova Objetiva

1ª Questão [Valor 0,25]: Os polinômios $P(x) = x^3 + ax^2 + 18$ e $Q(x) = x^3 + bx + 12$ possuem duas raízes comuns. Sabendo que a e b são números reais, pode-se afirmar que satisfazem a equação

(A) $a = b$ (B) $2a = b$ (C) $a = 2b$ (D) $2a = 3b$ (E) $3a = 2b$

2ª Questão [Valor 0,25]: Assinale a alternativa que apresenta o mesmo valor da expressão $[4\cos^2(9^o) - 3][4\cos^2(27^o) - 3]$:

(A) $\mathrm{sen}\,(9^o)$ (B) $\mathrm{tg}\,(9^o)$ (C) $\cos(9^o)$ (D) $\sec(9^o)$ (E) $\mathrm{cossec}\,(9^o)$

3ª Questão [Valor 0,25]: Considere a equação $\log_{3x}\dfrac{3}{x} + (\log_3 x)^2 = 1$. A soma dos quadrados das soluções reais dessa equação está contida no intervalo

(A) $[0, 5)$ (B) $[5, 10)$ (C) $[10, 15)$ (D) $[15, 20)$ (E) $[20, \infty)$

4ª Questão [Valor 0,25]: Considere as inequações abaixo:

I) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

II) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

III) $(a^2 - b^2) \geq (a - b)^4$

Está(ão) correta(s), para quaisquer valores reais positivos de a, b e c, a(s) inequação(ões)

(A) II apenas (B) I e II apenas (C) I e III apenas
(D) II e III apenas (E) I, II e III

5ª Questão [Valor 0,25]: Considere o sistema de equações $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases}$, com a, b, c, d, p e q reais, $abcd \neq 0$, $a + b = m$ e $d = nc$. Sabe-se que o sistema é indeterminado. O valor de $p + q$ é

(A) m (B) $\dfrac{m}{n}$ (C) $m^2 - n^2$ (D) mn (E) $m + n$

6ª Questão [Valor 0,25]: O coeficiente de x^4y^4 no desenvolvimento de $(1 + x + y)^{10}$ é

(A) 3150 (B) 6300 (C) 75600 (D) 81900 (E) 151200

7ª Questão [Valor 0,25]: Seja um triângulo ABC. AH é altura relativa de BC, com H localizado entre B e C. Seja BM a mediana relativa de AC. Sabendo que $BH = AM = 4$, a soma dos possíveis valores inteiros de BM é

(A) 11 (B) 13 (C) 18 (D) 21 (E) 26

8ª Questão [Valor 0,25]: Seja Δ o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$. O número de possíveis valores de x reais que anulam Δ é

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

9ª Questão [Valor 0,25]: Seja o número complexo $z = \dfrac{a}{ib(1+ib)^2}$, onde a e b são números reais positivos e $i = \sqrt{-1}$. Sabendo que o módulo e o argumento de z valem, respectivamente, 1 e $(-\pi)$ rad, o valor de a é

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) 4

10ª Questão [Valor 0,25]: Entre os números 3 e 192 insere-se um igual número de termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica com razões r e q, respectivamente, onde r e q são números inteiros. O número 3 e o número 192 participam destas duas progressões. Sabe-se que o terceiro termo de $\left(1 + \dfrac{1}{q}\right)^8$, em potências crescentes de $\dfrac{1}{q}$, é $\dfrac{r}{9q}$. O segundo termo da progressão aritmética é

(A) 12 (B) 48 (C) 66 (D) 99 (E) 129

11ª Questão [Valor 0,25]: Um menino, na cidade do Rio de Janeiro, lança uma moeda. Ele andará 1 m para leste se o resultado for cara ou 1 m para oeste se o resultado for coroa. A probabilidade deste menino estar a 5 m de distância de sua posição inicial, após 9 lançamentos da moeda, é

(A) $\dfrac{9}{2^6}$ (B) $\dfrac{35}{2^6}$ (C) $\dfrac{2}{9!}$ (D) $\dfrac{35}{2^9}$ (E) $\dfrac{9!}{2^9}$

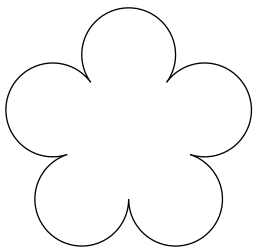
12ª Questão [Valor 0,25]: Considere uma haste AB de comprimento 10 m. Seja um ponto P localizado nesta haste a 7 m da extremidade A. A posição inicial desta haste é horizontal sobre o semieixo x positivo, com a extremidade A localizada na origem do plano cartesiano. A haste se desloca de forma que a extremidade A percorra o eixo y, no sentido positivo, e a extremidade B percorra o eixo x, no sentido negativo, até que a extremidade B esteja sobre a origem do plano cartesiano. A equação do lugar geométrico, no primeiro quadrante, traçado pelo ponto P ao ocorrer o deslocamento descrito é

(A) $49x^2 + 9y^2 - 280x + 120y - 441 = 0$
(B) $49x^2 - 406x - 49y^2 + 441 = 0$
(C) $9x^2 + 49y^2 - 441 = 0$
(D) $9x^2 + 9y^2 - 120y - 441 = 0$
(E) $9x^2 - 49y^2 - 441 = 0$

13ª Questão [Valor 0,25]: Considere uma pirâmide regular de base hexagonal e altura h. Uma esfera de raio R está inscrita nesta pirâmide. O volume desta pirâmide é

(A) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h-2R}$ (B) $\frac{h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h+2R}$ (C) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h+2R}$
(D) $\frac{h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h-2R}$ (E) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h-R}$

14ª Questão [Valor 0,25]: Considere a figura abaixo formada por arcos de circunferência tangentes cujos centros formam um pentágono regular inscritível em uma circunferência de raio R. O perímetro da figura é



(A) $\frac{7\pi R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ (B) $\frac{7\pi R}{4}\sqrt{10+\sqrt{5}}$ (C) $\frac{7\pi R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
(D) $\frac{7\pi R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ (E) $\frac{7\pi R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

15ª Questão [Valor 0,25]: Considere os conjuntos A, B, C e D, não vazios, contidos no mesmo conjunto universo U. A simbologia $\overline{F}$ representa o complemento de um conjunto F em relação ao conjunto U. Assinale a opção correta

(A) Se $A \cap D \subset C$ e $B \cap D \subset C$ então $A \cap B \subset C$

(B) $\left[(A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)\right] \cap (A \cap B \cap C) = (A \cap B)$

(C) $\overline{(A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C})} = (A \cap B \cap C)$

(D) $(A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$

(E) Se $A \subset C$ e $B \subset C$ então $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \subset C$

1.5.2 Prova de Matemática

1ª Questão [Valor 1,0]: Considere $\log_{\sqrt{b}}(a)^2 = 4$, com a e b números reais positivos. Determine o valor de m, número real, para que a equação $x^3 - 18x^2 + [\log_b(ab)^m + 8 - m]x - \log_b(a)^{2m} = 0$ tenha três raízes reais em progressão aritmética.

2ª Questão [Valor 1,0]: Considere a, b e c números inteiros e $2 < a < b < c$. Determine o(s) valor(es) de x, y e z, que satisfaçam o sistema de equações

$$\begin{cases} ax - 2by + 3cz = 2abc \\ 3ax - 4by = -abc \\ -by + cz = 0 \\ xyz = 2013^2 \end{cases} .$$

3ª Questão [Valor 1,0]: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Seja a matriz $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$, com k e n números inteiros. Determine a soma, em função de n, dos quatro elementos da matriz B.

4ª Questão [Valor 1,0]: Considere $P = \prod_{k=0}^{45} \left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]$, com $\prod_{k=0}^{n}$ representando o produto dos termos desde $k = 0$ até $k = n$, sendo k e n números inteiros. Determine o(s) valor(es) de m, número real, que satisfaça(m) a equação $P = 2^m$.

5ª Questão [Valor 1,0]: Considere, Z_1 e Z_2, complexos que satisfazem a equação $x^2 + px + q = 0$, onde p e q são números reais diferentes de zero. Sabe-se que os módulos de Z_1 e Z_2 são iguais e que a diferença entre os seus argumentos vale α, onde α é diferente de zero. Determine o valor de $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ em função de p e q.

6ª Questão [Valor 1,0]: Considere um triângulo ABC com lado BC igual a L. São dados um ponto D sobre o lado AB e um ponto E sobre o lado AC, de modo que sejam válidas as relações $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EC}{EA} = m$, com $m > 1$. Pelo ponto médio do segmento DE, denominado M, traça-se uma reta paralela ao lado BC, interceptando o lado AB no ponto F e o lado AC no ponto H. Calcule o comprimento do segmento MH, em função de m e L.

7ª Questão [Valor 1,0]: Considere um círculo com centro C, na origem, e raio 2. Esse círculo intercepta o eixo das abscissas nos pontos A e B, sendo a abscissa de A menor do que a abscissa de B. Considere P e Q, dois pontos desse círculo, com ordenadas maiores ou iguais a zero. O ângulo formado entre os segmentos CP e CQ vale $\frac{\pi}{3}$ rad. Determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção dos segmentos AP e BQ internos ao círculo.

8ª Questão [Valor 1,0]: São dadas duas matrizes A e B tais que $A.B = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$ e $B.A = \begin{bmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{bmatrix}$, com x e y reais e $x > y$. Determine:

a) os valores de x e y;

b) as matrizes A e B que satisfazem as equações apresentadas.

9ª Questão [Valor 1,0]: Considere um tetraedro regular $ABCD$ e um plano π, oblíquo à base ABC. As arestas DA, DB e DC, desse tetraedro são seccionadas, por este plano, nos pontos E, F e G, respectivamente. O ponto T é a interseção da altura do tetraedro, correspondente ao vértice D, com o plano π. Determine o valor de DT sabendo que $\dfrac{1}{DE} + \dfrac{1}{DF} + \dfrac{1}{DG} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

10ª Questão [Valor 1,0]: Considere a seguinte definição: "**dois pontos P e Q, de coordenadas (x_p, y_p) e (x_q, y_q), respectivamente, possuem coordenadas em comum se e somente se $x_p = x_q$ e $y_p = y_q$.**" Dado o conjunto $S = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$, determine quantas funções bijetoras $f : S \to S$ existem, tais que para todos os pontos P e Q pertencentes ao conjunto S, $f(P)$ e $f(Q)$ possuem coordenadas em comum se e somente se P e Q possuem coordenadas em comum.

1.6 Vestibular 2011/2012

1.6.1 Prova Objetiva

1ª Questão [Valor 0,25]: As dimensões dos lados de um paralelepípedo reto retângulo, em metros, valem a, b e c. Sabe-se que a, b e c são raízes da equação $6x^3 - 5x^2 + 2x - 3 = 0$. Determine, em metros, o comprimento da diagonal deste paralelepípedo.

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) 1

2ª Questão [Valor 0,25]: São dadas as matrizes quadradas inversíveis A, B e C, de ordem 3. Sabe-se que o determinante de C vale $(4-x)$, onde x é um número real, o determinante da matriz inversa de B vale $-\frac{1}{3}$ e que $(CA^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = P^{-1}BP$, onde P é uma matriz inversível. Sabendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, determine os possíveis valores de x.
Obs: $(M)^{\mathrm{t}}$ é a matriz transposta de M.

(A) -1 e 3 (B) 1 e -3 (C) 2 e 3 (D) 1 e 3 (E) -2 e -3

3ª Questão [Valor 0,25]: São dados os pontos P_0 e P_1 distantes 1 cm entre si. A partir destes dois pontos são obtidos os demais pontos P_n, para todo n inteiro maior do que um, de forma que:

- o segmento $P_nP_{(n-1)}$ é 1 cm maior do que o segmento $P_{(n-1)}P_{(n-2)}$; e
- o segmento $P_nP_{(n-1)}$ é perpendicular a $P_0P_{(n-1)}$.

Determine o comprimento do segmento P_0P_{24}.

(A) 48 (B) 60 (C) 70 (D) 80 (E) 90

4ª Questão [Valor 0,25]: Seja $\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen} y + \operatorname{arcsen} z = \frac{3\pi}{2}$, onde x, y e z são números reais pertencentes ao intervalo $[-1, 1]$. Determine o valor de $x^{100} + y^{100} + z^{100} - \dfrac{9}{x^{101} + y^{101} + z^{101}}$.

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

5ª Questão [Valor 0,25]: Em um aeroporto existem 12 vagas numeradas de 1 a 12, conforme a figura. Um piloto estacionou sua aeronave em uma vaga que não se encontrava nas extremidades, isto é, distinta da vaga 1 e da vaga 12. Após estacionar, o piloto observou que exatamente 8 das 12 vagas estavam ocupadas, incluindo a vaga na qual sua aeronave estacionou. Determine a probabilidade de que ambas as vagas vizinhas a sua aeronave estejam vazias.

1	2	3	...	10	11	12

(A) $\frac{1}{55}$ (B) $\frac{2}{55}$ (C) $\frac{3}{55}$ (D) $\frac{4}{55}$ (E) $\frac{6}{55}$

6ª Questão [Valor 0,25]: As raízes cúbicas da unidade, no conjunto dos números complexos, são representadas por 1, w e w^2, onde w é um número complexo. O intervalo que contém o valor de $(1-w)^6$ é:

(A) $(-\infty, -30]$ (B) $(-30, -10]$ (C) $(-10, 10]$ (D) $(10, 30]$ (E) $(30, \infty)$

7ª Questão [Valor 0,25]: Uma pirâmide regular possui como base um dodecágono de aresta a. As fazes laterais fazem um ângulo de 15° com o plano da base. Determine o volume desta pirâmide em função de a.

(A) $\dfrac{a^3}{2}\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

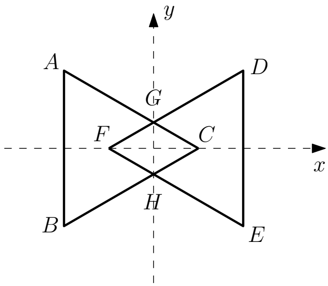
(B) $\dfrac{a^3}{2}\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

(C) $a^3\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

(D) $a^3\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

(E) $a^3\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{3}+2}}$

8ª Questão [Valor 0,25]: Os triângulos ABC e DEF são equiláteros com lados iguais a m. A área da figura $FHCG$ é igual à metade da área da figura $ABHFG$. Determine a equação da elipse de centro na origem e eixos formados pelos segmentos FC e GH.



(A) $48x^2 + 36y^2 - \sqrt{2}m^2 = 0$
(B) $8x^2 + 16y^2 - \sqrt{3}m^2 = 0$
(C) $16x^2 + 48y^2 - 3m^2 = 0$
(D) $8x^2 + 24y^2 - m^2 = 0$
(E) $16x^2 - 24y^2 - m^2 = 0$

9ª Questão [Valor 0,25]: O valor de $y = \operatorname{sen} 70^{\circ} \cos 50^{\circ} + \operatorname{sen} 260^{\circ} \cos 280^{\circ}$ é:

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

10ª Questão [Valor 0,25]: A equação da reta tangente à curva de equação $x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ no ponto $P(8, 3)$ é:

(A) $2x + 3y - 25 = 0$
(B) $x + y - 11 = 0$
(C) $3x - 2y - 18 = 0$
(D) $x + 2y - 14 = 0$
(E) $3x + 2y - 30 = 0$

11ª Questão [Valor 0,25]: Considere o polinômio $5x^3 - 3x^2 - 60x + 36 = 0$. Sabendo que ele admite uma solução da forma $\sqrt{n}$, onde n é um número natural, pode se afirmar que:

(A) $1 \leq n < 5$
(B) $6 \leq n < 10$
(C) $10 \leq n < 15$
(D) $15 \leq n < 20$
(E) $20 \leq n < 30$

12ª Questão [Valor 0,25]: Se $\log_{10} 2 = x$ e $\log_{10} 3 = y$, então $\log_5 18$ vale:

(A) $\dfrac{x+2y}{1-x}$ (B) $\dfrac{x+y}{1-x}$ (C) $\dfrac{2x+y}{1+x}$ (D) $\dfrac{x+2y}{1+x}$ (E) $\dfrac{3x+2y}{1-x}$

13ª Questão [Valor 0,25]: Sejam a, b e c números reais e distintos. Ao simplificar a função real, de variável real,

$$f(x) = a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},$$

obtém-se $f(x)$ igual a:

(A) $x^2 - (a+b+c)x + abc$
(B) $x^2 + x - abc$
(C) x^2
(D) $-x^2$
(E) $x^2 - x + abc$

14ª Questão [Valor 0,25]: Um curso oferece as disciplinas A, B, C e D. Foram feitas as matrículas dos alunos da seguinte forma:

- 6 alunos se matricularam na disciplina A;
- 5 alunos se matricularam na disciplina B;
- 5 alunos se matricularam na disciplina C; e
- 4 alunos se matricularam na disciplina D.

Sabe-se que cada aluno se matriculou em, no mínimo, 3 disciplinas. Determine a quantidade mínima de alunos que se matricularam nas 4 disciplinas.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

15ª Questão [Valor 0,25]: Seja F o conjunto cujos elementos são os valores de $n!$, onde n é um número natural. Se G é subconjunto de F que **não contém** elementos que são múltiplos de 27.209, determine o número de elementos do conjunto G.

(A) 6 (B) 12 (C) 15 (D) 22 (E) 25

1.6.2 Prova de Matemática

1ª Questão [Valor 1,0]: O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma Progressão Aritmética (PA) de números inteiros, de razão r, formam, nesta ordem, uma Progressão Geométrica (PG), de razão q, com q e $r \in \mathbb{N}^*$ (natural diferente de zero). Determine:

a) O menor valor possível para a razão r.

b) O valor do décimo oitavo termo da PA, para a condição do item (a).

2ª Questão [Valor 1,0]: Os números reais positivos x_1, x_2 e x_3 são raízes da equação $x^3 - ax^2 = a^b - \frac{b}{2}x$, sendo $b \in \mathbb{N}$ (natural), $a \in \mathbb{R}$ (real) e $a \neq 1$. Determine, em função de a e b, o valor de $\log_a \left[x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)^{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \right]^b$.

3ª Questão [Valor 1,0]: Os ângulos de um triângulo obtusângulo são 105°, α e β. Sabendo que $m \in \mathbb{R}$ (real), determine:

a) As raízes da equação $3\sec x + m(\sqrt{3}\cos x - 3\,\mathrm{sen}\,x) = 3\cos x + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x$, em função de m.

b) O valor de m para que α e β sejam raízes dessa equação.

4ª Questão [Valor 1,0]: Seja o número complexo $Z = a + bi$, com a e $b \in \mathbb{R}$ (real) e $i = \sqrt{-1}$. Determine o módulo de Z sabendo que $\begin{cases} a^3 = 3\left(1 + ab^2\right) \\ b^3 = 3\left(a^2b - 1\right) \end{cases}$.

5ª Questão [Valor 1,0]: Uma pirâmide regular triangular apresenta um volume V. Determine o raio da circunferência circunscrita a uma das faces laterais da pirâmide em função de V, sabendo que o ângulo do vértice vale 30°.

6ª Questão [Valor 1,0]: É dada uma parábola de parâmetro p. Traça-se a corda focal MN, que possui uma inclinação de 60° em relação ao eixo de simetria da parábola. A projeção do ponto M sobre a diretriz é o ponto Q, e o prolongamento da corda MN intercepta a diretriz no ponto R. Determine o perímetro do triângulo MQR em função de p, sabendo que N encontra-se no interior do segmento MR.

7ª Questão [Valor 1,0]: Sejam r e $s \in \mathbb{Z}$ (inteiro). Prove que $(2r + 3s)$ é múltiplo de 17 se e somente se $(9r + 5s)$ é múltiplo de 17.

8ª Questão [Valor 1,0]: Calcule as raízes de $f(x)$ em função de a, b e c, sendo a, b, c e $x \in \mathbb{R}$ (real) e $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$.

9ª Questão [Valor 1,0]: Considere uma reta r que passa pelo ponto $P(2, 3)$. A reta r intercepta a curva $x^2 - 2xy - y^2 = 0$ nos pontos A e B. Determine:

a) O lugar geométrico definido pela curva.

b) A(s) possível(is) equação(ões) da reta r, sabendo que $\overline{PA}.\overline{PB} = 17$.

10ª Questão [Valor 1,0]: Os nove elementos de uma matriz M quadrada de ordem 3 são preenchidos aleatoriamente com os números 1 ou -1, com a mesma probabilidade de ocorrência. Determine:

a) O maior valor possível para o determinante de M.

b) A probabilidade de que o determinante de M tenha este valor máximo.

1.7 Vestibular 1977 - 2^o Concurso

1.7.1 Álgebra

1ª Questão [Valor 0,5]: Determine o termo independente de x no desenvolvimento de

$$\left(3x - \frac{5}{x^3}\right)^8$$

2ª Questão [Valor 0,5]: Quatro rapazes e três moças formam uma comissão de três pessoas. De quantas maneiras pode ser formada a comissão de forma a conter pelo menos uma moça?

3ª Questão [Valor 1,0]: Sabe-se que:

$$\log_3(\log_{2,5}(y^3)) = 2; \;\; y \in \mathbb{R}$$

Obtenha y.

4ª Questão [Valor 1,0]: Determine o valor de m, onde $m \in \mathbb{R}^+$, para o qual as quatro raízes da equação:

$$x^4 + (3m+2)x^2 + m^2 = 0$$

estejam em progressão aritmética, cuja razão não é necessariamente real.

5ª Questão [Valor 1,0]: Sejam:

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 1; \;\; q(x) = x^2 + x$$

cujo máximo divisor comum é $d(x)$. Determine um par de polinômios $s(x)$ e $t(x)$ tal que:

$$s(x)p(x) + t(x)q(x) = d(x)$$

6ª Questão [Valor 1,0]: Sejam o conjunto A e as funções $\bigoplus$ e $\bigotimes$, onde:

$$\begin{array}{l} A = \{0,1,2,3\} \\ \bigoplus A \times A \to A; \quad (x,y) \to x \bigoplus y \\ \bigotimes A \times A \to A; \quad (x,y) \to x \bigotimes y \end{array}$$

e $\forall x, y \in A$ têm-se:

$$x \bigoplus y = y \bigoplus x$$

$$x \bigotimes y = y \bigotimes x$$

e

$$\begin{array}{ll} \bigoplus: & (0,0) \to 0 \\ & (0,1) \to 1 \\ & (0,2) \to 2 \\ & (0,3) \to 3 \\ & (1,1) \to 2 \\ & (1,2) \to 3 \\ & (1,3) \to 0 \\ & (2,2) \to 0 \\ & (2,3) \to 1 \\ & (3,3) \to 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \bigotimes: & (0,0) \to 0 \\ & (0,1) \to 0 \\ & (0,2) \to 0 \\ & (0,3) \to 0 \\ & (1,1) \to 1 \\ & (1,2) \to 2 \\ & (1,3) \to 3 \\ & (2,2) \to 0 \\ & (2,3) \to 2 \\ & (3,3) \to 1 \end{array}$$

Definem-se os símbolos, $\forall y \in A$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$:

$$y^1 = y; \quad y^n = y \bigotimes y^{n-1}$$

$$1y = y; \quad ny = y \bigoplus (n-1)y$$

Pedem-se:

a) Calcule $1^2 \bigoplus 2^3$.
b) Calcule $3^4 \bigotimes 2^2$.
c) Verifique se $4x = 0$, $\forall x \in A$.

7ª Questão [Valor 1,0]: Achar a condição entre $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, de modo que a soma de duas raízes da equação abaixo seja igual à soma das outras duas

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0.$$

8ª Questão [Valor 1,0]: Seja a função $\mu : \mathbb{N}^* \to \{0, 1, -1\}$ definida como:

$\mu(1) = 1$
$\mu(n) = 0$, se n é divisível pelo quadrado de um número natural maior que 1.
$\mu(n) = (-1)^r$, se n é o produto de r primos distintos.

Calcule

$$\mu(\mu(15)) + \mu(32) - \mu(30)$$

Obs: O número 1 não é um número primo.

9ª Questão [Valor 1,0]: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as propriedades:

i) $f(0) = 1$.

ii) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Verifique se -1 e 0 pertencem ao conjunto imagem desta função. Justifique sua resposta.

10ª Questão [Valor 1,0]: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que:

i) Ela é contínua em $[a, b]$.

ii) Ela é derivável em $]a, b[$.

iii) $f(a) = f(b)$.

Sabe-se que sob estas condições $\exists C \in \ ]a, b[$ tal que $f'(C) = 0$. Para a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$g : x \to x^m(1 - x)^n; \quad m, n \in \mathbb{N}^*,$$

verifique a proposição acima, calculando os valores de C que a satisfazem.

11ª Questão [Valor 1,0]: Enumere os elementos do conjunto X, $X \subset A$, sendo que

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 88x + 70y + 15 = 0\right\}$$

e sabendo que os elementos de X equidistam dos elementos de B e C, onde

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 17x + y - 35 = 0\right\}$$
$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 13x + 11y + 50 = 0\right\}$$

1.7.2 Geometria

1ª Questão [Valor 1,0]: Em um plano são dados três círculos tangentes entre si, dois a dois, externamente. Seus centros formam um triângulo ABC pseudo-retângulo (isto é, a diferença de dois de seus ângulos é 90^o): $AB = 100$; $\hat{A} = 30^o$. Calcule a área do triângulo curvilíneo determinado por esses círculos, pelos menores arcos entre cada dois pontos de tangência.

2ª Questão [Valor 1,5]: Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{arc\,sen}\sqrt{xy} - \operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-xy} = \dfrac{\pi}{6} \\ \operatorname{arc\,tg} 2x + \operatorname{arc\,tg} 2y = \operatorname{arc\,tg} 2 \end{cases}$$

Obs: Os senos e cossenos têm o mesmo sinal.

3ª Questão [Valor 1,5]: Um plano π faz um ângulo de 30^o com um plano horizontal α, e a reta r é a interseção entre esses dois planos. Seja A um ponto de r e $ABCD$ um quadrado de lado a e centro O contido em π, cuja diagonal BD é paralela a r.

a) Indique a natureza da projeção ortogonal de $ABCD$ sobre α, calcule o comprimento dos lados e a área dessa projeção.

b) Determine um ponto I do plano α equidistante dos vértices A, B, C e D, calculando também a distância de I ao ponto A.

4ª Questão [Valor 1,5]: Em um círculo C de raio r, marcam-se no mesmo sentido as cordas AB, BC e CD respectivamente iguais aos lados do hexágono regular, quadrado e triângulo equilátero inscritos em C.

a) Indique a natureza do quadrilátero $ABCD$.

b) Calcule a área $ABCD$.

c) Calcule os comprimentos dos segmentos determinados sobre as diagonais pelo ponto P, interseção das mesmas.

d) Calcule os comprimentos das diagonais AC e BD.

e) Indique a natureza do polígono regular inscrito no círculo C, de lado igual à diagonal AC.

5ª Questão [Valor 1,5]: Uma superfície cilíndrica Σ de revolução tem raio r.

a) Considera-se um cilindro γ reto de altura h, obtido cortando-se Σ por dois planos. Calcule h em função de r, sabendo-se que existe um octaedro regular que tem seus vértices sobre a superfície lateral de γ e nos centros das bases de γ.

b) Corta-se Σ por um plano π tal que a área da seção seja o dobro da área da seção reta de Σ. Calcule o ângulo de π com o eixo de Σ, e a distância entre os centros das esferas inscritas em Σ e tangentes a π.

6ª Questão [Valor 1,5]: Em um triângulo ABC, D e D' são os pés das bissetrizes interna e externa do ângulo $\hat{A}$, sobre o lado BC.

a) Dados D e D' bem como a medida do ângulo $\hat{A}$, qual o lugar geométrico do ponto A? Mostre que os lados AB e AC passam por dois pontos fixos I e J que devem ser identificados.

b) Dados $AB = \beta_a$, $AD' = \beta_a'$ e $\hat{A}$, calcule $\hat{B}$, $\hat{C}$ e os lados a, b e c em função dos elementos dados.

Obs: Para simplificar os resultados pede-se usar o ângulo auxiliar $\hat{U}$ definido por $\beta_a' = \beta_a \operatorname{tg} \hat{U}$.

7ª Questão [Valor 1,5]: Em uma parábola, a distância do foco F à diretriz d é p. Considera-se uma corda MM' normal em M à parábola, tal que o ângulo $M\hat{F}M'$ seja reto. Calcule FM e FM' em função exclusivamente de p.

1.8 Vestibular 1975/1976

1.8.1 Prova de Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,25]: Considere um conjunto E e três de seus sub-conjuntos A, B e C. Sendo M um sub-conjunto de E, represente por M_E o seu complemento em relação a E. Determine E e os sub-conjuntos A, B e C, sabendo que A e C são disjuntos e que:

$$\begin{array}{rll} (A \cup B \cup C)_E & = \{4,6\} & \ldots\ (1) \\ B \cap C & = \{7\} & \ldots\ (2) \\ A \cup B & = \{1,2,7,9,10\} & \ldots\ (3) \\ A \cup C & = \{1,2,3,5,7,8,9,10\} & \ldots\ (4) \\ B_E & = \{3,4,5,6,8,9\} & \ldots\ (5) \end{array}$$

2ª Questão [Valor: 1,25]: As partes real e imaginária de um ponto $z = x+yi$ do plano complexo são representadas, respectivamente, por: $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$. Dados dois pontos do plano complexo, $z_1 = 2+3i$ e $z_2 = 4+5i$, determine e esboce o lugar geométrico dos pontos do plano complexo que satisfazem a relação:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = 0,$$

com $z \neq z_2$.

3ª Questão [Valor: 1,25]: Sendo

$$A = \left(\frac{1^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n,$$

calcule, caso exista, $\lim\limits_{n\to\infty} A$.

4ª Questão, Item A [Valor: 0,5]: É dada a cônica (k), cuja equação é $y^2 = 6x$. Seja (c) uma circunferência com raio igual a $3\sqrt{3}$ e tangente a (k) em dois pontos distintos A e B. Determine o centro de (c) e as distâncias do vértice de (k) aos pontos A e B.

4ª Questão, Item B [Valor: 0,75]: É dada a cônica (k), cuja equação é $y^2 = 6x$. Considere uma família de circunferências tangentes a (k), sabendo que cada circunferência desta família é tangente a (k) em dois pontos reais e distintos. Determine o lugar geométrico dos centros das circunferências desta família.

5ª Questão [Valor: 1,25]: Suponha que r_1, r_2 e r_3 são as raízes da equação $x^3 + mx + n = 0$. Os coeficientes m e n são reais, sendo $n > m$. Sabendo que

$$\frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{1+r_2} + \frac{1}{1+r_3} = 1$$

e que $r_1 = r_2.r_3$, determine m, n, r_1, r_2 e r_3.
Obs: r_1 é igual ao produto de r_2 e r_3.

6ª Questão [Valor: 1,25]: Dada a curva, representada pela equação

$$y = \frac{7x^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3},$$

determine os seus pontos de máximo e de mínimo, suas assíntotas, seus pontos pertencentes ao eixo $x'x$ e esboce o gráfico da curva.
Obs: O sistema de eixos $x'x$ e $y'y$ é cartesiano ortogonal.

7ª Questão [Valor: 1,25]: Considere um polinômio $P(x)$, do sétimo grau. Sabendo que $(P(x) + 1)$ é divisível por $(x - 1)^4$ e que $(P(x) - 1)$ é divisível por $(x + 1)^4$, determine $P(x)$.

8ª Questão [Valor: 1,25]: Considere uma turma de n alunos, numerados de 1 a n. Deseja-se organizar uma comissão de 3 alunos. De quantas maneiras pode ser formada esta comissão, de modo que não façam parte da mesma dois ou três alunos designados por números consecutivos?

1.9 Vestibular 1942/1943

1.9.1 Prova de Matemática

1ª Questão: Resolver a equação $x^2 - 2x + 2 = 0$ e representar graficamente as raízes.

2ª Questão: Transformar a equação $x^3 - 2x^2 + 7x - 4 = 0$, em uma outra, cujas raízes sejam iguais às suas, aumentadas de uma unidade.

3ª Questão: Responder aos quesitos:

a) $\operatorname{tg} x = 1{,}732$; determinar $\cos x$.
b) $\cos 2x = 0{,}866$; determinar $\operatorname{sen} x$.
c) Num triângulo escaleno $\operatorname{sen}(\hat{B} + \hat{C}) = 0{,}647$; $\overline{BC} = 1$; $\operatorname{sen} \hat{B} = 0{,}253$; calcular $\overline{AC}$.

4ª Questão: Sendo dado o número complexo sob representação trigonométrica: $3(\cos 25^\circ - i \operatorname{sen} 25^\circ)$, dizer qual o módulo e qual o argumento de seu cubo.

5ª Questão: Dado $\operatorname{sen} x = 0{,}225$, determinar $\operatorname{sen} 3x$.

6ª Questão: Tornar calculável por logaritmos a expressão: $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y}$.

1.10 Vestibular 1937/1938

1.10.1 Prova de Matemática

1ª Questão: Derivar a expressão:

$$Y = \operatorname{arc\,sen} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

2ª Questão: Dadas as retas:

$$\begin{array}{l} 3x - 3y + 11 = 0 \\ 3x + y - 11 = 0 \\ x + 4y = 0 \end{array} \quad ,$$

determinar as medianas do triângulo, o centro de gravidade, e obter a menor das medianas em coordenadas polares.