A Matemática no Vestibular do IME

Material Complementar 3: Soluções Adicionais

sergioℓn@smt.ufrj.br

Esse material disponibiliza soluções adicionais não incluídas no livro original. Em particular, as soluções aqui incluídas são:

- 2016/2017: Provas Objetiva e Discursiva.
- 2015/2016: Provas Objetiva e Discursiva.
- 2014/2015: Provas Objetiva e Discursiva.
- 2013/2014: Provas Objetiva e Discursiva.
- 2012/2013: Provas Objetiva e Discursiva.
- 2011/2012: Provas Objetiva e Discursiva.
- 1975/1976: Prova de Álgebra (obtida no Acervo da Fundação Biblioteca Nacional - Brasil)*.
- 1974/1975: Prova de Geometria.
- 1973/1974: Provas de Álgebra e Geometria.
- 1072/1973: Provas de Álgebra e Geometria.

1.1 Vestibular 2016/2017

1.1.1 Prova Objetiva

1ª Questão: (C) $\sqrt{2017}-\sqrt{2016}<(2\sqrt{2016})^{-1}<\sqrt{2016}-\sqrt{2015}$.
Observando que

$$\begin{cases} \sqrt{2016}-\sqrt{2015}=\frac{(\sqrt{2016}-\sqrt{2015})(\sqrt{2016}+\sqrt{2015})}{\sqrt{2016}+\sqrt{2015}}=\frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2015}} \\ \sqrt{2017}-\sqrt{2016}=\frac{(\sqrt{2017}-\sqrt{2016})(\sqrt{2017}+\sqrt{2016})}{\sqrt{2017}+\sqrt{2016}}=\frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2016}} \\ (2\sqrt{2016})^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2016}}, \end{cases}$$

de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2016}}<\frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2016}}<\frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2015}},$$

tem-se então que

$$\sqrt{2017}-\sqrt{2016}<(2\sqrt{2016})^{-1}<\sqrt{2016}-\sqrt{2015}.$$

Questão 02: (D) $6\leq k<8$.
Considerando dois casos separados:

- $x>0$: nesse caso, devemos ter $x\leq 12$ e ainda

  $$x^2-2x-14>3x\Rightarrow x^2-5x-14>0\Rightarrow (x-7)(x+2)>0\Rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ \text{ou} \\ x>7 \end{cases}.$$

  Logo, juntando todas as condições dese caso, têm-se $x=\{8,9,10,11,12\}$.

- $x<0$: nesse caso, devemos ter $x\leq 12$ e ainda

  $$x^2-2x-14<3x\Rightarrow x^2-5x-14<0\Rightarrow (x-7)(x+2)<0\Rightarrow -2<x<7.$$

  Logo, juntando todas as condições desse caso, tem-se $x=\{-1\}$.

Assim, considerando ambos os casos, há exatamente $k=(5+1)=6$ soluções inteiras.

Questão 03: (C) $|Z_1| \leq 2|Z_2|$.
Denotando $Z_1 = a + bi$ e $Z_2 = ci$, do enunciado, têm-se

$$\begin{aligned}|(a+bi) - ci| = \sqrt{a^2 + (b-c)^2} = |c| &\Rightarrow a^2 + (b-c)^2 = c^2 \\ &\Rightarrow b^2 - 2bc + a^2 = 0,\end{aligned}$$

de modo que

$$b = \frac{2c \pm \sqrt{4c^2 - 4a^2}}{2} = c \pm \sqrt{c^2 - a^2}$$

e ainda

$$|Z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2bc} = \sqrt{2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - a^2}} \leq \sqrt{2c^2 + 2c^2} = 2|c| = 2|Z_2|.$$

Questão 04: (E) $\pi/24$.
O termo T independente do binômio é dado por

$$T = \binom{10}{5} \operatorname{sen}^5 2\beta \cos^5 2\beta = \frac{252}{2^5} \operatorname{sen}^5 4\beta = \frac{63}{256}$$

de modo que devemos ter

$$\operatorname{sen}^5 4\beta = \frac{1}{32} \Rightarrow \operatorname{sen} 4\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\beta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{24}.$$

Questão 05: (B) $\frac{23}{22}$.
Da relação trigonométrica fundamental, têm-se

$$1 = (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \operatorname{sen}^4\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$$

e

$$1 = (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 = \operatorname{sen}^6\alpha + 3\operatorname{sen}^4\alpha\cos^2\alpha + 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^4\alpha + \cos^6\alpha,$$

de modo que a expressão E do enunciado é igual a

$$E = \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{1 - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \frac{1 - \frac{2}{25}}{1 - \frac{3}{25}} = \frac{23}{22}.$$

Questão 06: (D) 3.
Do enunciado,

$$\det(A-I)^2 = \det^2(A-I) = 16$$
$$\Rightarrow \det(A-I) = \begin{vmatrix} 0 & a & -2 \\ a-2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2a + 6(a-2) = \pm 4$$
$$\Rightarrow a = \frac{12 \pm 4}{8} = 1 \text{ ou } 2.$$

Questão 07: (A) $\frac{1}{3}$.

Denotando $x = y^{\frac{1}{2}\log_3 3y}$, a equação do enunciado torna-se

$$x = x^2 - 6 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = -2 \text{ ou } 3.$$

Como $y > 0$, a solução $x = -2$ é espúria, de modo que $x = y^{\frac{1}{2}\log_3 3y} = 3$ e assim, tomando o logaritmo na base 3 dessa expressão, têm-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log_3 3y\,(\log_3 y) = \log_3 3 &\Rightarrow \frac{1}{2}(1+\log_3 y)(\log_3 y) = 1 \\ &\Rightarrow \log_3^2 y + \log_3 y - 2 = 0 \\ &\Rightarrow \log_3 y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2 \text{ ou } 1. \end{aligned}$$

Logo, o produto P das raízes reais da equação do enunciado é dado por $P = 3^{-2}.3^1 = \frac{1}{3}$.

Questão 08: (B) $(1008, 1009]$.
Por uma análise gráfica, é simples perceber que o mínimo de uma função da forma $(|x-a| + |x-b|)$, com $a < b$, ocorre para todo intervalo $a \leq x \leq b$. Escrevendo $f(x)$ da forma

$$f(x) = \sqrt{|x-1009| + \sum_{i=1}^{1008}[|x-i| + |x-(i+1009)|]},$$

é simples constatar que $x = 1009$ minimiza todas as parcelas de $f(x)$, de modo que o mínimo dessa função é dado por

$$f(1009) = \sqrt{0 + 2\sum_{i=1}^{1008}(1009-i)} = \sqrt{2\frac{(1008+1)1008}{2}} = \sqrt{1009 \times 1008},$$

e assim $1008 < \min[f(x)] < 1009$.

Questão 09: (B) 235.
Da terceira equação do sistema, tem-se

$$4(xy+yz+xz) = xyz.$$

Assim,

$$(x+y+z)^2 = (x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+xz) \Rightarrow 7^2 = 25 + \frac{xyz}{2} \Rightarrow xyz = 48,$$

e ainda

$$\begin{cases} (x^2+y^2+z^2)(x+y+z) = (x^3+y^3+z^3)+(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y) \\ (x+y+z)^3 = (x^3+y^3+z^3)+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+6xyz \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^3+y^3+z^3)+(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y) = 25\times 7 = 175 \\ (x^3+y^3+z^3)+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y) = 7^3 - 6\times 48 = 55 \end{cases},$$

de modo que

$$(x^3+y^3+z^3) = \frac{175\times 3 - 55}{2} = 235.$$

Questão 10: (D) 48.
Seja a configuração padrão 123456 que satisfaz a condição do enunciado de que a soma dos números em quaisquer três triângulos consecutivos deve ser múltipla de 3. Rotacionando (de 1 a 6 vezes) e/ou trocando $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 5$ ou $3 \leftrightarrow 6$, a condição continua sendo válida. Note que fazendo 2 ou 3 dessas trocas, equivale a fazer, respectivamente, 1 ou 0 troca e rotacionar o hexágono 3 vezes. Assim, temos 6 rotações possíveis e 2^3 possibilidades de troca, totalizando $T = 6\times 2^3 = 48$ hexágonos distintos.

Questão 11: (A) 1.
Do enunciado,

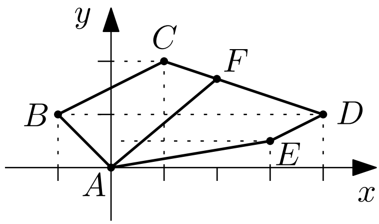
$$\begin{cases} a_1 + b_1q = 3 \\ a_1 + 3r + b_1q^2 = 26 \end{cases} \Rightarrow 3r + b_1q(q-1) = 23 \Rightarrow r = \frac{23 - b_1q(q-1)}{3}.$$

Assim, como b_1, r e q são inteiros positivos, testando para diferentes valores de $q > 2$, têm-se

- $q = 3$: $r = \frac{23-6b_1}{3}$, que permitiria $b_1 = 1, 2, 3$, que não geram solução inteira positiva para r;
- $q = 4$: $r = \frac{23-12b_1}{3}$, que permitiria $b_1 = 1$, que não gera solução inteira positiva para r;
- $q = 5$: $r = \frac{23-20b_1}{3}$, que permite a solução $b_1 = 1$ e $r = 1$;
- $q > 5$: $r \leq \frac{23-30b_1}{3}$, que não tem solução inteira positiva;

de modo que a única solução possível é tal que $b_1 = 1$;

Questão 12: (C) $\dfrac{26}{7}$.
(baseada em solução de Bruno R. L. Netto)



Na figura acima, a área do pentágono $ABCDE$ é dada por

$$\begin{aligned} S_{ABCDE} &= S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE} \\ &= \frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{array}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left(|-2-1| + |1-8| + |2-3|\right) \\ &= \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

seja $F(x_F, y_F)$, pertencente à reta CD, tal que $S_{ABCF} = \frac{S_{ABCDE}}{2}$. Assim, devemos ter $3y_F + x_F = 7$ e ainda

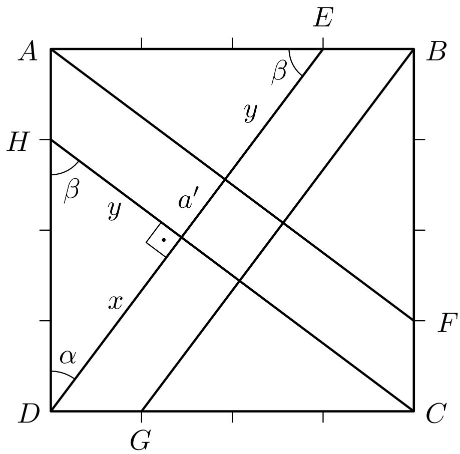
$$S_{ABCF} = S_{ABC} + S_{ACF} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x_F & y_F & 1 \end{array}\right| = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}|y_F - 2x_F| = \frac{11}{4},$$

de modo que

$$|2y_F - (28 - 12y_F)| = 5 \Rightarrow (x_F, y_F) = \left(\frac{14 \mp 15}{14}, \frac{28 \pm 5}{14}\right).$$

Como $x_F > 0$, então $(x_F + y_F) = \frac{29+23}{14} = \frac{26}{7}$.

Questão 13: (A) $\dfrac{a^2}{25}$.



Na figura acima, por rotação $A\hat{E}D = D\hat{H}C$. Logo, $A\hat{D}E + D\hat{H}C = A\hat{D}E + A\hat{E}D = 90^{\circ}$, de modo que as retas DE e HC são perpendiculares (cuja interseção denotaremos por I) e o o novo quadrilátero é de fato um quadrado. Usando a notação indicada na figura, do triângulo retângulo ΔAED, tem-se

$$DE^2 = (x + a' + y)^2 = AD^2 + AE^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{25a^2}{16}$$

$$\Rightarrow DE = x + a' + y = \frac{5a}{4}.$$

Assim, da semelhança dos triângulos retângulos ΔADE e ΔIDH, têm-se

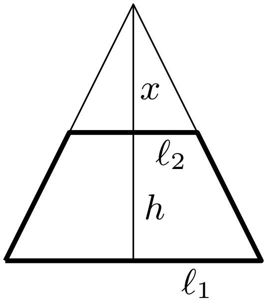
$$\begin{cases} \dfrac{AD}{DE} = \dfrac{ID}{DH} \\ \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{ID}{IH} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\frac{5a}{4}} = \dfrac{x}{\frac{3a}{4}} \\ \dfrac{a}{\frac{3a}{4}} = \dfrac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3a}{5} \\ y = \frac{3x}{4} = \frac{9a}{20} \end{cases},$$

de modo que

$$a' = \frac{5a}{4} - x - y = \frac{5a}{4} - \frac{3a}{5} - \frac{9a}{20} = \frac{a}{5},$$

e a área do quadrado formado mede $S = a'^2 = \frac{a^2}{25}$.

Questão 14: (E) $42\sqrt{3}$ cm^3.



Sejam ℓ_1 e ℓ_2 os lados das bases hexagonais do tronco de pirâmide, de modo que, do enunciado

$$\begin{cases} 6\ell_1 + 6\ell_2 = 36 \\ 6\frac{\ell_1^2\sqrt{3}}{4} + 6\frac{\ell_2^2\sqrt{3}}{4} = 30\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_1 + \ell_2 = 6 \\ \ell_1^2 + \ell_2^2 = 20 \end{cases}.$$

Logo, elevando a primeira equação acima ao quadrado, têm-se

$$\begin{aligned} \ell_1^2 + 2\ell_1\ell_2 + \ell_2^2 = 36 &\Rightarrow 2\ell_1\ell_2 = 16 \\ &\Rightarrow \ell_1 + \frac{8}{\ell_1} = 6 \\ &\Rightarrow \ell_1^2 - 6\ell_1 + 8 = 0 \\ &\Rightarrow \ell_1 = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = 3 \pm 1 \\ &\Rightarrow \ell_1 = 4 \text{ e } \ell_2 = 2. \end{aligned}$$

Além disto, na figura acima, tem-se

$$\frac{x}{\ell_2} = \frac{x+h}{\ell_1} \Rightarrow x = \frac{h\ell_2}{\ell_1 - \ell_2},$$

de modo que o volume V do tronco é dado por

$$V = \frac{\frac{6\ell_1^2\sqrt{3}}{4}(h+x)}{3} - \frac{\frac{6\ell_2^2\sqrt{3}}{4}x}{3} = \frac{h\sqrt{3}(\ell_1^3 - \ell_2^3)}{2(\ell_1 - \ell_2)} = \frac{3\sqrt{3}(64-8)}{4} = 42\sqrt{3}\text{ cm}^3.$$

Questão 15: (E) 29.

Sejam r_1, r_2 e r_3 as três raízes distintas de $P(x)$, com r_1 e r_2 divisoras de 80. Das relações de Girard, têm-se

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = b \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 80 \\ r_1r_2r_3 = c \end{cases},$$

de modo que

$$r_3 = \frac{80 - r_1r_2}{r_1 + r_2},$$

com $r_1, r_2 \in \{80, 40, 20, 16, 10, 8, 5, 4, 2, 1\}$. Testando para todos possíveis valores do par (r_1, r_2), as únicas soluções inteiras positivas para r_3 são

$$(r_1, r_2) = \begin{cases} (10,5) \\ (10,2) \\ (8,4) \\ (8,1) \\ (5,2) \\ (4,2) \\ (2,1) \end{cases} \Rightarrow r_3 = \begin{cases} \frac{80-50}{15} = 2 \\ \frac{80-20}{12} = 5 \\ \frac{80-32}{12} = 4 \\ \frac{80-8}{9} = 8 \\ \frac{80-10}{7} = 10 \\ \frac{80-8}{6} = 12 \\ \frac{80-2}{3} = 26 \end{cases}.$$

Como as raízes são distintas, então, desconsiderando a ordem das raízes, temos apenas as possibilidades

$$(r_1, r_2, r_3, c) = (r_1, r_2, r_3, r_1r_2r_3) = \begin{cases} (10, 5, 2, 100) \\ (4, 2, 12, 96) \\ (2, 1, 26, 52) \end{cases}.$$

Calculando o produto dos divisores positivos menores do que c para cada possível valor de c, têm-se

$$\begin{cases} 100 : 50 \times 25 \times 20 \times 10 \times 5 \times 4 \times 2 = 10 \times 100^3 \\ 96 : 48 \times 32 \times 24 \times 16 \times 12 \times 8 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 = 96^5 \\ 52 : 26 \times 13 \times 4 \times 2 = 52^2 \end{cases}.$$

Logo, $c = 52$ e assim $b = (r_1 + r_2 + r_3) = 29$.

1.1.2 Prova de Matemática

1ª Questão [Valor 1,0]: Para $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ simétrica, do enunciado, tem-se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a^2+b^2) & (ab+bc) \\ (ab+bc) & (b^2+c^2) \end{pmatrix} = f(M) = \begin{pmatrix} b & a \\ c & b \end{pmatrix},$$

de modo que devemos ter

$$\begin{cases} a^2+b^2 = b^2+c^2 = b \\ b(a+c) = a = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2-b+a^2 = 0 \\ a(2b-1) = 0 \end{cases}.$$

Analisando os dois casos da segunda equação separadamente, têm-se

- $a = 0$: logo, $c = a = 0$ e ainda, da primeira equação, $b = 0$ ou $b = 1$;
- $b = \frac{1}{2}$: logo, da primeira equação, $a^2 = \frac{1}{4}$, e assim $a = c = \pm\frac{1}{2}$.

Com isto, as possíveis matrizes M simétricas são:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2ª Questão [Valor 1,0]: Desenvolvendo a inequação, tem-se

$$3|x| > 2|1-\sqrt{3x+1}|.$$

Considerando quatro casos distintos:

- Caso 1:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-\sqrt{3x+1} \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \\ 3x > 2(1-\sqrt{3x+1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \\ x \geq -\frac{1}{3} \\ 3x > 2(1-\sqrt{3x+1}) \end{cases},$$

  que não possui solução real.

- Caso 2:

$$\begin{cases} x < 0 \\ 1-\sqrt{3x+1} \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \\ -3x > 2(1-\sqrt{3x+1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \leq 0 \\ x \geq -\frac{1}{3} \\ 2\sqrt{3x+1} > 3x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x < 0 \\ 9x^2 < 0 \end{cases},$$

  que também não possui solução real.

- Caso 3:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-\sqrt{3x+1} < 0 \\ 3x+1 \geq 0 \\ 3x > -2(1-\sqrt{3x+1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \\ x \geq -\frac{1}{3} \\ 3x+2 > 2\sqrt{3x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 9x^2 > 0 \end{cases},$$

  cuja solução é $x > 0$.

- Caso 4:

$$\begin{cases} x < 0 \\ 1-\sqrt{3x+1} < 0 \\ 3x+1 \geq 0 \\ -3x > -2(1-\sqrt{3x+1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 0 \\ x \geq -\frac{1}{3} \\ 2\sqrt{3x+1} > 3x+2 \end{cases},$$

  que também não possui solução real.

Assim, juntando os 4 casos, a inequeção é satisfeita para todo $x > 0$.

3ª Questão [Valor 1,0]: Fazendo a mudança da base $\sqrt{3}$ para a base 3 de um logaritmo, tem-se

$$\log_{\sqrt{3}} Z = \frac{\log_3 Z}{\log_3 \sqrt{3}} = 2\log_3 Z.$$

Assim, tirando o logaritmo na base 3 da segunda equação e denotando $X = \log_3 x$ e $Y = \log_3 y$, as equações do enunciado podem ser escritas como

$$\begin{cases} \log_3(2\log_3 x) - 2\log_3(\log_3 y) = 1 \\ \log_3 y + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{143}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 2X - 2\log_3 Y = 1 \\ Y + \frac{X}{3} = \frac{143}{2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2X}{Y^2} = 3^1 = 3 \\ 6Y + 2X = 429 \end{cases}.$$

Logo, substituindo a primeira equação na segunda, tem-se

$$3Y^2 + 6Y - 429 = 0 \Rightarrow Y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 5148}}{6} = \frac{-6 \pm 72}{6} = -13 \text{ ou } 11.$$

Como $Y \geq 0$, para que o termo $\log_{\sqrt{3}} \log_3 y = \log_{\sqrt{3}} Y$ seja definido, então $Y = 11$ e assim

$$X = \frac{3Y^2}{2} = \frac{363}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3^X = 3^{\frac{363}{2}} \\ y = 3^Y = 3^{11} \end{cases}.$$

4ª Questão [Valor 1,0]: Calculando o determinante Δ da matriz característica do sistema, tem-se

$$\begin{aligned}\Delta &= (m-2)m(m+1) + 8m - 4(m+1) + 2m^2 - 4(m+1)(m-2) - 4(m+1)\\ &= m^3 - m^2 - 2m + 8m - 4m - 4 + 2m^2 - 4m^2 + 4m + 8 - 4m - 4\\ &= m^3 - 3m^2 + 2m\\ &= m(m-1)(m-2),\end{aligned}$$

de modo que o sistema é determinado para $m \neq \{0, 1, 2\}$. Considerando os demais casos separadamente, têm-se:

- $m = 0$:

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 2z = 2 \\ 2y + z = 3 \end{cases}.$$

  Logo, substituindo as segunda e terceira equações na primeira,

$$-(2 - 2z) + (3 - z) - z = -2 + 2z + 3 - z - z = 1,$$

  de modo que o sistema é indeterminado para $m = 0$.

- $m = 1$:

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 4 \end{cases}.$$

  Multiplicando a primeira equação por 2 e adicionando o resultado à segunda equação, tem-se $y = \frac{7}{5}$. Subtraindo a segunda equação da terceira, tem-se $y = \frac{1}{3}$, de modo que o sistema é impossível para $m = 1$.

- $m = 2$:

$$\begin{cases} 2y - z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 4x + 6y + 3z = 11 \end{cases}.$$

  Multiplicando a segunda equação por 2 e subtraindo o resultado da terceira equação, tem-se $2y - z = -1$, que é incompatível com a primeira equação, de modo que o sistema é impossível para $m = 2$.

5ª Questão [Valor 1,0]: Do enunciado,

$$a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 + 47 + ci = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^3 - 3ab^2 + 47 = 0 \\ 3a^2b - b^3 + c = 0 \end{array} \right. ,$$

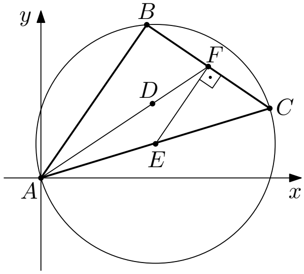
de modo que

$$(a^3 + 47)b = 3ab^3 = 3a(3a^2b + c) = 9a^3b + 3ac \Rightarrow 3ac = (47 - 8a^3)b.$$

Como a, b e c são inteiros positivos, então $(47 - 8a^3)$ deve ser inteiro positivo, e assim $a = 1$, de modo que o sistema acima é tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 3b^2 + 47 = 0 \\ 3b - b^3 + c = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b^2 = 16 \\ c = b^3 - 3b \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 4 \\ c = 4^3 - 12 = 52 \end{array} \right. .$$

6ª Questão [Valor 1,0]:



a) A equação da circunferência circunscrita C_1 é dada por

$$\left(x - \frac{55}{18}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{6}\right)^2 = AE^2 = \frac{55^2 + 15^2}{18^2},$$

que equivale a

$$(18x - 55)^2 + (18y - 15)^2 = 3250.$$

b) Seja F o ponto médio de BC tal que

$$F = \frac{B + C}{2} = \frac{A + B + C}{2} = \frac{3D}{2} = (\frac{9}{2}, 3).$$

Note que F pertence à reta suporte de AD, com D entre A e F e tal que $AF = \frac{3}{2}AD$. Além disto, a reta suporte de EF é mediatriz de BC, de modo que os vértices desejados B e C são as interseções da circunferência C_1 com a reta perpendicular a EF por F.

A reta suporte de EF é da forma $y = \frac{3}{2}x + \beta$, de modo que sua perpendicular por F é descrita por $y = -\frac{2}{3}x + 6$. Substituindo esta relação na equação de C_1 (item (a)), têm-se

$$\begin{aligned}
& (18x - 55)^2 + [18(-\frac{2}{3}x + 6) - 15]^2 = 3250 \\
\Rightarrow\ & (18x - 55)^2 + (-12x + 93)^2 = 3250 \\
\Rightarrow\ & 324x^2 - 1980x + 3025 + 144x^2 - 2232x + 8649 = 3250 \\
\Rightarrow\ & 468(x^2 - 9x + 18) = 0 \\
\Rightarrow\ & x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 18}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} = 3 \text{ ou } 6,
\end{aligned}$$

e assim $B \equiv (3, 4)$ e $C \equiv (6, 2)$ ou vice-versa.

7ª Questão [Valor 1,0]: Da equação do enunciado, tem-se

$$\cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y = -\cos y \operatorname{sen} y.$$

Considerando que

$$\begin{aligned}
\cos 3y &= \cos(2y + y) \\
&= \cos 2y \cos y - \operatorname{sen} 2y \operatorname{sen} y \\
&= (2\cos^2 y - 1)\cos y - (2 \operatorname{sen} y \cos y)\operatorname{sen} y \\
&= 2\cos^3 y - \cos y - 2(1 - \cos^2 y)\cos y \\
&= 4\cos^3 y - 3\cos y
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 3y &= \operatorname{sen}(2y + y) \\
&= \operatorname{sen} 2y \cos y + \operatorname{sen} y \cos 2y \\
&= (2\operatorname{sen} y \cos y)\cos y + \operatorname{sen} y(1 - 2\operatorname{sen}^2 y) \\
&= 2\operatorname{sen} y(1 - \operatorname{sen}^2 y) + \operatorname{sen} y - 2\operatorname{sen}^3 y \\
&= 3\operatorname{sen} y - 4\operatorname{sen}^3 y,
\end{aligned}$$

o valor de S é tal que

$$\begin{aligned}
S &= 4\left(\frac{\cos^3 y}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}^3 y}{\operatorname{sen} x}\right) \\
&= \frac{4}{\cos x \operatorname{sen} x}(\cos^3 y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^3 y \cos x) \\
&= \frac{4}{\cos x \operatorname{sen} x}[(1 - \operatorname{sen}^2 y)\cos y \operatorname{sen} x + (1 - \cos^2 y)\operatorname{sen} y \cos x] \\
&= \frac{4}{\cos x \operatorname{sen} x}[(\cos y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y \cos x) - \operatorname{sen} y \cos y(\operatorname{sen} y \operatorname{sen} x + \cos y \cos x)].
\end{aligned}$$

Usando a relação do enunciado duas vezes na expressão acima, têm-se

$$\begin{aligned}
S &= \frac{4}{\cos x \operatorname{sen} x}[-\operatorname{sen} y \cos y + (\cos y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y \cos x)(\operatorname{sen} y \operatorname{sen} x + \cos y \cos x)] \\
&= \frac{4}{\cos x \operatorname{sen} x}[-\operatorname{sen} y \cos y + \cos y \operatorname{sen} y\,(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + (\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y)\operatorname{sen} x \cos x] \\
&= \frac{4}{\cos x \operatorname{sen} x}(-\operatorname{sen} y \cos y + \cos y \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos x) \\
&= \frac{4}{\cos x \operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x \cos x) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

8ª Questão [Valor 1,0]:

a) Há dois casos distintos com conjunto imagem de exatamente dois elementos: (i) Três elementos de A são mapeados para um mesmo elemento I_1 e o outro elemento de A é mapeado para outro elemento $I_2 \neq I_1$; (ii) Dois elementos de A são mapeados para um mesmo elemento I_1 e os outros dois elementos de A são mapeados para um outro elemento $I_2 \neq I_1$.

No primeiro caso, há 4 possibilidades de escolha do elemento único mapeado em I_2, quando então os três elementos mapeados em I_1 ficam automaticamente determinados. Além disto, há 4 possibilidades de escolha do valor de I_1 e sobram 3 possibilidades para a escolha de I_2. Logo, há $4\times4\times3 = 48$ funções distintas satisfazendo esse primeiro caso.

No segundo caso, há 6 possibilidades de escolha dos dois elementos de A mapeados em I_1, quando então os outros dois elementos mapeados em I_2 ficam automaticamente determinados. Além disto, há 4 possibilidades de escolha do valor de I_1 e sobram 3 possibilidades para a escolha de I_2. Nesse segundo caso, porém, há uma simetria nas configurações que faz com que cada função seja contada 2 vezes. Logo, há $\frac{6\times4\times3}{2} = 36$ funções distintas satisfazendo esse segundo caso.

Por tudo isto, há $48 + 36 = 84$ funções distintas com exatamente dois elementos nos seus respectivos conjuntos imagens.

b) Analisando o número de funções distintas com exatamente N elementos ($N = 1, 2, 3, 4$) no conjunto imagem, têm-se:

- $N = 4$: Nesse caso, o primeiro elemento de A tem 4 possibilidades de imagem, sobrando 3 possibilidades para o segundo elemento, 2 possibilidades pro terceiro e 1 para o quarto e último elemento, totalizando $4\times3\times2 = 24$ funções distintas com quatro elementos no conjunto imagem.

  Nesse caso, para que a função composta seja constante, os quatro elementos do conjunto imagem devem ser mapeados num único valor J_1 que tem apenas 4 possibilidades. Logo, a probabilidade disto ocorrer é $\frac{24}{256}\frac{4}{256} = \frac{96}{2^{16}}$.

- $N = 3$: Nesse caso, dois elementos de A são mapeados para um único elemento I_1 e os dois outros elementos de A são mapeados para outros dois elementos $I_2 \neq I_1$ e $I_3 \neq \{I_1, I_2\}$. Há 6 possiibilidades de escolha para os dois elementos de A que serão mapeados em I_1, quando então os outros dois elementos mapeados em I_2 e I_3 ficam automaticamente identificados. Há 4 possibilidades de escolha do valor de I_1, 3 possibilidades para I_2 e 2 possibilidades para

I_3. Logo, há $6 \times 4 \times 3 \times 2 = 144$ funções distintas com três elementos no conjunto imagem.

Nesse caso, para que a função composta seja constante, os três elementos do conjunto imagem devem ser mapeados num único valor J_1 que tem 4 possibilidades, e o outro elemento do conjunto imagem pode ser mapeado para qualquer valor, também com 4 possibilidades. Logo, a probabilidade disto ocorrer é $\frac{144}{256}\frac{4 \times 4}{256} = \frac{2304}{2^{16}}$.

- $N = 2$: Do item (a), há 84 funções distintas com exatamente dois elementos no conjunto imagem.

  Nesse caso, para que a função composta seja constante, os dois elementos do conjunto imagem devem ser mapeados num único valor J_1 que tem 4 possibilidades, e os outros dois elementos do conjunto imagem podem ser mapeados para quaisquer valores, totalizando com 16 possibilidades para esses outros dois elementos. Logo, a probabilidade disto ocorrer é $\frac{84}{256}\frac{4 \times 4 \times 4}{256} = \frac{5376}{2^{16}}$.

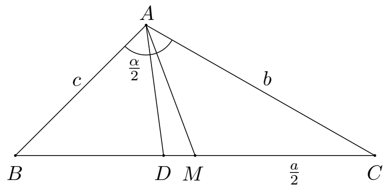
- $N = 1$: Nesse caso, todos os elementos de A são mapeados para um mesmo valor I_1, que possui 4 possibilidades.

  Nesse caso, a função composta será sempre constante e a probabilidade disto ocorrer é $\frac{4}{256} = \frac{1024}{2^{16}}$.

Por tudo isto, a probabilidade total P da função composta ser constante é

$$P = \frac{96}{2^{16}} + \frac{2304}{2^{16}} + \frac{5376}{2^{16}} + \frac{1024}{2^{16}} = \frac{8800}{2^{16}} = \frac{275}{2048} \approx 13{,}43\%.$$

9ª Questão [Valor 1,0]:



Na figura acima, sejam $BD = m$, $CD = n$, $AB = c$, $AC = b$, $AD = x$ e $AM = y$.

Pelo Teorema das Bissetrizes,

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b} = \frac{m+n}{c+b} = \frac{a}{c+b} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{ac}{b+c} \\ n = \frac{ab}{b+c} \end{cases}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos nos triângulos ΔADB e ΔADC, têm-se

$$\begin{cases} m^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos\frac{\alpha}{2} \\ n^2 = b^2 + x^2 - 2bx\cos\frac{\alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bm^2 = bc^2 + bx^2 - 2bcx\cos\frac{\alpha}{2} \\ cn^2 = cb^2 + cx^2 - 2bcx\cos\frac{\alpha}{2} \end{cases},$$

de modo que, subtraindo uma equação da outra, têm-se

$$x^2 = \frac{bm^2 - cn^2}{b-c} + bc = \frac{b\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 - c\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2}{b-c} + bc = \frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2 - a^2].$$

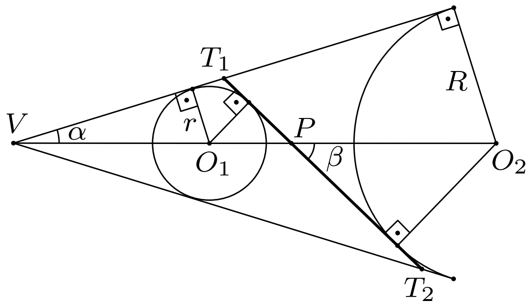
Aplicando a Lei dos Cossenos nos triângulos ΔAMB e ΔAMC, têm-se

$$\begin{cases} c^2 = y^2 + \frac{a^2}{4} - 2y\frac{a}{2}\cos A\hat{M}B \\ b^2 = y^2 + \frac{a^2}{4} - 2y\frac{a}{2}\cos(180^{\text{o}} - A\hat{M}B) \end{cases} \Rightarrow y^2 = \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4}.$$

Do enunciado, $x^2 = mn$ e $y^2 = bc$, e assim

$$\begin{cases} \frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2 - a^2] = \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \\ \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b+c)^2 = 2a^2 \\ (b-c)^2 = \frac{a^2}{2} \end{cases} \Rightarrow b, c = \frac{a\sqrt{2}(2\pm 1)}{4}.$$

10$^{\rm a}$ Questão [Valor 1,0]:



Seja a notação indicada na figura acima, onde $r = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} R$ e $\alpha = 30^{\rm o}$, já que o cone é equilátero. Com isto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}\, 30^{\rm o} = \frac{r}{VO_1} \\ \text{sen}\, 30^{\rm o} = \frac{R}{VO_2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} VO_1 = 2r \\ VO_2 = 2R \end{array} \right. \Rightarrow O_1O_2 = 2(R-r) = \frac{4R}{\sqrt{3}+1}.$$

Além disto,

$$\frac{r}{O_1P} = \frac{R}{O_2P} = \frac{r+R}{O_1O_2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} O_1P = \frac{r\, O_1O_2}{r+R} = \frac{2R(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = \frac{2r}{\sqrt{3}} \\ O_2P = \frac{R\, O_1O_2}{r+R} = \frac{2R}{\sqrt{3}} \end{array} \right. ,$$

de modo que

$$\text{sen}\, \beta = \frac{R}{O_2P} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = 60^{\rm o}.$$

Logo, $V\hat{T_1}P = 90^{\rm o}$, $V\hat{P}T_2 = 120^{\rm o}$ e ainda $P\hat{T_2}V = P\hat{V}T_2 = 30^{\rm o}$, de modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} PT_1 = VP\, \text{sen}\, \alpha = \frac{VP}{2} \\ PT_2 = VP \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow T_1T_2 = \frac{3VP}{2} = \frac{3(VO_1 + O_1P)}{2} = \frac{3(2r + \frac{2r}{\sqrt{3}})}{2} = (3-\sqrt{3})R.$$

1.2 Vestibular 2015/2016

1.2.1 Prova Objetiva

1ª Questão: (C) $(G \cup (H - F)) \cap \overline{H}$.
Sejam, sem perda de generalidade, $F = \{1, 2, 3, 4\}$, $G = \{2, 3, 5, 6\}$ e $H = \{3, 4, 6, 7\}$. Logo, $G - H = \{2, 5\}$. Além disto, analisando as opções dadas, têm-se:

- $G \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $F - H = \{1, 2\}$, de modo que $(A) \equiv \{3, 4, 5, 6\}$;
- $G \cup H = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $H - F = \{6, 7\}$, de modo que $(B) \equiv \{2, 3, 4, 5\}$;
- $H - F = \{6, 7\}$, $G \cup (H - F) = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $\overline{H} = \{1, 2, 5\}$, de modo que $(C) \equiv \{2, 5\}$, que é a opção correta;
- $\overline{G} = \{1, 4, 7\}$ e $H \cap F = 3, 4\}$, de modo que $(D) \equiv \{1, 3, 4, 7\}$;
- $\overline{H} = 1, 2, 5\}$, $\overline{H} \cap G = \{2, 5\}$ e $G - F = \{5, 6\}$, de modo que $(E) \equiv \{5\}$.

Questão 02: (A) -2.
Das relações de Girard:

$$\begin{cases} a = -(\alpha + (-\alpha) + \frac{1}{\alpha}) = -\frac{1}{\alpha} \\ b = \alpha.(-\alpha) + \alpha.\frac{1}{\alpha} + (-\alpha).\frac{1}{\alpha} = -\alpha^2 \\ c = -(\alpha.(-\alpha).\frac{1}{\alpha}) = \alpha \end{cases},$$

de modo que a expressão do enunciado é igual a

$$b + c^2 + ac + \frac{b}{c^2} = -\alpha^2 + \alpha^2 + (-\frac{1}{\alpha}).\alpha + \frac{-\alpha^2}{\alpha^2} = -2.$$

Questão 03: (E) 4.
Desenvolvendo a expressão dada, tem-se

$$3^m = n^2 - 14400 = n^2 - 120^2 = (n - 120)(n + 120).$$

Logo, os fatores $(n - 120)$ e $(n + 120)$, que possuem uma diferença igual a 240, devem ser potências de 3. Por inspeção, têm-se $(n - 120) = 3$, $(n + 120) = 243 = 3^5$, de modo que $n = 123$, e assim $3^m = 3.3^5 = 3^6$, com $m = 6$. Logo, o resto r da divisão de $(m + n) = 129$ por 5 é $r = 4$.

Questão 04: (A) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{36}}$.
Usando coordenadas polares, têm-se que

$$\mathrm{cis}^{2k-1}\frac{\pi}{36} = \left(e^{i\frac{\pi}{36}}\right)^{2k-1} = e^{i(2k-1)\frac{\pi}{36}} = \cos[(2k-1)\frac{\pi}{36}] + i\,\mathrm{sen}[(2k-1)\frac{\pi}{36}],$$

de modo que o somatório S dado é igual a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{15} \mathrm{sen}[(2k-1)\frac{\pi}{36}] \\ &= \frac{1}{\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{36}} \sum_{k=1}^{15} \mathrm{sen}[(2k-1)\frac{\pi}{36}]\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{36} \\ &= \frac{1}{\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{36}} \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{2}\left\{\cos[(2k-2)\frac{\pi}{36}] - \cos[(2k)\frac{\pi}{36}]\right\} \\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{36}}\left(\cos 0 - \cos\frac{30\pi}{36}\right) \\ &= \frac{(1-\cos 150^{\circ})}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{36}} \\ &= \frac{(1+\cos 30^{\circ})}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{36}} \\ &= \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)}{4\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{36}}. \end{aligned}$$

Questão 05: (D) $P(0)P(1) = 0$.
Seja a a raiz comum a $P(x)$ e $P(P(P(x)))$, de modo que $P(P(P(a))) = P(a) = 0$ e assim:

$$\begin{aligned} P(P(P(a))) = P(P(0)) = P(b) = 0 &\Rightarrow b^2 + ab + b = 0 \\ &\Rightarrow b(b+a+1) = 0 \\ &\Rightarrow P(0)P(1) = 0. \end{aligned}$$

Questão 06: (E) não podem formar os lados de um triângulo.
Do enunciado, têm-se que $b^2 = ac$ e ainda

$$2\log\left(\frac{3b}{5c}\right) = \log\left(\frac{5c}{a}\right) + \log\left(\frac{a}{3b}\right) \Rightarrow \left(\frac{3b}{5c}\right)^2 = \frac{5c}{a}\times\frac{a}{3b} = \frac{5c}{3b} \Rightarrow c = \frac{3b}{5}.$$

Substituindo essa relação em $b^2 = ac$, tem-se $a = \frac{5b}{3}$, de modo que não se pode formar um triângulo de lados a, b e c pois $(c+b) < a$.

Questão 07: (D) $\binom{2021}{6}$.

Do triângulo de Pascal, ou da definição de $\binom{a}{b}$, tem-se a propriedade

$$\binom{a}{b}+\binom{a}{b+1}=\binom{a+1}{b+1}.$$

Aplicando essa propriedade seguidamente, o somatório S do enunciado simplifica-se da forma

$$\begin{aligned} S &= \binom{2017}{6}+\binom{2017}{5}+\binom{2018}{5}+\binom{2019}{5}+\binom{2020}{5} \\ &= \binom{2018}{6}+\binom{2018}{5}+\binom{2019}{5}+\binom{2020}{5} \\ &= \binom{2019}{6}+\binom{2019}{5}+\binom{2020}{5} \\ &= \binom{2020}{6}+\binom{2020}{5} \\ &= \binom{2021}{6}. \end{aligned}$$

Questão 08: (B) $\dfrac{5}{18}$.

Como $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$ é múltiplo de 12, podemos focar toda nossa análise para $m, n \in \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Nesse caso, para cada n neste intervalo, os valores de m tais que o produto $m \times n$ seja múltiplo de 12 são:

$$\begin{cases} n=1 \Rightarrow m \in \{12\} \\ n=2 \Rightarrow m \in \{6,12\} \\ n=3 \Rightarrow m \in \{4,8,12\} \\ n=4 \Rightarrow m \in \{3,6,9,12\} \\ n=5 \Rightarrow m \in \{12\} \\ n=6 \Rightarrow m \in \{2,4,6,8,10,12\} \\ n=7 \Rightarrow m \in \{12\} \\ n=8 \Rightarrow m \in \{3,6,9,12\} \\ n=9 \Rightarrow m \in \{4,8,12\} \\ n=10 \Rightarrow m \in \{6,12\} \\ n=11 \Rightarrow m \in \{12\} \\ n=12 \Rightarrow m \in \{1,2,3,\ldots,12\} \end{cases},$$

de modo que há 40 casos de interesse dentro de um universo de 12^2 pares (m, n). Logo, a probabilidade p desejada é igual a $p = \frac{40}{144} = \frac{5}{18}$.

Questão 09: (E) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.

Como $A^{24} = I$, então o determinante de A é tal que $(a^2+b^2) = 1$. Fazendo a substituição $a = \cos\theta$ e $b = \operatorname{sen}\theta$, tem-se A da forma

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

que representa a rotação de um ângulo θ. Com esta interpretação, a relação $A^{24} = I$ equivale a $24\theta = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, o máximo valor de $a = \cos\theta$, com $a \neq 1$, corresponde ao mínimo valor de θ, com $\theta \neq 0$, de modo que

$$\theta = \frac{2\pi}{24} = 15^{\text{o}} \Rightarrow a = \cos 15^{\text{o}} = \sqrt{\frac{\cos 30^{\text{o}} + 1}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

Questão 10: (C) 90.

Denotando $x = \log_{10} k$, tem-se, pela regra da mudança de base, que

$$\log_{10^{-1}} k^{1/4} = \frac{\log_{10} k^{1/4}}{\log_{10} 10^{-1}} = \frac{1}{4} \times \frac{x}{(-1)} = -\frac{x}{4},$$

de modo que a desigualdade do enunciado torna-se

$$4\sqrt{x-1} > 5x - 6,$$

que requer sempre que $x \geq 1$. Considere agora duas situações:

- Caso I: $5x - 6 \geq 0$. Elevando ambos os lados da desigualdade ao quadrado, sem o risco de se introduzir soluções espúrias, têm-se

$$\begin{aligned} 16(x-1) > 25x^2 - 60x + 36 &\Rightarrow 25x^2 - 76x + 52 < 0 \\ &\Rightarrow 25\left(x - \frac{76-24}{50}\right)\left(x - \frac{76+24}{50}\right) < 0 \\ &\Rightarrow 25\left(x - \frac{26}{25}\right)(x-2) < 0 \\ &\Rightarrow \frac{26}{25} < x < 2. \end{aligned}$$

  Assim, juntando as três condições do Caso I, tem-se $\frac{6}{5} \leq x < 2$.

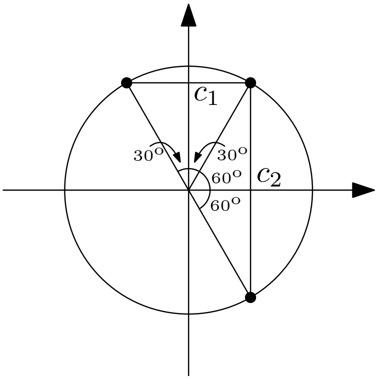
- Caso II: $5x-6 < 0$. Nesse caso, a desigualdade fica satisfeita se $x \geq 1$, de modo que a solução do Caso II é tal que $1 \leq x < \frac{6}{5}$.

Juntando os dois casos, têm-se $1 \leq x < 2$, de modo que $10 \leq k < 100$, ou seja, $k \in \{10, 11, 12, \ldots, 99\}$, o que dá 90 possíveis valores de k.

Questão 11: (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Desenvolvendo o seno do arco-dobro, a equação do enunciado torna-se

$$\frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = 2\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = -60^{\text{o}}, 60^{\text{o}}, 120^{\text{o}}.$$



Esses valores de x, conforme a figura acima, formam um triângulo retângulo de hipotenusa $h = 2$ e catetos c_1 e c_2 tais que

$$\begin{cases} c_1 = 2\operatorname{sen} 30^{\text{o}} = 1 \\ c_2 = 2\operatorname{sen} 60^{\text{o}} = \sqrt{3} \end{cases},$$

de modo que a área S desse triângulo é dada por

$$S = \frac{c_1 c_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Questão 12: (E) $112x^2 + 768xy - 376x - 112y^2 - 32y + 39 = 0$.
Observando os coeficientes angulares das retas dadas, $-\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$, nota-se que essas retas são perpendiculares. Além disso, é simples ver que essas retas cortam o eixo x nos pontos $A \equiv (-\frac{5}{12}, 0)$ e $B \equiv (\frac{1}{2}, 0)$ e o seu ponto $P \equiv (x_P, y_P)$ de interseção é dado por

$$\begin{cases} 4x_P + 3y_P = 2 \\ 12x_P - 16y_P = -5 \end{cases} \Rightarrow (x_P, y_P) = (\frac{17}{100}, \frac{11}{25}),$$

de modo que

$$\begin{cases} AP = \sqrt{\left(\frac{17}{100} + \frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{11}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{176^2+133^2}}{300} = \frac{\sqrt{48400}}{300} = \frac{11}{15} \\ BP = \sqrt{\left(\frac{17}{100} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{33^2+44^2}}{100} = \frac{55}{100} = \frac{11}{20} \end{cases}.$$

O lugar geométrico desejado é composto pelas bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos entre as duas retas dadas. Essas bissetrizes são ortogonais entre si e passam pelo ponto P. Além disso, uma das bissetrizes, b_1 por exemplo, passa ainda pelo ponto Q, pé da bissetriz do ângulo $A\hat{P}B$ sobre o lado AB. Esse ponto $Q \equiv (x_Q, 0)$, pelo teorema das bissetrizes, é tal que

$$\begin{cases} \frac{AQ}{BQ} = \frac{AP}{BP} = \frac{\frac{11}{15}}{\frac{11}{20}} = \frac{4}{3} \\ AQ + BQ = AB = \frac{11}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AQ = \frac{11}{21} \\ BQ = \frac{11}{28} \end{cases} \Rightarrow x_Q = -\frac{5}{12} + \frac{11}{21} = \frac{1}{2} - \frac{11}{28} = \frac{3}{28}.$$

Assim, como b_1 passa por P e Q, sua equação é dada por

$$\begin{cases} \frac{11}{25} = \frac{17}{100}\alpha_1 + \beta_1 \\ 0 = \frac{3}{28}\alpha_1 + \beta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 7 \\ \beta_1 = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow b_1 : y = 7x - \frac{3}{4}.$$

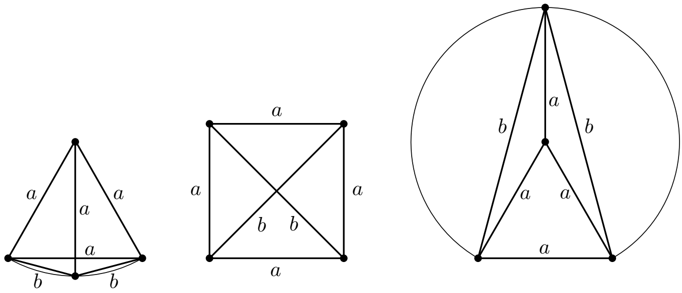
Enquanto isto, b_2 é perpendicular a b_1 e também passa por P. Logo, sua equação é dada por

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{\alpha_1} = -\frac{1}{7} \\ \frac{11}{25} = \frac{17}{100}\alpha_2 + \beta_2 \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = \frac{13}{28} \Rightarrow b_2 : y = -\frac{1}{7}x + \frac{13}{28},$$

e o lugar geométrico desejado é descrito por

$$(28x - 4y - 3)(4x + 28y - 13) = 0$$
$$\Rightarrow 112x^2 - 112y^2 + (28^2 - 4^2)xy - (28 \times 13 + 3 \times 4)x + (4 \times 13 - 3 \times 28)y + 39 = 0$$
$$\Rightarrow 112x^2 - 112y^2 + 768xy - 376x - 32y + 39 = 0.$$

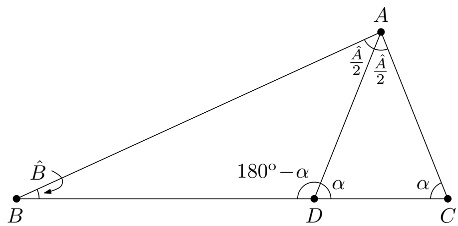
Questão 13: (C) $2+\sqrt{3}$.



As três configurações possíveis satisfazendo as condições do enunciado são mostradas na figura acima. Destas, o valor máximo da razão $r=\left(\frac{b}{a}\right)^2$ é obtido para a configuração da direita, em que $b=2a\cos 15^{\text{o}}$ e assim

$$r=4\cos^2 15^{\text{o}}=4\left(\frac{\cos 30^{\text{o}}+1}{2}\right)=\sqrt{3}+2.$$

Questão 14: (D) $\frac{3r+1}{4r}$.



Por uma análise angular simples, têm-se

$$A\hat{D}C=\hat{C}=\alpha\Rightarrow\frac{\hat{A}}{2}=180^{\text{o}}-2\alpha\Rightarrow\hat{B}=\alpha-\frac{\hat{A}}{2}=3\alpha-180^{\text{o}}.$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo ΔABC, têm-se

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}(3\alpha-180^{\text{o}})}\Rightarrow\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=r=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(3\alpha-180^{\text{o}})}=-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha},$$

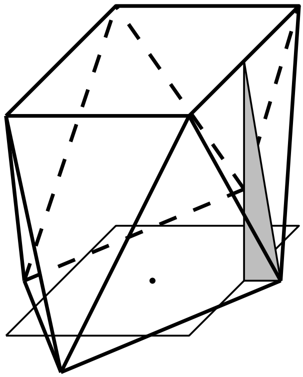
de modo que

$$r=-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha}=-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha\,(1-2\operatorname{sen}^2\alpha)}$$

e assim

$$r=-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{3\operatorname{sen}\alpha-4\operatorname{sen}^3\alpha}=-\frac{1}{3-4\operatorname{sen}^2\alpha}\Rightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{3r+1}{4r}.$$

Questão 15: (D) $\dfrac{a\sqrt[4]{8}}{2}$.



Seja o triângulo retângulo em destaque na figura com cateto maior d, cuja hipotenusa h deve corresponder à altura de um triângulo equilátero de lado a, ou seja, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, e cujo cateto menor c é dado por

$$c = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

Assim, pelo Teorema de Pitágoras, devemos ter

$$\begin{aligned} h^2 = d^2 + c^2 \Rightarrow \frac{3a^2}{4} &= d^2 + \frac{(\sqrt{2}-1)^2 a^2}{4} = d^2 + \frac{(3-2\sqrt{2})a^2}{4} \\ \Rightarrow d^2 &= \frac{2\sqrt{2}a^2}{4} \\ \Rightarrow d &= \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}a}{2} = \frac{2^{\frac{3}{4}}a}{2} = \frac{\sqrt[4]{8}a}{2}. \end{aligned}$$

1.2.2 Prova de Matemática

1ª Questão [Valor 1,0]: Seja r a razão não nula da PA. Do enunciado,

$$a_2^2 = a_1 a_{10} \Rightarrow (a_1 + r)^2 = a_1(a_1 + 9r) \Rightarrow 2a_1 r + r^2 = 9a_1 r \Rightarrow r = 7a_1.$$

Além disto,

$$\begin{aligned} a_j^2 = a_6 a_{25} &\Rightarrow (a_1 + (j-1)r)^2 = (a_1 + 5r)(a_1 + 24r) \\ &\Rightarrow (a_1 + (j-1)7a_1)^2 = (a_1 + 35a_1)(a_1 + 168a_1) \\ &\Rightarrow (7j-6)^2 = 36\times 169 = (6\times 13)^2 \\ &\Rightarrow 7j - 6 = 78 \\ &\Rightarrow j = 12. \end{aligned}$$

2ª Questão [Valor 1,0]: Calculando-se $f_2(x)$, têm-se

$$f_2(x) = f_0(f_1(x)) = f_0(f_0(f_0(x))) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x}} = \frac{x}{x + 1 - x} = x.$$

Logo, $f_n(x)$ tem um período 3, ou seja

$$f_0(x) = f_3(x) = f_6(x) = \cdots = f_{2016}(x)$$

e assim

$$f_{2016}(2016) = f_0(2016) = \frac{1}{1 - 2016} = -\frac{1}{2015}.$$

3ª Questão [Valor 1,0]: Seja a forma polar de $Z = \rho e^{i\theta}$, de modo que

$$\arg\{\frac{2Z}{\overline{Z}i}\} = \arg\{\frac{2\rho e^{i\theta}}{\rho e^{-i\theta} e^{i\frac{\pi}{2}}}\} = \arg\{e^{i(2\theta - \frac{\pi}{2})}\} = 2\theta - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{8}.$$

Assim, do enunciado, têm-se

$$\log_3(2\rho e^{i\frac{5\pi}{8}} + 2\rho e^{-i\frac{5\pi}{8}} + 1) = 2 \Rightarrow 4\rho\cos\frac{5\pi}{8} = 3^2 - 1 = 8 \Rightarrow \rho = \frac{2}{\cos\frac{5\pi}{8}}.$$

Observando que

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{8}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8} \\ \cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} \end{cases},$$

a forma cartesiana para Z é dada por

$$Z = \frac{2}{\cos\frac{5\pi}{8}}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{8}\right) = 2\left(1 + i\frac{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{5\pi}{8}}\right) = 2\left(1 - i\frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}\right).$$

Da fórmula do cosseno do arco-dobro, têm-se

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases},$$

e assim

$$Z = 2\left(1 - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right) = 2\left(1 - i\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = 2 - 2i(\sqrt{2}+1).$$

4ª Questão [Valor 1,0]: Seja A_N a matriz $N \times N$ cujos elementos possuem a mesma definição dos elementos da matriz A do enunciado. Em particular,

$$A_{2016} = A = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{2014}{2014} & \binom{2015}{2015} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \cdots & \binom{2015}{2014} & \binom{2016}{2015} \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{2016}{2014} & \binom{2017}{2015} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{2014}{0} & \binom{2015}{1} & \binom{2016}{2} & \cdots & \binom{4028}{2014} & \binom{4029}{2015} \\ \binom{2015}{0} & \binom{2016}{1} & \binom{2017}{2} & \cdots & \binom{4029}{2014} & \binom{4030}{2015} \end{bmatrix}.$$

Subtraindo a $(j-1)$-ésima coluna da j-ésima coluna, para $j = 2016, 2015, \ldots, 2$, não se altera o determinante D de A. Usando-se a propriedade do triângulo de Pascal de que $\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \binom{a+1}{b+1}$, tem-se então que

$$D = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \binom{1}{2} & \cdots & \binom{2013}{2014} & \binom{2014}{2015} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{2014}{2014} & \binom{2015}{2015} \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \cdots & \binom{2015}{2014} & \binom{2016}{2015} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{2014}{0} & \binom{2014}{1} & \binom{2015}{2} & \cdots & \binom{4027}{2014} & \binom{4028}{2015} \\ \binom{2015}{0} & \binom{2015}{1} & \binom{2016}{2} & \cdots & \binom{4028}{2014} & \binom{4029}{2015} \end{vmatrix}.$$

Subtraindo agora a $(i-1)$-ésima linha da i-ésima linha, para $i = 2016, 2015, \ldots, 2$, novamente não se altera o determinante D, de modo que

$$D = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \binom{1}{2} & \cdots & \binom{2013}{2014} & \binom{2014}{2015} \\ \binom{0}{-1} & \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{2013}{2013} & \binom{2014}{2014} \\ \binom{1}{-1} & \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{2014}{2013} & \binom{2015}{2014} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{2013}{-1} & \binom{2013}{0} & \binom{2014}{1} & \cdots & \binom{4026}{2013} & \binom{4027}{2014} \\ \binom{2014}{-1} & \binom{2014}{0} & \binom{2015}{1} & \cdots & \binom{4027}{2013} & \binom{4028}{2014} \end{vmatrix}.$$

Por convenção, considera-se $\binom{a}{a+1} = \binom{a}{-1} = 0$, para todo a inteiro não-negativo. Assim, aplicando Laplace na primeira linha (ou primeira coluna), tem-se que

$$D = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{2013}{2013} & \binom{2014}{2014} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{2014}{2013} & \binom{2015}{2014} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{2013}{0} & \binom{2014}{1} & \cdots & \binom{4026}{2013} & \binom{4027}{2014} \\ \binom{2014}{0} & \binom{2015}{1} & \cdots & \binom{4027}{2013} & \binom{4028}{2014} \end{vmatrix},$$

que corresponde ao determinante da matriz A_{2015}. Repetindo este processo, tem-se

$$D = \det\{A\} = \det\{A_{2016}\} = \det\{A_{2015}\} = \ldots = \det\{A_1\} = 1.$$

SLN: Para os mais incrédulos, vale a pena observar que

$$\det\{A_2\} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\det\{A_3\} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (12+3+3)-(2+9+6) = 1$$

e assim sucessivamente.

5ª Questão [Valor 1,0]: Pela fórmula da tangente do arco-dobro,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg} 2x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\\
\Rightarrow\ &\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} 2x + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = 0\\
\Rightarrow\ &\operatorname{tg} x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\operatorname{tg}^2 2x}}{2\operatorname{tg} 2x} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{\cos^2 2x + \operatorname{sen}^2 2x}{\cos^2 2x}}}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{-\cos 2x \pm 1}{\operatorname{sen} 2x}\\
\Rightarrow\ &\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{-\cos x \pm 1}{\operatorname{sen} x}.
\end{aligned}$$

É possível perceber que a expressão associada ao sinal $-$ é espúria, pois: (i) para $x \in (0, \pi)$, tem-se $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > 0$, enquanto a expressão assume apenas valores negativos (pois nesse intervalo $\operatorname{sen} x > 0$); (ii) para $x \in (\pi, 2\pi)$, tem-se $\operatorname{tg}\frac{x}{2} < 0$, enquanto a expressão assume apenas valores positivos (pois nesse intervalo $\operatorname{sen} x < 0$). Logo,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{-\cos x + 1}{\operatorname{sen} x}.$$

Substituindo essa relação na equação do enunciado, têm-se

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{tg} x \frac{-\cos x + 1}{\operatorname{sen} x}) = (\operatorname{sen} x)(1 + \frac{-\cos x + 1}{\cos x}) = \operatorname{tg} x = 4 - \operatorname{cotg} x\\
\Rightarrow\ &\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x} = 4\\
\Rightarrow\ &\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}\\
\Rightarrow\ &2x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}\\
\Rightarrow\ &x = k\frac{\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12} = \{15^{\mathrm{o}}, 75^{\mathrm{o}}, 195^{\mathrm{o}}, 255^{\mathrm{o}}\} + 360^{\mathrm{o}}k,
\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

6ª Questão [Valor 1,0]: Desenvolvendo a equação dada, têm-se

$$
\begin{aligned}
& 32m^2 - 20mn + 3n^2 + 49 = 0 \\
\Rightarrow & \; m = \frac{20n \pm \sqrt{400n^2 - 128(3n^2+49)}}{64} = \frac{5n \pm \sqrt{n^2 - 392}}{16} \\
\Rightarrow & \; (16m - 5n)^2 = n^2 - 392 \\
\Rightarrow & \; [n + (16m - 5n)][n - (16m - 5n)] = (16m - 4n)(6n - 16m) = 392 \\
\Rightarrow & \; (4m - n)(3n - 8m) = 49 = 7^2.
\end{aligned}
$$

Assim, temos seis possibilidades:

$$\begin{cases} 4m - n = 49 \\ 3n - 8m = 1 \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (37, 99)$$

$$\begin{cases} 4m - n = -49 \\ 3n - 8m = -1 \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (-37, -99)$$

$$\begin{cases} 4m - n = 7 \\ 3n - 8m = 7 \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (7, 21)$$

$$\begin{cases} 4m - n = -7 \\ 3n - 8m = -7 \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (-7, -21)$$

$$\begin{cases} 4m - n = 1 \\ 3n - 8m = 49 \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (13, 51)$$

$$\begin{cases} 4m - n = -1 \\ 3n - 8m = -49 \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (-13, -51)$$

7ª Questão [Valor 1,0]: Sejam os jogadores denotados por A, B e C, sendo A o primeiro a jogar e B sentado à esquerda de A. Seja a notação $X \to Y$ indicando que o jogador X não ganhou o jogo e o jogador Y joga em seguida. Assim $A \to B$, $B \to C$ e $C \to A$ têm probabilidade $\frac{4}{6}$, enquanto $A \to C$, $C \to B$ e $B \to A$ têm probabilidade $\frac{1}{6}$. A cada vez que joga, como na primeira rodada, A tem probabilidade $\frac{1}{6}$ de ganhar.

Caso não ganhe na primeira rodada, A pode voltar a jogar em no mínimo duas rodadas, de acordo com as sequências $A \to B \to A$ (com probabilidade de ocorrência $\frac{4}{6} \times \frac{1}{6}$) ou $A \to C \to A$ (com probabilidade $\frac{1}{6} \times \frac{4}{6}$).

As possibilidades de A voltar a jogar em três rodadas seriam através das sequências $A \to B \to C \to A$ (com probabilidade $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6}$) ou $A \to C \to B \to A$ (com probabilidade $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$).

As possibilidades de A voltar a jogar em quatro rodadas seriam através das sequências $A \to B \to C \to B \to A$ (com probabilidade $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$) ou $A \to C \to B \to C \to A$ (com probabilidade $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6}$).

O processo pode continuar indefinidamente. A recursão surge quando percebemos que a A pode voltar a jogar em n rodadas substituindo a última passagem $X \to A$, com $X = B$ ou $X = C$, de uma sequência de $n-1$ rodadas, por $X \to Y \to A$, com $Y \neq X$, acrescentando 1 rodada ao processo. Nesse caso, se $X = B$ e $Y = C$, a probabilidade da sequência de n rodadas é a probabilidade da sequência de $n-1$ rodadas dividida por $\frac{1}{6}$ e multiplicada por $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6}$, o que equivale a multiplicar a probabilidade anterior por $\frac{8}{3}$. Se, por outro lado, $X = C$ e $Y = B$, a probabilidade da sequência de n rodadas é a probabilidade da sequência de $n-1$ rodadas dividida por $\frac{4}{6}$ e multiplicada por $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$, o que equivale a multiplicar a probabilidade anterior por $\frac{1}{24}$.

Em suma, a probabilidade de A jogar novamente em duas rodadas é $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$. A probabilidade de A jogar novamente em três rodadas é $\frac{1}{9} \times \frac{8}{3} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{24} = \frac{65}{216}$. A probabilidade de A jogar novamente em quatro rodadas é $\frac{1}{9} \times \frac{8}{3} \times \frac{1}{24} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{24} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{81}$. Adicionando as probabilidades de A jogar novamente em duas ou três rodadas, tem-se a soma $\frac{113}{216}$. A partir daí, a probabilidade conjunta de A jogar novamente em quatro ou cinco rodadas é essa soma multiplicada por $\frac{1}{9}$, que sai das operações $\frac{8}{3} \times \frac{1}{24}$ ou $\frac{1}{24} \times \frac{8}{3}$.

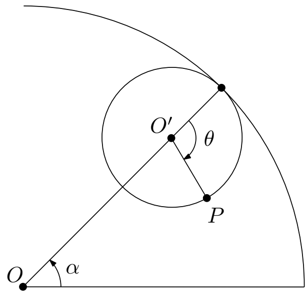
Com isto, a probabilidade P_1 total de A jogar novamente é dada pela soma da PG infinita de primeiro termo $\frac{113}{216}$ e razão $\frac{1}{9}$, ou seja

$$P_1 = \frac{\frac{113}{256}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{113}{192}.$$

Caso não ganhe, a probabilidade de A jogar novamente é P_1^2 e assim sucessivamente, de modo que a probabilidade P de A ganhar o jogo é

$$P = \frac{1}{6} + P_1 \frac{1}{6} + P_1^2 \frac{1}{6} + P_1^3 \frac{1}{6} + \ldots = \left(\frac{1}{1 - P_1} \right) \frac{1}{6} = \left(\frac{192}{192 - 113} \right) \frac{1}{6} = \frac{32}{79}.$$

8ª Questão [Valor 1,0]:



a) Sejam O e O' os respectivos centros das circunferências C e C' de raios $R = 4$ e $r = 1$. Quando O' se desloca de um ângulo α em torno de O, o ponto P se desloca de um ângulo θ em torno de O' tal que

$$\frac{\theta}{\alpha} = \frac{R}{r} \Rightarrow \theta = 4\alpha.$$

No caso, o segmento $O'P$ faz um ângulo de $(\theta - \alpha) = 3\alpha$ com a horizontal, e as coordenadas do ponto $P \equiv (P_x, P_y)$ são dadas por

$$\begin{cases} P_x = OO' \cos\alpha + O'P \cos(\theta - \alpha) = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha \\ P_y = OO' \operatorname{sen}\alpha - O'P \operatorname{sen}(\theta - \alpha) = 3\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha \end{cases}.$$

Desenvolvendo $\cos 3\alpha$ e $\operatorname{sen} 3\alpha$, têm-se

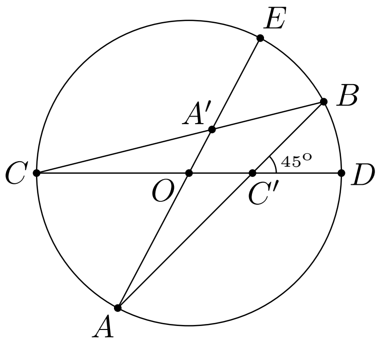
$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos 2\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\alpha \\ &= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, \\ \operatorname{sen} 3\alpha &= \operatorname{sen} 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{sen}\alpha \\ &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha + (1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha \\ &= 2\operatorname{sen}\alpha(1 - \operatorname{sen}^2\alpha) + \operatorname{sen}\alpha - 2\operatorname{sen}^3\alpha \\ &= 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha, \end{aligned}$$

de modo que $(P_x, P_y) \equiv (4\cos^3\alpha, 4\operatorname{sen}^3\alpha)$.

b) Pelo item anterior, o lugar geométrico de P é descrito por

$$\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16}.$$

9ª Questão [Valor 1,0]:



Além da notação definida no enunciado, sejam o outro extremo D do diâmetro por C e a outra extremidade E do diâmetro por A. Sejam ainda $C'D = x$ e $A\hat{O}C = 2\theta$.

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo $\Delta OAC'$, têm-se:

$$\frac{OA}{\operatorname{sen} 45^{\circ}} = \frac{AC'}{180^{\circ} - 2\theta} \Rightarrow \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\operatorname{sen} 2\theta} \Rightarrow \operatorname{sen} 2\theta = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4},$$

e assim (o que vai ser útil mais adiante),

$$\cos 2\theta = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}}{4} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{4} \end{cases}.$$

Além disto,

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen} 30^{\circ}\cos 45^{\circ} + \cos 30^{\circ}\operatorname{sen} 45^{\circ} = \operatorname{sen} 75^{\circ},$$

de modo que $A\hat{O}C = 2\theta = 75^{\circ}$ e assim $O\hat{A}C' = 30^{\circ}$. Com isto, ainda pela Lei dos Senos no triângulo $\Delta OAC'$,

$$\frac{OC'}{\operatorname{sen} 30^{\circ}} = \frac{OA}{\operatorname{sen} 45^{\circ}} \Rightarrow \frac{2-x}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2}.$$

Pelo conceito de potência do ponto C',

$$
\begin{aligned}
& CC' \times C'D = AC' \times C'B \\
\Rightarrow\ & (4-x)x = (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) = 2 = (1+\sqrt{3})C'B \\
\Rightarrow\ & C'B = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1 \\
\Rightarrow\ & AB = AC' + C'B = (1+\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Assim, aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo $\Delta CC'B$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
CB^2 &= CC'^2 + C'B^2 - 2CC'\,C'B\cos 135^{\text{o}} \\
&= (2+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}-1)^2 + 2(2+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 8 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}.
\end{aligned}
$$

No triângulo $\Delta AA'B$, o ângulo $A\hat{A}'B$ é tal que

$$
A\hat{A}'B = 180^{\text{o}} - (A'\hat{A}B + A'\hat{B}A) = 180^{\text{o}} - (\theta + 30^{\text{o}}) = 150^{\text{o}} - \theta,
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} A\hat{A}'B &= \operatorname{sen} 150^{\text{o}} \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cos 150^{\text{o}} \\
&= \frac{\cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta}{2} \\
&= \frac{\sqrt{8-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}} + \sqrt{3}\sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{8}.
\end{aligned}
$$

Por fim, aplicando a Lei dos Senos no triângulo $\Delta AA'B$,

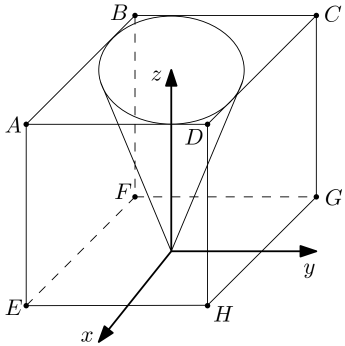
$$
\frac{A'B}{\operatorname{sen} 30^{\text{o}}} = \frac{AB}{\operatorname{sen} A\hat{A}'B} \Rightarrow A'B = \frac{AB}{2\operatorname{sen} A\hat{A}'B} = \frac{2\sqrt{3}}{2\operatorname{sen} A\hat{A}'B},
$$

com $\operatorname{sen} A\hat{A}'B$ dado acima.

Logo,

$$
\frac{A'B}{A'C} = \frac{A'B}{CB - A'B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} A\hat{A}'B}}{\sqrt{8+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} A\hat{A}'B}}
$$

10ª Questão [Valor 1,0]:
1ª Solução:



Sejam o cubo e o cone situados nos eixos cartesianos conforme a figura acima, onde o vértice do cubo coincide com a origem dos eixos. Nesse caso, o cone é descrito por

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

tal que em $z = a$, a seção do cone é uma circunferência de raio $r = \frac{a}{2}$.

O plano $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$, definido pelos vértices $A \equiv (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, a)$, $B \equiv (-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, a)$ e $H \equiv (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$, é tal que

$$\begin{cases} \frac{a}{2}\alpha - \frac{a}{2}\beta + a\gamma = 1 \\ -\frac{a}{2}\alpha - \frac{a}{2}\beta + a\gamma = 1 \\ \frac{a}{2}\alpha + \frac{a}{2}\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{2}{a}, \frac{2}{a}),$$

de modo que o plano é descrito por $z + y = \frac{a}{2}$.

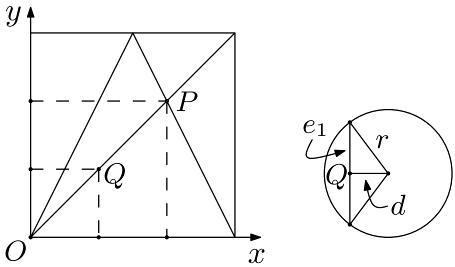
Com isto, a projeção no plano $x \times y$, a partir de um ângulo de 45°, da interseção do plano ABH com o cone é descrita por

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2 + y^2} = -y + \frac{a}{2} &\Rightarrow 4(x^2 + y^2) = y^2 - ay + \frac{a^2}{4} \\ &\Rightarrow 4x^2 + 3y^2 + ay + \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3} \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{a^2}{12}} + \frac{(y + \frac{a}{6})^2}{\frac{a^2}{9}} = 1, \end{aligned}$$

que corresponde a uma elipse de semi-eixos $e_1' = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ e $e_2' = \frac{a}{3}$. A elipse-interseção tem, então, semi-eixos $e_1 = e_1'$ e $e_2 = \frac{e_2'}{\cos 45^{\circ}}$, de modo que sua área S é dada por

$$S = \pi e_1 e_2 = \pi \frac{a\sqrt{3}}{6} \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{\pi a^2 \sqrt{6}}{18}.$$

2ª Solução:



Seja a vista lateral da figura, onde o ponto $P \equiv (P_x, P_y)$, extremidade do eixo maior da elipse-seção, é determinado pela interseção das retas-projeções do plano ABH e do cone:

$$\begin{cases} P_y = P_x \\ P_y = -2P_x + 2a \end{cases} \Rightarrow (P_x, P_y) = (\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}).$$

Logo, o semi-eixo maior da elipse-seção tem comprimento

$$e_2 = \frac{OP}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Nessa vista lateral, o centro Q da elipse-seção tem coordenadas $(Q_x, Q_y) = (\frac{P_x}{2}, \frac{P_y}{2}) = (\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$. Na altura Q_y, um plano horizontal secciona o cone numa circunferência de raio $r = \frac{2}{3} \times \frac{a}{2} = \frac{a}{3}$, e a distância d do ponto Q ao centro dessa circunferência é igual a $d = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$. Com isto, pelo Teorema de Pitágoras, o semi-eixo menor da elipse-seção tem comprimento

$$e_1 = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

de modo que a área S da elipse-seção é dada por

$$S = \pi e_1 e_2 = \pi \frac{a\sqrt{3}}{6} \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{\pi a^2 \sqrt{6}}{18}.$$

1.3 Vestibular 2014/2015

1.3.1 Prova Objetiva

1ª Questão: (B) 2.
Do enunciado, $2b = a + c$. Assim, pela Lei dos Senos e usando a transformação em produto, têm-se

$$2\,\mathrm{sen}\,\hat{B} = \mathrm{sen}\,\hat{A} + \mathrm{sen}\,\hat{C} = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2},$$

de modo que o quociente Q pedido é igual a

$$Q = \frac{\frac{2\,\mathrm{sen}\,\hat{B}}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}}}{\cos\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\hat{B}}{\mathrm{sen}\,(\hat{A}+\hat{C})} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\hat{B}}{\mathrm{sen}\,(180^{\mathrm{o}}-\hat{B})} = 2.$$

Questão 02: (A) 1.
Observando que $\log_x y \log_y x = 1$, o sistema dado pode ser simplificado para

$$\begin{cases} \pi\log_x y + e\log_y x = a \\ \pi\log_x y - e\log_y x = b\log_x y\log_y x = b \end{cases},$$

de modo que

$$\begin{cases} 2\pi\log_x y = a+b \\ 2e\log_y x = a-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{2\pi} = x^{a+b} \\ y^{a-b} = x^{2e} \end{cases} \Rightarrow x^{a+b+2e} = y^{a-b+2\pi},$$

e o quociente pedido é igual a 1.

Questão 03: (B) f é uma função ímpar.
Expandindo $\operatorname{sen} 2x$ e usando transformação em produto, $f(x)$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{8+2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{8-4\operatorname{sen} x + 4\operatorname{sen} x \cos^2 x} \\ &= \ln \frac{8+2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x \cos 2x}{8-4\operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)} \\ &= \ln \frac{8+2\operatorname{sen} x(1-\cos 2x)}{8-4\operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x)} \\ &= \ln \frac{8+2\operatorname{sen} x(2\operatorname{sen}^2 x)}{8-4\operatorname{sen}^3 x} \\ &= \ln \frac{2+\operatorname{sen}^3 x}{2-\operatorname{sen}^3 x}. \end{aligned}$$

Logo:

- Para $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{N}$, então $\operatorname{sen} x = 0$ e assim $f(x) = \ln 1 = 0$, de modo que $f(x)$ tem infinitas raízes reais.
-
  $$f(-x) = \ln \frac{2+\operatorname{sen}^3(-x)}{2-\operatorname{sen}^3(-x)} = \ln \frac{2-\operatorname{sen}^3 x}{2+\operatorname{sen}^3 x} = -\ln \frac{2+\operatorname{sen}^3 x}{2-\operatorname{sen}^3 x} = -f(x),$$

  de modo que $f(x)$ é uma função ímpar.
- Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, então $\ln \frac{1}{3} \leq f(x) \leq \ln 3$, de modo que $f(x)$ não é sobrejetora.

Questão 04: (A) 7.
Do enunciado, $a_1 = (r-1)$ e $n = (r+1)$, e assim

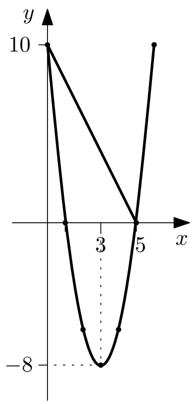
$$S = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2} = \frac{[2(r-1)+r^2](r+1)}{2} = 244,$$

de modo que, por inspeção, devemos ter

$$r^3 + 3r^2 - 2 = 488 \Rightarrow (r-7)(r^2+10r+70) = 0,$$

cuja única solução real é $r = 7$.

Questão 05: (A) $-3{,}2$.



Para satisfazermos ambas as inequações, $5y$ deve estar acima (ou igual a) da parábola $(2x^2-12x+10)$ e abaixo (ou igual a) da reta $(10-2x)$. Assim, pelo gráfico acima, o valor mínimo y_{min} é obtido na abscissa do vértice da parábola $x=3$, onde devemos ter

$$18-36+10 \leq 5y_{\text{min}} \leq 10-6 \Rightarrow -8 \leq 5y_{\text{min}} \leq 4 \Rightarrow y_{\text{min}} = -1{,}6.$$

Enquanto isso, o valor máximo y_{max} é alcançado em $x=0$, tal que

$$10 \leq 5y_{\text{max}} \leq 10 \Rightarrow y_{\text{max}} = 2.$$

Logo, $y_{\text{min}}y_{\text{max}} = -3{,}6$.

Questão 06: (D) $6x^2-17x-3$.
Sejam $D(x)$ e $d(x)$ os polinômios dividendo e divisor, respectivamente, gerando o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$, de modo que $D(x) = d(x)Q(x) + R(x)$. Como $d(x)$ é um polinômio do terceiro grau, então $R(x)$ é um polinômio (no máximo) do segundo grau, que pode ser escrito como $R(x) = ax^2+bx+c$. Observando que

$$D(x) = x^{24}(x^2-x-6)+x^2(5x^2-16x+3) = x^2(x-3)[x^{22}(x+2)+(5x-1)]$$

e

$$Q(x) = x^2(x-3)-(x-3) = (x^2-1)(x-3) = (x+1)(x-1)(x-3),$$

para os valores de x que anulam $Q(x)$, têm-se

$$\begin{cases} R(-1) = D(-1) \\ R(1) = D(1) \\ R(3) = D(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+c = 20 \\ a+b+c = -14 \\ 9a+3b+c = 0 \end{cases},$$

cuja solução é $a=6$, $b=-17$ e $c=-3$.

Questão 07: (D) 6.
Observando que, para $k \in \mathbb{N}$,

$$(11+k)^2 \bmod 11 = (11^2+22k+k^2) \bmod 11 = k^2 \bmod 11,$$

então, por inspeção, os restos da divisão por 11 são

$$\begin{cases} 1^2 \bmod 11 = 1 \\ 2^2 \bmod 11 = 4 \\ 3^2 \bmod 11 = 9 \\ 4^2 \bmod 11 = 5 \\ 5^2 \bmod 11 = 3 \\ 6^2 \bmod 11 = 3 \\ 7^2 \bmod 11 = 5 \\ 8^2 \bmod 11 = 9 \\ 9^2 \bmod 11 = 4 \\ 10^2 \bmod 11 = 1 \\ 11^2 \bmod 11 = 0 \end{cases},$$

de modo que os possíveis restos da divisão de k^2 por 11 são $\{0,1,3,4,5,9\}$, num total de 6 valores distintos.

Questão 08: (C) 2.
De início, tem-se $\cos x \operatorname{sen} x \neq 0$ e assim $x \neq \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$. Desenvolvendo o termo $\operatorname{tg}^2(x) + \operatorname{cotg}^2(x)$, têm-se

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2(x)+\operatorname{cotg}^2(x) &= \frac{\cos^4(x)+\operatorname{sen}^4(x)}{\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)} \\ &= \frac{4(\cos^4(x)-2\cos^2(x)\operatorname{sen}^2(x)+\operatorname{sen}^4(x))+8\cos^2(x)\operatorname{sen}^2(x)}{4\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)} \\ &= \frac{4(\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x))^2}{\operatorname{sen}^2(2x)}+2 \\ &= \frac{4\cos^2(2x)}{\operatorname{sen}^2(2x)}+2 \\ &= 4\operatorname{cotg}^2(2x)+2. \end{aligned}$$

Logo, a equação dada corresponde a $\cos(8x) = \operatorname{sen}(2x) + 4\operatorname{cotg}^2(2x)+2$. Como $\cos(8x) \leq 1$, $\operatorname{sen}(2x) \geq -1$ e $\operatorname{cotg}^2(2x) \geq 0$, então, necessariamente, devemos ter

$$\begin{cases} \cos(8x) = 1 \\ \operatorname{sen}(2x) = -1 \\ \operatorname{cotg}(2x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\} \\ x \in \{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\} \\ x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\} \end{cases} \Rightarrow x \in \{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}.$$

Questão 09: (A) 7.
Adicionando a quarta linha de A à segunda linha e subtraindo a primeira linha da terceira, gera-se uma matriz auxiliar A' com mesmo determinante de A:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2+x & 0 & x & x \\ 0 & -x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}.$$

Subtraindo a terceira coluna da quarta, forma-se outra matriz A'' com mesmo determinante Δ que as anteriores:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2+x & 0 & x & 0 \\ 0 & -x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-3 \end{bmatrix}.$$

Aplicando Laplace na quarta coluna, tem-se

$$\Delta = (x-3)\begin{vmatrix} 1 & 2x & 0 \\ x^2+x & 0 & x \\ 0 & -x+4 & 0 \end{vmatrix} = (x-3)(x-4)x.$$

Assim, a soma dos módulos das raízes da equação $\Delta = 0$ é igual a $S = (3+4+0) = 7$.

Questão 10: (E) $4\sqrt{10}/5$.
Denotando $A \equiv (6,7)$, $B \equiv (4,1)$ e $C \equiv (8,5)$, podemos observar que

$$\left\{ \begin{array}{l} AB^2 = 2^2+6^2 = 40 \\ BC^2 = 4^2+4^2 = 32 \\ AC^2 = 2^2+2^2 = 8 \end{array} \right. \Rightarrow AB^2 = BC^2 + AC^2,$$

de modo que o triângulo ABC é retângulo em C. Logo, Γ tem centro no ponto médio $(5,4)$ de AB, raio $R = AB/2 = \sqrt{10}$ e é descrita por $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 10$. Os pontos de Γ de ordenada $y = 5$ são dados por

$$(x-5)^2 + (5-4)^2 = 10 \Rightarrow x = 5 \pm 3 = 8 \text{ ou } 2.$$

O ponto $(8,5)$ está encoberto pela própria circunferência em relação ao ponto $(0,-1)$. Assim, a tangente desejada é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 = 2a+b \\ -1 = 2.0+b \end{array} \right. \Rightarrow y = 3x-1$$

e sua distância d ao ponto $(-1,4)$ é igual a

$$d = \frac{|3.(-1)+(-1).4-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

Questão 11: (D) elipse.
Sejam $w = a_w + ib_w$, $a_w, b_w \in \mathbb{R}$, e $z = ke^{i\theta}$. Logo, devemos ter

$$\begin{aligned} a_w + ib_w &= ke^{i\theta} + \frac{1}{ke^{i\theta}} \\ &= ke^{i\theta} + \frac{1}{k}\, e^{-i\theta} \\ &= k(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{k}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ &= \frac{k^2+1}{k}\cos\theta + i\frac{k^2-1}{k}\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} a_w = \frac{k^2+1}{k}\cos\theta \\ b_w = \frac{k^2-1}{k}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{k}{k^2+1}\,a_w\right)^2 + \left(\frac{k}{k^2-1}\,b_w\right)^2 = 1,$$

o que, como $(k^2-1) > 0$, caracteriza uma elipse no plano complexo w.

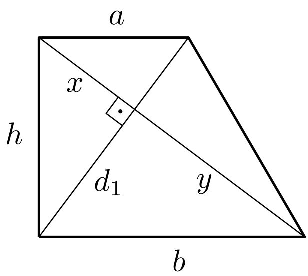
Questão 12: (C)180/181.
A probabilidade de "X" ser o vencedor é

$$P(V) = P(V|F)P(F) + P(V|NF)P(NF) = 0{,}9\times 0{,}8 + 0{,}02\times 0{,}2 = 0{,}724.$$

Pelo Teorema de Bayes, a probabilidade de "X" ser o favorito quando ele é vencedor é dada por

$$P(F|V) = \frac{P(V|F)P(F)}{P(V)} = \frac{0{,}9\times 0{,}8}{0{,}724} = \frac{0{,}72}{0{,}724} = \frac{720}{724} = \frac{180}{181}.$$

Questão 13: (C) $\left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$.



Seja a notação indicada na figura acima com $d_2 = (x+y)$. Por Pitágoras, têm-se que

$$d_1 = \sqrt{h^2 + a^2} \quad \text{e} \quad d_2 = \sqrt{h^2 + b^2}.$$

A área do trapézio pode ser escrita de duas formas:

$$\frac{(a+b)h}{2} = \frac{d_1 x}{2} + \frac{d_1 y}{2} = \frac{d_1(x+y)}{2} = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{\sqrt{(h^2+a^2)(h^2+b^2)}}{2},$$

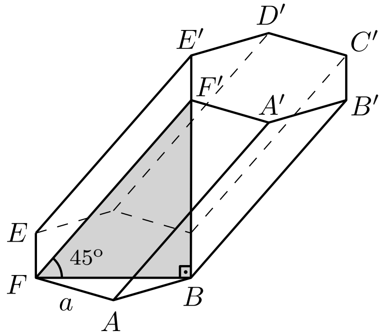
de modo que

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2h^2 = (h^2+a^2)(h^2+b^2) \\
\Rightarrow\ & a^2h^2 + 2abh^2 + b^2h^2 = h^4 + h^2(a^2+b^2) + a^2b^2 \\
\Rightarrow\ & h^4 - 2abh^2 + a^2b^2 = 0 \\
\Rightarrow\ & (h^2 - ab)^2 = 0 \\
\Rightarrow\ & h^2 = ab.
\end{aligned}$$

Logo, a área S do trapézio pode ser escrita como

$$S = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}.$$

Questão 14: (D) $\dfrac{9}{2}a^3$.



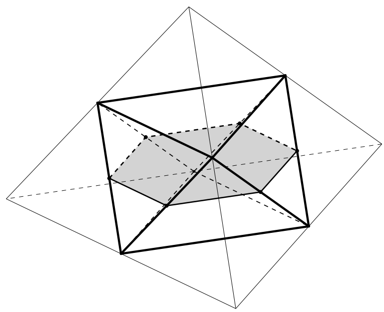
No triângulo em destaque da figura acima (em que os vértives C e D não estão denotados, para maior clareza), têm-se

$$BF' = BF = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3},$$

de modo que o volume V do prisma é dado por

$$V = 6\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,BF' = \frac{9a^3}{2}.$$

Questão 15: (C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{32}a^2$.



Se o tetraedro é regular de aresta a, então, pelo conceito de base média, o octaedro também é regular de aresta $\frac{a}{2}$. Na figura acima, podemos perceber que a seção do plano paralelo à base do tetraedro e a uma altura igual a $\frac{1}{4}$ da altura do tetraedro é, novamente pelo conceito de base média, um hexágono regular de lado $\frac{a}{4}$, de modo que a área dessa seção é dada por

$$S = 6\,\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{32}.$$

1.3.2 Prova de Matemática

1ª Questão [Valor 1,0]: Do domínio da função logaritmo, devemos ter $x > 0$ e $x \neq 1$. Além disto, desenvolvendo a inequação, têm-se

$$
\begin{aligned}
& \frac{4}{2(\log_3 x) - 2} - 2\log_x 3 > 1 \\
\Rightarrow\; & \frac{2}{(\log_3 x) - 1} - \frac{2}{\log_3 x} > 1 \\
\Rightarrow\; & \frac{\log_3 x}{[(\log_3 x) - 1]\log_3 x} - \frac{(\log_3 x) - 1}{[(\log_3 x) - 1]\log_3 x} > \frac{1}{2} \\
\Rightarrow\; & \frac{1}{[(\log_3 x) - 1]\log_3 x} > \frac{1}{2} \\
\Rightarrow\; & 0 < [(\log_3 x) - 1]\log_3 x < 2 \\
\Rightarrow\; & \left\{\begin{array}{l} (\log_3 x)^2 - (\log_3 x) > 0 \\ \text{e} \\ (\log_3 x)^2 - (\log_3 x) - 2 < 0 \end{array}\right. \\
\Rightarrow\; & \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (\log_3 x) > 0 \text{ e } (\log_3 x) > 1 \\ \text{ou} \\ (\log_3 x) < 0 \text{ e } (\log_3 x) < 1 \end{array}\right. \\ \text{e} \\ \left\{\begin{array}{l} [(\log_3 x) + 1] < 0 \text{ e } [(\log_3 x) - 2] > 0 \\ \text{ou} \\ [(\log_3 x) + 1] > 0 \text{ e } [(\log_3 x) - 2] < 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \\
\Rightarrow\; & \left\{\begin{array}{l} \log_3 x > 1 \text{ ou } \log_3 x < 0 \\ \text{e} \\ -1 < \log_3 x < 2 \end{array}\right. \\
\Rightarrow\; & -1 < \log_3 x < 0 \text{ ou } 1 < \log_3 x < 2 \\
\Rightarrow\; & \frac{1}{3} < x < 1 \text{ ou } 3 < x < 9.
\end{aligned}
$$

2ª Questão [Valor 1,0]: Elevando ambos os lados da equação ao quadrado (duas vezes), têm-se

$$\begin{aligned}
& x+\sqrt{4x-4}+2\sqrt{x+\sqrt{4x-4}}\sqrt{x-\sqrt{4x-4}}+x-\sqrt{4x-4}=x+3 \\
\Rightarrow\ & 2\sqrt{x^2-(4x-4)}=3-x \\
\Rightarrow\ & 4(x^2-4x+4)=x^2-6x+9 \\
\Rightarrow\ & 3x^2-10x+7=0 \\
\Rightarrow\ & x=1 \text{ ou} x=\frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Testando essas possibilidades na equação do enunciado, verifica-se que ambas são raízes verdadeiras da equação original.

3ª Questão [Valor 1,0]: Rearrajando os termos da equação do enunciado, e tirando a tangente de ambos os lados, a equação dada torna-se

$$\operatorname{tg}[\arg(z-z_1)-k\pi]=\operatorname{tg}[\arg(z-z_2)+\arg(z-z_3)].$$

Sejam $z=x+yi$, $z_2=a+bi$ e $z_3=a-bi$, com $b\neq 0$. Com isso, usando a fórmula da tangente da soma de dois ângulos

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

têm-se

$$\operatorname{tg}[\arg(z-z_1)-k\pi]=\operatorname{tg}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x-z_1}-k\pi\right]=\frac{\frac{y}{x-z_1}-0}{1-0}=\frac{y}{x-z_1}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}[\arg(z-z_2)+\arg(z-z_3)] &= \operatorname{tg}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y-b}{x-a}+\operatorname{arc\,tg}\frac{y+b}{x-a}\right] \\
&= \frac{\frac{y-b}{x-a}+\frac{y+b}{x-a}}{1-\frac{y-b}{x-a}\frac{y+b}{x-a}} \\
&= \frac{2y(x-a)}{(x-a)^2+(b^2-y^2)}.
\end{aligned}$$

Assim, devemos ter

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x-z_1}=\frac{2y(x-a)}{(x-a)^2+(b^2-y^2)} &\Rightarrow y[(x-a)^2+b^2-y^2]=y[2(x-a)(x-z_1)] \\
&\Rightarrow y[(x-z_1)^2+y^2]=y[(a-z_1)^2+b^2],
\end{aligned}$$

que corresponde ao eixo dos reais e à circunferência de centro em z_1 que passa por z_2 e z_3 (excluindo estes pontos, em que a função $\arg$ fica indefinida).

4ª Questão [Valor 1,0]: Resolvendo em f a equação a ser satisfeita, tem-se

$$f(x) = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4(9x - x^2)}}{2} = \frac{-9 \pm (2x - 9)}{2} = \begin{cases} -x \\ \text{ou} \\ (x - 9) \end{cases}.$$

Como $f(x) > 0$, então devemos ter $f(x) = (x - 9)$.

Para um número x de três algarismos $x = a_2a_1a_0 = (100a_2 + 10a_1 + a_0)$, com $a_2 \neq 0$, temos $f(x) = a_20a_0a_1 = (1000a_2 + 10a_0 + a_1)$, e a relação anterior equivale a

$$1000a_2 + 10a_0 + a_1 = 100a_2 + 10a_1 + a_0 - 9 \Rightarrow 900a_2 + 9(a_0 - a_1) + 9 = 0,$$

que não tem solução com $a_2 \neq 0$.

Para um número x de quatro algarismos $x = a_3a_2a_1a_0 = (1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0)$, com $a_3 \neq 0$, temos $f(x) = a_2a_3a_0a_1 = (1000a_2 + 100a_3 + 10a_0 + a_1)$, e a relação anterior equivale a

$$\begin{aligned} & 1000a_2 + 100a_3 + 10a_0 + a_1 = 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0 - 9 \\ \Rightarrow\ & 900(a_2 - a_3) + 9(a_0 - a_1) + 9 = 0 \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} a_2 = a_3 \\ \text{e} \\ a_1 - a_0 = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo, o menor x, com $a_3 \neq 0$, que satisfaz essas condições é dado por $x = 1110$.

5ª Questão [Valor 1,0]: A altura h de um tetraedro regular de aresta d é tal que

$$h^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{d\sqrt{3}}{2}\right)^2 = d^2 \Rightarrow h = \frac{d\sqrt{6}}{3}.$$

Com isto, o volume V desse tetraedro com área da base S_b é dado por

$$V = \frac{S_b h}{3} = \frac{\frac{d^2\sqrt{3}}{4}\frac{d\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{d^3\sqrt{2}}{12}.$$

Sejam d_1, h_1 e V_1 a aresta, a altura e o volume, respectivamente, do pequeno tetraedro regular formado pela segmentação do tetraedro inicial. No caso,

$$V_1 = \frac{d_1^3\sqrt{2}}{12} = \frac{V}{3} = \frac{d^3\sqrt{2}}{36} \Rightarrow d_1 = \frac{d}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{d_1\sqrt{6}}{3} = \frac{\frac{d}{\sqrt[3]{3}}\sqrt{6}}{3} = \frac{d\sqrt{2}\sqrt[6]{3}}{3} = \frac{d\sqrt[6]{24}}{3}.$$

Sejam d_2, h_2 e V_2 a aresta, a altura e o volume, respectivamente, do tetraedro regular formado pelos dois sólidos superiores resultantes da segmentação do tetraedro inicial. No caso,

$$V_2 = \frac{d_2^3\sqrt{2}}{12} = \frac{2V}{3} = \frac{d^3\sqrt{2}}{18} \Rightarrow d_2 = \frac{d\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$$

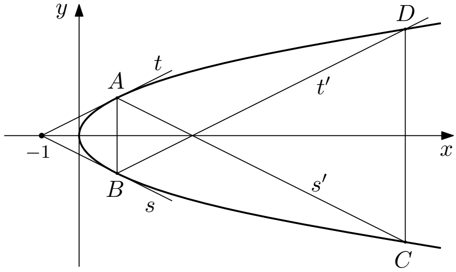
$$\Rightarrow h_2 = \frac{d_2\sqrt{6}}{3} = \frac{\frac{d\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\sqrt{6}}{3} = \frac{d\sqrt[6]{96}}{3}.$$

Com isto, as alturas dos dois sólidos inferiores são dadas por

$$h' = h_2 - h_1 = \frac{d\sqrt[6]{96}}{3} - \frac{d\sqrt[6]{24}}{3} = \frac{d\sqrt[6]{24}(\sqrt[6]{4}-1)}{3},$$

$$h'' = h - h_2 = \frac{d\sqrt{6}}{3} - \frac{d\sqrt[6]{96}}{3} = \frac{d(\sqrt[6]{216} - \sqrt[6]{96})}{3}.$$

6ª Questão [Valor 1,0]:



As retas s e t têm equação da forma $y = \pm a(x+1)$, cujas interseções com a parábola $y^2 = 2x$ são dadas por

$$\begin{aligned} & a^2(x+1)^2 = 2x \\ \Rightarrow\ & a^2x^2 + 2x(a^2-1) + a^2 = 0 \\ \Rightarrow\ & x = \frac{-2(a^2-1) \pm \sqrt{4(a^2-1)^2 - 4a^4}}{2a^2} = \frac{(1-a^2) \pm \sqrt{1-2a^2}}{a^2}. \end{aligned}$$

Para que essas interseções sejam únicas para cada reta, caracterizando retas tangentes à parábola, devemos ter $(1-2a^2) = 0$, ou seja, $a^2 = \frac{1}{2}$, de modo que as respectivas interseções A e B são tais que $x_{A,B} = \frac{1-a^2}{a^2} = 1$ e $y_{A,B} = \pm 2a = \pm\sqrt{2}$.

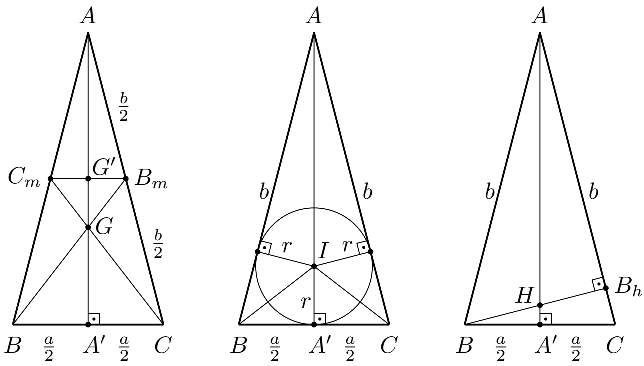
A reta t' é paralela à reta t e passa por $B \equiv (1, -\sqrt{2})$. Logo, t' é dada por $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-3)$, e suas interseções com a parábola são tais que

$$\frac{1}{2}(x-3)^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-9) = 0$$

de modo que o ponto D é caracterizado por $x_D = 9$ e $y_D = \sqrt{2x_D} = 3\sqrt{2}$.

Com isto, têm-se $AB = 2\sqrt{2}$ e, por simetria, $CD = 6\sqrt{2}$, de modo que $AB/CD = 1/3$.

7ª Questão [Valor 1,0]:



Seja a notação indicada na figura acima: base $BC = a$, lados $AB = AC = b$, raio do círculo inscrito r, A' é pé da altura por A, C_m e B_m são os pontos médios de AB e AC, respectivamente, G' é a interseção de C_mB_m com AA', B_h é o pé da altura por B. Com isto, a altura $AA' = h$, o perímetro $2p$ e a área S do triângulo são tais que

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}, \quad 2p = a + 2b, \quad S = \frac{ah}{2}.$$

Na figura da esquerda, da semelhança dos triângulos ΔAC_mB_m e ΔABC, pelo conceito de base média,

$$\frac{AG'}{AA'} = \frac{C_mB_m}{BC} \Rightarrow AG' = \frac{h}{2}.$$

Com isto, $G'A' = \frac{h}{2}$ e da semelhança dos triângulos ΔGC_mB_m e ΔGBC,

$$\frac{GG'}{C_mB_m} = \frac{GA'}{BC} \Rightarrow GA' = 2GG' = 2(\frac{h}{2} - GA') \Rightarrow GA' = \frac{h}{3}.$$

Da figura central, podemos escrever que

$$S = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{AIC} = \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} = pr \Rightarrow IA' = r = \frac{ah}{2p}.$$

Na figura da direita, pela semelhança dos triângulos $\Delta BA'H$, ΔBB_hC e $\Delta AA'C$, têm-se

$$\frac{BA'}{HA'} = \frac{BB_h}{B_hC} = \frac{AA'}{A'C} \Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{HA'} = \frac{BB_h}{B_hC} = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Rightarrow HA' = \frac{a^2}{4h}.$$

Com isto,

$$\begin{aligned}
&d = GA' - IA' = IA' - HA' \\
&\Rightarrow \frac{h}{3} - \frac{ah}{2p} = \frac{ah}{2p} - \frac{a^2}{4h} \\
&\Rightarrow 4h^2p - 12ah^2 + 3a^2p = 0 \\
&\Rightarrow (4b^2 - a^2)\frac{(a+2b)}{2} - 3a(4b^2 - a^2) + 3a^2\frac{(a+2b)}{2} = 0 \\
&\Rightarrow (4b^2 - a^2)(2b - 5a) + 3a^2(a + 2b) = 0 \\
&\Rightarrow (2b - a)(2b - 5a) + 3a^2 = 0 \\
&\Rightarrow 4(b^2 - 3ba + 2a^2) = 0 \\
&\Rightarrow b = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}\, a = \frac{3 \pm 1}{2}\, a.
\end{aligned}$$

O caso $b = a$ correponde ao triângulo equilátero, em que $G \equiv I \equiv H$ e $d = 0$. Logo, $b = 2a$, de modo que $2p = 5a$, $h = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ e assim

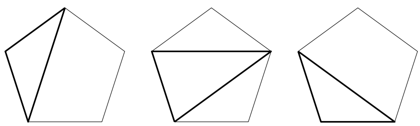
$$d = \frac{h}{3} - \frac{ah}{2p} = \frac{a\sqrt{15}}{6} - \frac{a\sqrt{15}}{10} = \frac{a\sqrt{15}}{15} \Rightarrow a = d\sqrt{15}.$$

Com isto,

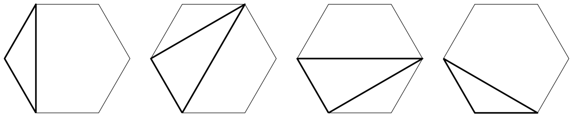
$$\begin{aligned}
2p &= 5a = 5d\sqrt{15}, \\
S &= \frac{ah}{2} = \frac{15d^2\sqrt{15}}{4}.
\end{aligned}$$

8ª Questão [Valor 1,0]: Um lado qualquer de um polígono de n lados, pode estar conectado a $(n-2)$ vértices do polígono. Ao se fazer uma dessas conexões, divide-se o polígono em 2 ou 3 partes. Pode-se, então, analisar a divisão dessas partes restantes para saber o total de divisões possíveis.

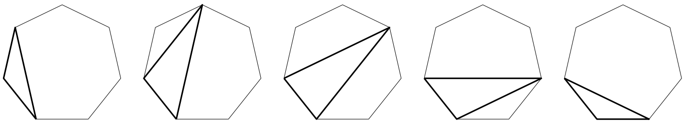
Para um quadrilátero qualquer ($n = 4$), é imediato ver que há duas divisões possíveis.



Para o pentágono $n = 5$, um lado qualquer tem $(n-2) = 3$ conexões possíveis, conforme visto na figura acima. Na primeira conexão, divide-se o polígono em 1 triângulo e 1 quadrilátero (que permite 2 divisões distintas); na segunda conexão, divide-se o pentágono em 3 triângulos; na terceira conexão, divide-se o pentágono mais uma vez em 1 triângulo e 1 quadrilátero (2 divisões). Assim, podemos dividir o pentágono de $(2+1+2) = 5$ modos distintos.



Para o hexágono (ver figura acima), o mesmo procedimento divide o polígono em 1 triângulo e 1 pentágono (5 divisões possíveis); 2 triângulos e 1 quadrilátero (2 divisões); 1 quadrilátero (2 divisões) e 2 triângulos; 1 pentágono (5 divisões) e 1 triângulo. Assim, no total têm-se $(5+2+2+5)=14$ possibilidades.



Para o heptágono (ver figura acima), o procedimento anterior divide o polígono em 1 triângulo e 1 hexágono (14 divisões possíveis); 2 triângulos e 1 pentágono (5 divisões); 2 quadriláteros (2×2 divisões) e 1 triângulo; 1 pentágono (5 divisões) e 2 triângulos; 1 hexágono (14 divisões) e 1 triângulo. Com isto, para o heptágono totalizam-se $(14+5+4+5+14)=42$ possibilidades.

Para o octógono, o mesmo procedimento divide o polígono em 1 triângulo e 1 heptágono (42 divisões possíveis); 2 triângulos e 1 hexágono (14 divisões); 1 quadrilátero (2 divisões), 1 triângulo e 1 pentágono (5 divisões); 1 pentágono (5 divisões), 1 triângulo e 1 quadrilátero (2 divisões); 1 hexágono (14 divisões) e 2 triângulos; 1 heptágono (42 divisões) e 1 triângulo. Logo, no octógono, totalizam-se $(42+14+2\times 5+5\times 2+14+42)=132$ divisões possíveis.

Para o eneágono, o procedimento anterior divide o polígono em 1 triângulo e 1 octógono (132 divisões possíveis); 2 triângulos e 1 heptágono (42 divisões); 1 quadrilátero (2 divisões), 1 triângulo e 1 hexágono (14 divisões); 2 pentágonos (5×5 divisões) e 1 triângulo; 1 hexágono (14 divisões), 1 triângulo e 1 quadrilátero (2 divisões); 1 heptágono (42 divisões) e 2 triângulos; 1 octógono (132 divisões) e 1 triângulo. Assim, no eneágono, têm-se $(132+42+2\times 14+5\times 5+14\times 2+42+132)=429$ possibilidades.

9ª Questão [Valor 1,0]: Seja l_i a i-ésima linha do determinante Δ. Fazendo $l_1 = (l_1 - l_3)$ e $l_2 = (l_2 - l_3)$, sem alterar o valor do Δ, têm-se

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{array} \right|$$
$$= (b+c)^2(a+c)^2(a+b)^2 + 2a^2b^2c^2 - a^2c^2(a+c)^2 - b^2c^2(b+c)^2 - a^2b^2(a+b)^2.$$

Definindo os termos

$$\begin{aligned} T_1 &= (b+c)^2(a+c)^2(a+b)^2, \\ T_2 &= 2a^2b^2c^2, \\ T_3 &= a^2c^2(a+c)^2 + b^2c^2(b+c)^2 + a^2b^2(a+b), \end{aligned}$$

têm-se

$$\begin{aligned} T_1 &= (S-a)^2(S-b)^2(S-c)^2 \\ &= [S^3 - (a+b+c)S^2 + (bc+ac+ab)S - abc]^2 \\ &= [(bc+ac+ab)S - P]^2 \\ &= (bc+ac+ab)^2S^2 - 2(bc+ac+ab)SP + P^2, \end{aligned}$$

$$T_2 = 2P^2,$$

$$\begin{aligned} T_3 &= a^2c^2(S-b)^2 + b^2c^2(S-a)^2 + a^2b^2(S-c)^2 \\ &= S^2(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2) - 2S(a^2c^2b + b^2c^2a + a^2b^2c) + 3P^2 \\ &= S^2(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2) - 2SP(ac+bc+ab) + 3P^2, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \Delta &= T_1 + T_2 - T_3 \\ &= (bc+ac+ab)^2S^2 - S^2(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2) \\ &= S^2(2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2) \\ &= S^2[2P(a+b+c)] \\ &= 2PS^3. \end{aligned}$$

10ª Questão [Valor 1,0]:

a) Para um polinômio de coeficientes inteiros, as possíveis raízes inteiras são os divisores de seu termo independente a_0. No caso, como $a_0 \in \{0, 1\}$, então, a princípio, as raízes inteiras de $P(x)$ são $x \in \{-1, 0, 1\}$. Porém,

$$P(1) = 1 + \sum_{i=0}^{2014} a_i \geq 1 > 0,$$

já que $a_i \geq 0$. Logo $x = 1$ não é raiz de $P(x)$, de modo que as únicas possíveis raízes inteiras de $P(x)$ são $x = -1$ e $x = 0$. De fato, $x = 0$ é raiz para qualquer $P(x)$ em que $a_0 = 0$. Já $x = -1$ é raiz, por exemplo, do caso $P(x) = x^{2015} + 1$.

b) Pelo item anterior, para que $P(x)$ tenha duas raízes inteiras distintas, necessariamente devemos ter $P(-1) = P(0) = 0$. Assim $a_0 = 0$ e ainda

$$\begin{aligned}
P(-1) &= -1 + \sum_{i=1}^{2014} a_i(-1)^i \\
&= -1 + \sum_{i=1}^{1007} a_{2i-1}(-1)^{2i-1} + \sum_{i=1}^{1007} a_{2i}(-1)^{2i} \\
&= -1 - \sum_{i=1}^{1007} a_{2i-1} + \sum_{i=1}^{1007} a_{2i} \\
&= -1 - N_{\text{impar}} + N_{\text{par}} \\
&= 0 \\
&\Rightarrow N_{\text{par}} = N_{\text{impar}} + 1,
\end{aligned}$$

onde N_{par} e N_{impar} são os números de coeficientes a_i não nulos (ou seja, iguais a 1), de índice i par e ímpar, respectivamente. Para um dado par de valores $(N_{\text{par}}, N_{\text{impar}})$, podemos formar

$$N_P(N_{\text{par}}, N_{\text{impar}}) = \binom{1007}{N_{\text{par}}} \times \binom{1007}{N_{\text{impar}}}$$

polinômios distintos. Como $1 \leq N_{\text{par}} \leq 1007$, temos então que o número total N de polinômios $P(x)$ que possuem duas raízes inteiras distintas é

$$N = \sum_{N_{\text{par}}=1}^{1007} N_P(N_{\text{par}}, N_{\text{par}} - 1) = \sum_{N_{\text{par}}=1}^{1007} \binom{1007}{N_{\text{par}}} \times \binom{1007}{N_{\text{par}} - 1}.$$

1.4 Vestibular 2013/2014

1.4.1 Prova Objetiva

1ª Questão, [Valor: 0,25]: (C) $2^{2^{2^2}}$
Analisando cada número:

- $\pi.8! = \pi.8.7.6.5.4.3.2 = \pi.2^7.3^2.5.7 = 315\pi.2^7$.
- $9^9 = 3^{18}$.
- $2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 512.2^7$.
- $3^{3^3} = 3^{27}$.
- $2^{13}.5^3 = 125.2^{13} = 8000.2^7$.

Com isso, é fácil ver que (D) > (B), (E) > (C), (B) > (C) e (A) > (C), de modo que (C) é o menor número de todos.

2ª Questão, [Valor: 0,25]: (X)
Do enunciado,

$$A^TA = \begin{bmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{bmatrix}, \quad \text{com} \left\{ \begin{array}{l} x = a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ y = ab + bc + ca = 0 \end{array} \right. ,$$

pois $A^TA = I$. Porém, como $a, b, c > 0$, então $y > 0$, de modo que não existem a, b, c que satisfazem as condições do problema.

3ª Questão, [Valor: 0,25]: (C) $\{6 \leq k \leq 9\}$
Para termos $W \neq \emptyset$, devemos ter

$$2k + 1 \leq 3k - 5 \Rightarrow k \geq 6.$$

Além disso, para satisfazer a segunda condição, W deve ser um subconjunto de S, de modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq 2k + 1 \\ 22 \geq 3k - 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k \geq 1 \\ k \leq 9 \end{array} \right. \Rightarrow 1 \leq k \leq 9.$$

Determinando a interseção dos possíveis valores de k, tem-se $6 \leq k \leq 9$.

4ª Questão, [Valor: 0,25]: (B) $e^2 + e^{-1} + e$
Sejam $a = \ln x$, $b = \ln y$ e $c = \ln z$. Tirando o logaritmo natural das relações dadas. têm-se

$$\left\{ \begin{array}{l} b + c + \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}a = 1 \\ a + 3b + 2c = 1 \\ a - c - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + 4b + 6c = 4 \\ a + 3b + 2c = 1 \\ 2a - b - 3c = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = e^2 \\ y = e^{-1} \\ z = e \end{array} \right. ,$$

de modo que $(x + y + z) = e^2 + e^{-1} + e$.

5ª Questão, [Valor: 0,25]: (D) $\frac{16}{5}$

Como $c = \sqrt{3}$ e $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então $a = 2$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1$. Com isso, a elipse é descrita por

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

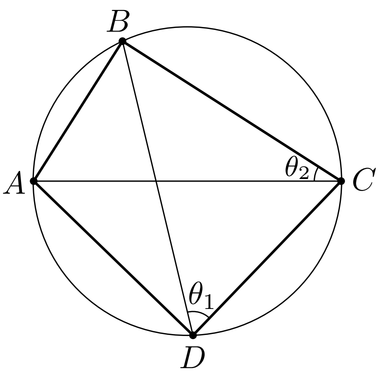
cujas interseções com as retas $y = \pm x$ são, em ambos os casos,

$$\left(\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}, \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

Logo, a área S do retângulo $ABCD$ é

$$S = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}.$$

6ª Questão, [Valor: 0,25]: (E) $b^2 - 2c = 1$



Como $A\hat{B}C$ e $C\hat{D}A$ são retos, então o quadrilátero é inscritível num círculo de diâmetro AC, conforme ilustrado na figura acima. Usando a notação $\theta_1 = B\hat{D}C$ e $\theta_2 = B\hat{C}A$, como $A\hat{D}B = A\hat{C}B$, então

$$A\hat{D}C = A\hat{D}B + B\hat{D}C = \theta_2 + \theta_1 = 90^{\text{o}}.$$

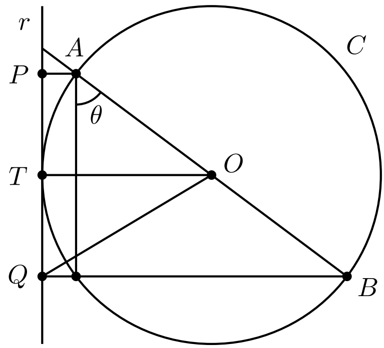
Assim, usando as relações de Girard, devemos ter

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 = -b \\ \operatorname{sen}\theta_1 . \operatorname{sen}\theta_2 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}(90^{\text{o}} - \theta_1) = -b \\ \operatorname{sen}\theta_1 . \operatorname{sen}(90^{\text{o}} - \theta_1) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\theta_1 + \cos\theta_1 = -b \\ \operatorname{sen}\theta_1 . \cos\theta_1 = c \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação ao quadrado na segunda, tem-se

$$\operatorname{sen}^2\theta_1 + 2\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_1 + \cos^2\theta_1 = b^2 \Rightarrow 1 + 2c = b^2.$$

7ª Questão, [Valor: 0,25]: (B) $\frac{\pi}{6}$



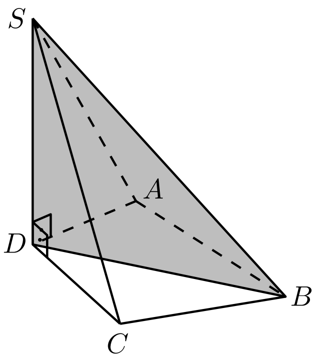
Pelo teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ΔOTQ,

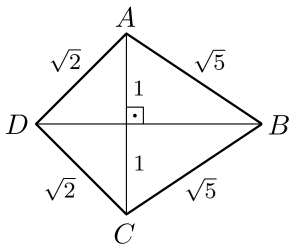
$$QT = \sqrt{OQ^2 - OT^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\,R\right)^2 - R^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,R.$$

Como O é médio de AB, então T é médio de PQ e assim,

$$\cos\theta = \frac{PT}{AO} = \frac{QT}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

8ª Questão, [Valor: 0,25]: (B) $\sqrt{7}$





Com os dados do problema, é simples determinar que

$$DB = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} + \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1} = 1 + 2 = 3.$$

Assim, dos triângulos retângulos ΔSDA e ΔSDB, têm-se

$$\begin{cases} SD^2 = SA^2 - DA^2 = SA^2 - 2 \\ SD^2 = SB^2 - DB^2 = SB^2 - 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow SA^2 - SB^2 = (SA + SB)(SA - SB) = 7(SA - SB) = -7,$$

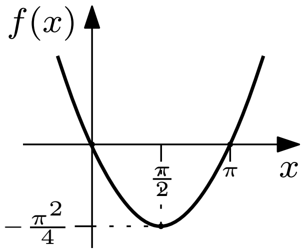
de modo que

$$\begin{cases} SA + SB = 7 \\ SA - SB = -1 \end{cases} \Rightarrow SA = 3 \text{ e } SB = 4 \Rightarrow SD = \sqrt{SA^2 - 2} = \sqrt{7}.$$

Logo, o volume V da pirâmide é dado por

$$V = \frac{S_{ABCD} \times SD}{3} = \frac{\frac{3\times 2}{2} \times \sqrt{7}}{3} = \sqrt{7}.$$

9ª Questão, [Valor: 0,25]: (D) $f(a) > f(d) > f(b) > f(c)$



Pelo gráfico de $f(x)$ ilustrado acima, nota-se que o valor de $f(x)$ é tão menor quanto mais próximo x está de $\frac{\pi}{2}$, o que pode ser medido pelo módulo de seu seno (se o ângulo está no 1º ou 2º quadrantes). Do enunciado,

$$\begin{cases} \operatorname{sen} a = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} b = \frac{5}{4} \\ \cos c = -\frac{1}{3} \\ \operatorname{cotg} d = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 a = \frac{1}{9} \approx 0{,}11 \\ \operatorname{sen}^2 b = \frac{25}{41} \approx 0{,}61 \\ \operatorname{sen}^2 c = \frac{8}{9} \approx 0{,}89 \\ \operatorname{sen}^2 d = \frac{16}{41} \approx 0{,}39 \end{cases},$$

com a e b no primeiro quadrante e c e d no terceiro quadrante, de acordo com as respectivas imagens das funções trigonométricas inversas. Dos valores de $\operatorname{sen}^2 x$ acima, c é o mais próximo de $\frac{\pi}{2}$, seguido de b, d e a, de modo que

$$f(a) > f(d) > f(b) > f(c).$$

10ª Questão, [Valor: 0,25]: (C) 3

O sexto termo t_6 é dado por

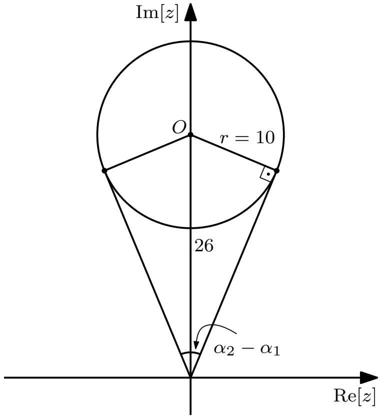
$$\begin{aligned} t_6 &= \binom{7}{5} \left(2^{\log_2 \sqrt{9^{(x-1)}+7}}\right)^2 \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{5}\log_2\left(3^{(x-1)}+1\right)}}\right)^5 \\ &= \frac{7!}{5!\,2!} \left(\sqrt{9^{(x-1)}+7}\right)^2 \left(\frac{1}{2^{\log_2\left(3^{(x-1)}+1\right)}}\right) \\ &= 21\left(\frac{9^{(x-1)}+7}{3^{(x-1)}+1}\right) \\ &= 21\left(\frac{3^{2x}+63}{3.3^x+9}\right). \end{aligned}$$

Assim, como $t_6 = 84$, tem-se

$$3^{2x} - 12.3^x + 27 = 0 \Rightarrow 3^x = \frac{12 \pm \sqrt{144-108}}{2} = \frac{12\pm 6}{2} = 3 \text{ ou } 9 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } 2.$$

Logo, a soma S dos possíveis valores de x é igual a $S = (1+2) = 3$.

11ª Questão, [Valor: 0,25]: (D) $2.\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$



O lugar geométrico desejado no plano complexo é o círculo de centro $O \equiv (0, 26i)$ e raio $r = 10$, conforme ilustrado na figura acima. Logo, os valores máximo e mínimo de seu argumento é definido pelas tangentes ao círculo a partir da origem, de modo que

$$\mathrm{sen}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\,\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \alpha_2-\alpha_1 = 2.\,\mathrm{arctg}\,\frac{5}{12}.$$

12ª Questão, [Valor: 0,25]: (B) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Sejam a, b e c os três termos consecutivos da PA citados no enunciado, tais que $(a+c) = 2b$. Pelas relações de Girard, têm-se

$$\begin{cases} S_1 = a+b+c = b+c \\ S_2 - \frac{1}{2} = (a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{2} = bc \end{cases}.$$

Assim, da primeira equação $a = 0$, de modo que $c = 2b$, e a segunda equação nos dá que

$$b^2 + 4b^2 - \frac{1}{2} = 2b^2 \Rightarrow 3b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

pois a PA é crescente. Logo, como $a = 0$, a razão r da PA é dada por $r = b = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

13ª Questão, [Valor: 0,25]: (A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
As raízes da equação dada são

$$y = \frac{9 \pm 81 - 32}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} = 8 \text{ e } 1.$$

Para o intervalo dado de x, tem-se $0 < \operatorname{sen} x < 1$, de modo que

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x + \cdots = \operatorname{sen}^2 x\left(\frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\right) = \operatorname{sen}^2 x\left(\frac{1}{cos^2 x}\right) = \operatorname{tg}^2 x,$$

e a expressão da raiz dada por ser simplificada para

$$e^{\operatorname{tg}^2 x \ \ln 2} = e^{\ln 2^{\operatorname{tg}^2 x}} = 2^{\operatorname{tg}^2 x} = 8 = 2^3.$$

Assim, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, devemos ter

$$\operatorname{tg}^2 x = 3 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

14ª Questão, [Valor: 0,25]: (E) 0
Desenvolvendo a expressão E dada, têm-se

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{sen}(\log x).\operatorname{sen}(\log y) - \frac{1}{2}\left[\cos(\log\frac{x}{y}) - \cos(\log x.y)\right] \\ &= \operatorname{sen}(\log x).\operatorname{sen}(\log y) - \frac{1}{2}\{\cos[(\log x) - (\log y)] - \cos[(\log x) + (\log y)]\} \\ &= \operatorname{sen}(\log x).\operatorname{sen}(\log y) - \frac{1}{2}[\,2\operatorname{sen}(\log x)\operatorname{sen}(\log y)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

15ª Questão, [Valor: 0,25]: (A) 17
Há, na festa, um total de $(n+2)$ pais. As n famílias com 2 filhos podem formar $n \times C_2^3 = 3n$ duplas distintas e as 2 famílias com 1 filho podem formar $2 \times C_1^2 = 2$ duplas distintas para compor a equipe que compete com o pai escolhido.

Logo, o total T de formas distintas (considerando também a cor) para compor as equipes é tal que

$$T = 2 \times (n+2) \times (3n+2) = 2014 \Rightarrow 3n^2 + 8n - 1003 = 0,$$

de modo que

$$n = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 12.1003}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{12100}}{6} = \frac{-8 \pm 110}{6} \Rightarrow n = \frac{102}{6} = 17.$$

1.4.2 Prova de Matemática

1ª Questão [Valor 1,0]: Sejam $x_{1,2,3,4} = (\pm a \pm bi)$, com $a, b \in \mathbb{R}^*$, e $x_5 = |x_{1,2,3,4}| = \sqrt{a^2+b^2}$ as raízes de $P(x)$. Por Girard, têm-se

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_5 = 3.$$

Com isso, $P(x)$ pode ser decomposto da forma

$$P(x) = (x-3)(x^4 + 10x^2 + 81),$$

de modo que as raízes $x_{1,2,3,4}$ são dadas por

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4.81}}{2}} = \pm\sqrt{-5 \pm 2i\sqrt{14}}.$$

2ª Questão [Valor 1,0]: Fazendo a primeira coluna receber a soma dela mesma com a terceira coluna e, em seguida, fazendo a nova primeira linha receber ela mesma subtraída da nova quarta linha, tem-se que o determinante Δ desejado é igual a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & w & 0 & i \\ 0 & 1 & -i & w^2 \\ 0 & w & i-1 & 1 \\ 1 & w & 1 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & w^2 \\ 0 & w & i-1 & 1 \\ 1 & w & 1 & i \end{vmatrix}.$$

Assim, usando Laplace na nova primeira linha, tem-se

$$\Delta = -1.\begin{vmatrix} 0 & 1 & w^2 \\ 0 & w & 1 \\ 1 & w & i \end{vmatrix} = -1(1-w^3) = \left(\operatorname{cis}^3 \frac{2\pi}{3}\right) - 1 = (\operatorname{cis} 2\pi) - 1 = 0.$$

3ª Questão [Valor 1,0]: Desenvolvendo o produtório da equação, tem-se

$$\prod_{z=0}^{y-1}(y-z) = y\times(y-1)\times(y-2)\times\ldots\times 2\times 1 = y!,$$

de modo que a equação é equivalente a $x^2 = \sum_{y=1}^{x} y!$. Na tabela abaixo, nota-se que o lado direto da equação é maior do que o lado esquerdo para $x = 4$. Quando x aumenta de uma unidade, o valor de x^2 aumenta de $(2x+1)$ e o valor do lado direito da equação aumenta de $(x+1)!$. Como $(x+1)! > (2x+1)$, para todo $x \geq 2$, então $x = 1$ e $x = 3$ indicados na tabela são, de fato, os únicos valores que satisfazem a equação do problema.

x	x^2	x!	$\sum_{y=1}^{x} y!$
1	1	1	1
2	4	2	3
3	9	6	9
4	16	24	33

4ª Questão [Valor 1,0]: Pelo domínio da função logaritmo, devemos ter

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos x \neq 1 \\ \operatorname{sen} x > 0 \end{cases} \Rightarrow 2k\pi < x < \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Usando a propriedade de mudança de base, a equação do enunciado pode ser desenvolvida da forma

$$4 = \left(\frac{\log\ \operatorname{sen}^2 x}{\log \cos x}\right)\cdot\left(\frac{\log\ \operatorname{sen} x}{\log \cos^2 x}\right) = \frac{2\log^2\ \operatorname{sen} x}{2\log^2\ \cos x} = \log^2_{\cos x}\ \operatorname{sen} x,$$

de modo que

$$\log_{\cos x}\ \operatorname{sen} x = \pm 2 \Rightarrow\ \operatorname{sen} x = \cos^{\pm 2} x.$$

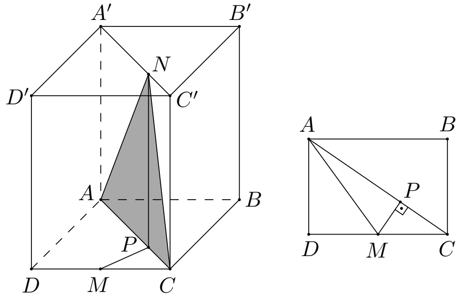
O caso $\operatorname{sen} x = \cos^{-2} x$ não gera solução satisfazendo $0 <\ \operatorname{sen} x, \cos x < 1$. Assim,

$$\operatorname{sen} x = \cos^2 x \Rightarrow \cos^4 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}.$$

Descartando a raiz espúria, tem-se

$$\cos^2 x =\ \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi +\ \operatorname{asen} \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

5ª Questão [Valor 1,0]:



Aplicando o Teorema de Pitágoras na figura em destaque da base $ABCD$, onde $DM = MC$, têm-se

$$AM^2 = (AD^2 + DM^2) = (AP^2 + PM^2) = (AP^2 + MC^2 - PC^2)$$
$$\Rightarrow AD^2 = AP^2 - PC^2.$$

Logo, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo em destaque,

$$AD^2 = (NA^2 - NP^2) - (NC^2 - NP^2) = NA^2 - NC^2 = k,$$

de modo que $AD = \sqrt{k}$.

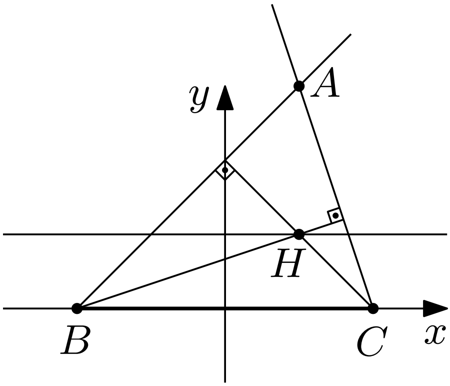
6ª Questão [Valor 1,0]: Usando a fórmula de soma de PG, o número N do enunciado por ser escrito como

$$\begin{aligned}
N &= \sqrt[3]{37\times 1\underbrace{001001\ldots001}_{3\times 29\text{ algarismos}} - 10^{30}\times \underbrace{111\ldots1}_{30\text{ algarismos}}} \\
&= \sqrt[3]{37\sum_{i=0}^{29}1000^i - 10^{30}\sum_{i=0}^{29}10^i} \\
&= \sqrt[3]{37\left(\frac{1000^{30}-1}{1000-1}\right) - 10^{30}\left(\frac{10^{30}-1}{10-1}\right)} \\
&= \sqrt[3]{\left(\frac{10^{90}-1}{27}\right) - 10^{30}\left(\frac{10^{30}-1}{9}\right)} \\
&= \sqrt[3]{\frac{10^{90}-3\times 10^{60}+3\times 10^{30}-1}{27}},
\end{aligned}$$

de modo que

$$N = \sqrt[3]{\frac{\left(10^{30}-1\right)^3}{3^3}} = \frac{10^{30}-1}{3} = \underbrace{333\ldots3}_{30\text{ algarismos}}.$$

7ª Questão [Valor 1,0]:



a) Na figura acima, têm-se $B \equiv (-\frac{a}{2}, 0)$, $C \equiv (\frac{a}{2}, 0)$ e $H \equiv (x_0, \frac{a}{4})$. Com isso as retas BH e CH são descritas por

$$\left\{ \begin{array}{l} BH : y = \frac{a}{4(2x_0+a)}\,(2x + a) \\ CH : y = \frac{a}{4(2x_0-a)}\,(2x - a) \end{array} \right. .$$

O lado AB passa por B e é perpendicular a CH. Analogamente, o lado AC passa por C e é perpendicular a BH. Logo, as retas suportes desses lados são descritas por

$$\left\{ \begin{array}{l} AB : y = \frac{2(a-2x_0)}{a}\,(a + 2x) \\ AC : y = \frac{2(a+2x_0)}{a}\,(a - 2x) \end{array} \right. \Rightarrow A \equiv (x_0, \frac{2(a^2 - 4x_0^2)}{a}),$$

de modo que o lugar geométrico do vértice A é a parábola $y = \frac{2(a^2-4x^2)}{a}$, excluindo os pontos B e C, com vértice em $(0, 2a)$.

b) No caso, a área do triângulo ΔABC é dada por $\frac{y_A a}{2}$, onde $y_A > 0$ é a ordenada do ponto A.

Pela equação da parábola, o valor de $y_A > 0$ pode ser tão pequeno quanto se queira, de modo que a área mínima do triângulo é também tão pequena quanto se queira.

Caso a área solicitada fosse a <u>máxima</u>, devemos maximizar y_A, que corresponde ao vértice da parábola em que $y_A = 2a$, de modo que a área máxima é a^2.

8ª Questão [Valor 1,0]:

- Se todos os alunos fizerem a prova individualmente, há 1 possibilidade apenas dos alunos se organizarem;
- Se houver 1 par apenas, há $\binom{9}{2} = \frac{9!}{7!\,2!} = 36$ possibilidades de se compor esse par, e os demais alunos fazem a prova individualmente;
- Se houver 2 pares, há $\binom{9}{4} = \frac{9!}{5!\,4} = 126$ possibilidades de se escolherem os 4 alunos que formarão os pares, 3 possibilidades de se formarem os 2 pares (dados que os 4 alunos já foram escolhidos), e os demais alunos fazem a prova individualmente;
- Se houver 3 pares, há $\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!\,3} = 84$ possibilidades de se escolherem os 6 alunos que formarão os pares, $5\times 3 = 15$ possibilidades de se formarem os 3 pares (dados que os 6 alunos já foram escolhidos), e os demais alunos fazem a prova individualmente;
- Se houver 4 pares, há $\binom{9}{8} = \frac{9!}{8!\,1} = 9$ possibilidades de se escolherem os 8 alunos que formarão os pares, $7\times 5\times 3 = 105$ possibilidades de se formarem os 4 pares (dados que os 8 alunos já foram escolhidos), e o aluno restante faz a prova individualmente.

Com isto, o total T de possibilidades dos alunos se organizarem é

$$T = 1 + 36 + 126\times 3 + 84\times 15 + 9\times 105 = 1 + 36 + 378 + 1260 + 945 = 2620.$$

9ª Questão [Valor 1,0]: Desenvolvendo a primeira equação, na qual devemos ter $x, y > 0$,

$$3^{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{3^{\sqrt{x}}}{3^{\sqrt{y}}} = \frac{y}{x} \Rightarrow x3^{\sqrt{x}} = y3^{\sqrt{y}}.$$

Analisando a derivada da função $f(x) = x3^{\sqrt{x}}$, podemos escrever que

$$f'(x) = 3^{\sqrt{x}} + x(3^{\sqrt{x}})' = 3^{\sqrt{x}} + \frac{x3^{\sqrt{x}}\ln 3}{2\sqrt{x}} = 3^{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{\ln 3}{2}\sqrt{x}\right),$$

pois, denotando $g(x) = 3^{\sqrt{x}}$,

$$\ln g(x) = \sqrt{x}\ln 3 \Rightarrow (\ln g(x))' = \frac{1}{g(x)}.g'(x) = (\sqrt{x})'\ln 3 = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\ln 3$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{g(x)\ln 3}{2\sqrt{x}} = \frac{3^{\sqrt{x}}\ln 3}{2\sqrt{x}}.$$

Logo, $f'(x) > 0$, para todo $x > 0$, de modo que $f(x)$ é sempre crescente, e assim $x3^{\sqrt{x}} = y3^{\sqrt{y}}$ se e somente se $x = y$.

Usando essa relação na segunda equação dada, tem-se

$$4.2^x + 2^{3x} = 5.2^{2x} \Rightarrow 2^x(2^{2x} - 5.2^x + 4) = 0 \Rightarrow 2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = 1 \text{ ou } 4.$$

Considerando que $x > 0$, conforme indicado no início da solução, o sistema dado tem então uma única solução $x = y = 2$.

10ª Questão [Valor 1,0]: (baseada em solução do rumoaoita.com) Sejam as relações básicas de um triângulo qualquer:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen} \hat{C} = pr \\ \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R \end{cases}.$$

Usando a desigualdade das médias, $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$, têm-se

$$\frac{1}{2}\, ab\frac{c}{2R} = pr \Rightarrow rR = \frac{abc}{4p} \leq \frac{\frac{(a+b+c)^3}{27}}{4p} \Rightarrow rR \leq \frac{8p^3}{108p} \Rightarrow rR \leq \frac{2p^2}{27}.$$

Além disto,

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{a+b+c}{\operatorname{sen} \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{2p}{\operatorname{sen} \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}} \\ \Rightarrow rR &= \frac{pr}{\operatorname{sen} \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{S}{\operatorname{sen} \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}} \geq \frac{S}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \\ \Rightarrow rR &\geq \frac{2\sqrt{3}}{9}\, S, \end{aligned}$$

pois a função $\operatorname{sen} x$ é côncava no intervalo $x \in (0, \pi)$, de modo que a desigualdade de Jensen nos dá que

$$\begin{aligned} &\frac{\operatorname{sen} \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}}{3} \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{3}\right) \\ &\Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C} \leq 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \\ &\Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

1.5 Vestibular 2012/2013

1.5.1 Prova Objetiva

1ª Questão, [Valor: 0,25]: (B) $2a = b$
Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes de $P(x)$ e r_1, r_2 e r'_3 as raízes de $Q(x)$. Por Girard, têm-se

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 + r_2 + r_3 = -a \\ r_1r_2 + r_3(r_1 + r_2) = 0 \\ r_1r_2r_3 = -18 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l} r_1 + r_2 + r'_3 = 0 \\ r_1r_2 + r'_3(r_1 + r_2) = b \\ r_1r_2r'_3 = -12 \end{array}\right. ,$$

e assim

$$\left\{\begin{array}{l} r'_3 - r_3 = a \\ \frac{r_3}{r'_3} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow r_3 = -3a \text{ e } r'_3 = -2a.$$

Substituindo esses valores nos sistemas originais, têm-se $(r_1 + r_2) = 2a$ e ainda

$$\left\{\begin{array}{l} r_1r_2 + (-3a)(2a) = 0 \\ r_1r_2 + (-2a)(2a) = b \end{array}\right. \Rightarrow 6a = b + 4a \Rightarrow b = 2a.$$

2ª Questão, [Valor: 0,25]: (B) $\operatorname{tg}(9^{\circ})$
Lembrando que

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\ &= \cos 2\theta \cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta \\ &= [(2\cos^2\theta - 1) - 2(1 - \cos^2\theta)]\cos\theta \\ &= (4\cos^2\theta - 3)\cos\theta, \end{aligned}$$

então a expressão E do enunciado pode ser reescrita como

$$E = \frac{\cos 27^{\circ}}{\cos 9^{\circ}} \times \frac{\cos 81^{\circ}}{\cos 27^{\circ}} = \frac{\cos 81^{\circ}}{\cos 9^{\circ}} = \frac{\operatorname{sen} 9^{\circ}}{\cos 9^{\circ}} = \operatorname{tg} 9^{\circ}.$$

3ª Questão, [Valor: 0,25]: (C) $[10, 15)$

Para $x > 0$ e $3x \neq 1$, fazendo a mudança do logaritmo para a base 3, a equação do enunciado se torna

$$\frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3 3x} + \log_3^2 x = 1 \Rightarrow \frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} = 1 - \log_3^2 x = (1 - \log_3 x)(1 + \log_3 x)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \text{ou} \\ (1 + \log_3 x)^2 = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \log_3 x = 1, 0 \text{ ou } -2$$
$$\Rightarrow x = 3^1, 3^0 \text{ ou } 3^{-2},$$

de modo que a soma S dos quadrados das soluções reais é dada por

$$S = 3^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 10 + \frac{1}{81} \Rightarrow S \in [10, 15).$$

4ª Questão, [Valor: 0,25]: (B) I e II apenas

I) Do enunciado,

$$\begin{cases} (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 = c^2 - 2ac + a^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac),$$

e a afirmação I é verdadeira;

II) Do enunciado,

$$(a+b)(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a^2 - b^2)(a-b) \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2,$$

e a afirmação II é verdadeira;

III) Se $a = 3$ e $b = 1$, então é simples ver que

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8 \\ (a-b)^4 = 2^4 = 16 \end{cases},$$

e a afirmação III é falsa.

5ª Questão, [Valor: 0,25]: (D) mn

Substituindo o valor de $x = \frac{c-by}{a}$ da primeira equação na segunda equação, tem-se

$$p\left(\frac{c-by}{a}\right) + qy = d \Rightarrow (aq-pb)y = pc - da.$$

Logo, como o sistema é indeterminado, têm-se

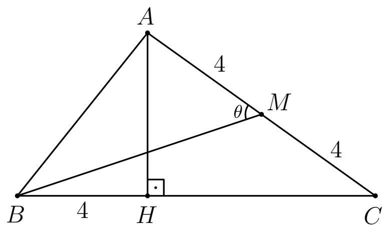
$$\left\{\begin{array}{l} aq = pb = p(m-a) \\ pc = da = nca \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a(p+q) = pm \\ p = na \end{array}\right. \Rightarrow p+q = \frac{pm}{a} = mn.$$

6ª Questão, [Valor: 0,25]: (A) 3150

O coeficiente c de x^4y^4 é dado por

$$c = \frac{10!}{4!\,4!\,2!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5}{(4\times 3\times 2)\times(2)} = 10\times 9\times 7\times 5 = 3150.$$

7ª Questão, [Valor: 0,25]: (B) 13



Sejam $AH = h$ e $BM = x$. Como M é médio de AC, então $MC = MA = 4$. Além disso, por Pitágoras, têm-se

$$\left\{\begin{array}{l} AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{16+h^2} \\ HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{64-h^2} \end{array}\right. .$$

Assim, aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ΔBAM e ΔBCM, têm-se

$$\left\{\begin{array}{l} BA^2 = BM^2 + AM^2 - 2BM\times AM\cos\theta \\ BC^2 = BM^2 + CM^2 + 2BM\times CM\cos\theta \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 16 + h^2 = x^2 + 16 - 8x\cos\theta \\ 16 + 8\sqrt{64-h^2} + 64 - h^2 = x^2 + 16 + 8x\cos\theta \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow 96 + 8\sqrt{64-h^2} = 2x^2 + 32$$

$$\Rightarrow x^2 = 32 + 4\sqrt{64-h^2}.$$

Para haver solução inteira, devemos ter

$$\begin{aligned} 0 < h < 8 \Rightarrow & \ 0 < h^2 < 64 \\ \Rightarrow & \ 0 < 64 - h^2 < 64 \\ \Rightarrow & \ 0 < \sqrt{64-h^2} < 8 \\ \Rightarrow & \ 0 < 4\sqrt{64-h^2} < 32 \\ \Rightarrow & \ 32 < \left(x^2 = 32 + 4\sqrt{64-h^2}\right) < 64 \\ \Rightarrow & \ x^2 = 36 \text{ ou } 49, \end{aligned}$$

de modo que a soma das soluções inteiras é dada por $S = (6+7) = 13$.

8ª Questão, [Valor: 0,25]: (C) 2
Do enunciado,

$$\Delta = x^2 + 2x^4 + 3x^2 - 3x^3 - x^4 - 2x = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x = x(x-1)(x^2-2x+2),$$

cujas raízes reais são apenas $x = 0$ e $x = 1$.

9ª Questão, [Valor: 0,25]: (D) 2
Como a e b são positivos, os módulo e argumento de z são tais que

$$\begin{cases} |z| = \frac{a}{b(\sqrt{1+b^2})^2} = 1 \\ \arg z = -\arg(i) - 2\arg(1+ib) = -\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b(1+b^2) \\ \arg(1+ib) = \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Assim, da segunda equação, tem-se $b = 1$, de modo que, da primeira equação, tem-se $a = 2$.

10ª Questão, [Valor: 0,25]: (C) 66
Seja n o número de termos inseridos entre $a_1 = 3$ e $a_{n+2} = 192$ em cada progressão, de modo que

$$\begin{cases} 192 = 3 + (n+1)r \\ 192 = 3q^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+1)r = 189 = 3^3 \times 7 \\ q^{n+1} = 64 = 2^6 \end{cases}.$$

Do enunciado,

$$\binom{8}{2}\frac{1}{q^2} = \frac{28}{q^2} = \frac{r}{9q} \Rightarrow rq = 28 \times 9 = 2^2 \times 3^2 \times 7.$$

Como r e q são inteiros, das propriedades acima, r é primo com 2 e q é primo com 3 e 7, e assim

$$r = 3^2 \times 7 = 63 \quad \text{e} \quad q = 2^2 = 4,$$

e o segundo termo da progressão aritmética é $(a_1 + r) = 66$.

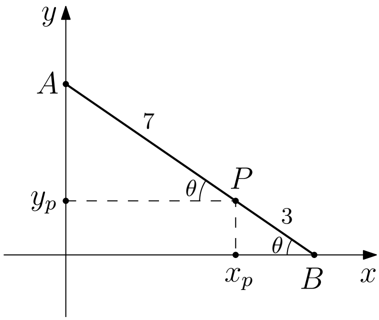
sln: Por curiosidade, $n = 2$.

11ª Questão, [Valor: 0,25]: (A) $\frac{9}{2^6}$

Para que o menino esteja a 5 m da posição inicial, em 9 lançamentos da moeda devem ter saído 7 caras e 2 coroas ou 7 coroas e 2 caras, com probabilidade P total, dentre todos os possíveis resultados, dada por

$$P = 2\times\frac{\binom{9}{7}}{2^9} = 2\,\frac{\frac{9\times 8}{2}}{2^9} = \frac{9}{2^6}.$$

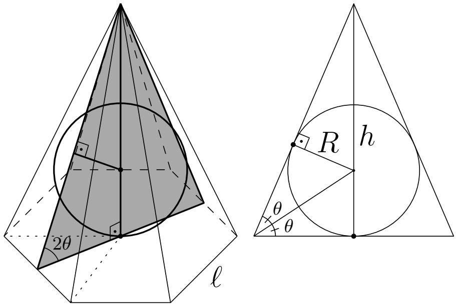
12ª Questão, [Valor: 0,25]: (C) $9x^2 + 49y^2 - 441 = 0$



Na figura acima,

$$\begin{cases} x_p = 7\cos\theta \\ y_p = 3\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x_p}{7}\right)^2 + \left(\frac{y_p}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow 9x_p^2 + 49y_p^2 - 441 = 0.$$

13ª Questão, [Valor: 0,25]: (A) $\dfrac{2h\sqrt{3}}{3}\,\dfrac{R^2h}{h-2R}$



Sejam ℓ o lado da base da pirâmide e 2θ o ângulo em destaque na figura acima, de modo que,

$$\text{tg}\,2\theta = \frac{h}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} \quad \text{e} \quad \text{tg}\,\theta = \frac{R}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}.$$

Logo, pela fórmula da tangente do arco-dobro,

$$\text{tg}\,2\theta = \frac{\text{sen}\,2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta} = \frac{2\text{tg}\,\theta}{1-\text{tg}^2\theta},$$

tem-se que

$$\frac{h}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\frac{R}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}}{1-\left(\frac{R}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}\right)^2} \Rightarrow h\left(1-\frac{4R^2}{3\ell^2}\right) = 2R$$

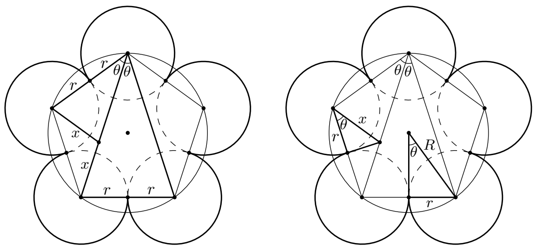
$$\Rightarrow h\left(3\ell^2 - 4R^2\right) = 6\ell^2 R$$

$$\Rightarrow \ell^2 = \frac{4R^2h}{3(h-2R)}.$$

Com isso, o volume V da pirâmide é dado por

$$V = \frac{6\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}h}{3} = \frac{\ell^2 h\sqrt{3}}{2} = \frac{4R^2h}{3(h-2R)}\,\frac{h\sqrt{3}}{2} = \frac{2R^2h^2\sqrt{3}}{3(h-2R)}.$$

14ª Questão, [Valor: 0,25]: (E) $\dfrac{7\pi R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$



Seja r o raio de cada uma das cinco circunferências que compõem a figura dada. Pela semelhança dos triângulos em destaque na figura à esquerda, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{2r}{x} = \frac{2r+x}{2r} &\Rightarrow x^2 + (2r)x - (2r)^2 = 0 \\
&\Rightarrow x = \frac{-2r + \sqrt{(2r)^2 + 4(2r)^2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,(2r) \\
&\Rightarrow x^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,(2r)^2.
\end{aligned}$$

Pela semelhança dos triângulos em destaque na figura da direita, tem-se

$$\frac{x}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} \Rightarrow x^2(R^2-r^2) = R^2r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{R^2x^2}{R^2+x^2},$$

de modo que

$$r^2 = \frac{2(3-\sqrt{5})R^2r^2}{R^2+2(3-\sqrt{5})r^2} \Rightarrow r^2 = \frac{(5-2\sqrt{5})}{2(3-\sqrt{5})}R^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}R^2.$$

Com isso, o perímetro p desejado é dado por

$$p = 5\,\frac{360^{\text{o}} - 108^{\text{o}}}{360^{\text{o}}}\,2\pi r = 5\frac{7}{10}2\pi r = 7\pi r = 7\pi\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}R.$$

15ª Questão, [Valor: 0,25]: (E) Se $A \subset C$ e $B \subset C$ então $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \subset C$

Por contra-exemplo, podemos mostrar facilmente que as opções (A), (B), (C) e (D) são incorretas. De fato, sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 4\}$, $D = \{1\}$ e $U = \{1, 2, 3, 4\}$, de modo que:

- $A \cap D = B \cap D = \{1\} \subset C$, mas $A \cap B = \{1, 2\}$ não é subconjunto de C.
- $C_1 = A \cap \overline{B} \cap C = \emptyset$, $C_2 = \overline{A} \cap B \cap C = \emptyset$ e $C_3 = A \cap B \cap \overline{C} = \{2\}$, e assim $(C_1 \cup C_2) \cap C_3 = \emptyset \neq A \cap B = \{1, 2\}$.
- $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{2\}$ e $A \cap B \cap C = \{1\}$, de modo que $\overline{C_1 \cup C_2 \cup C_3} = \{1, 3, 4\} \neq A \cap B \cap C$.
- $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) = \{1, 2\} \cup \{1\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$, que é diferente de $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{2\}$.

Já no item (E), tem-se que $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$, de modo que, de fato, se $A \subset C$ e $B \subset C$, então $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \subset C$.

1.5.2 Prova de Matemática

1ª Questão [Valor 1,0]: Desenvolvendo o logaritmo dado,

$$\log_{\sqrt{b}}(a)^2 = \frac{\log(a)^2}{\log\sqrt{b}} = \frac{2\log a}{\frac{1}{2}\log b} = 4\frac{\log a}{\log b} = 4\log_b a = 4 \Rightarrow \log_b a = 1 \Rightarrow a = b.$$

Com isso,

$$\log_b(ab)^m = \log_b(a)^{2m} = \log_a(a)^{2m} = 2m.$$

Usando essas relações, a equação polinomial dada torna-se

$$x^3 - 18x^2 + (2m + 8 - m)x - 2m = x^3 - 18x^2 + (m + 8)x - 2m = 0.$$

Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes dessa equação. Pelas relações de Girard,

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = 18 \\ r_2(r_1 + r_3) + r_1r_3 = m + 8 \\ r_1r_2r_3 = 2m \end{cases}.$$

Se as raízes estão em progressão aritmética, $(r_1 + r_3) = 2r_2$ e a primeira relação acima nos diz que $r_2 = 6$. Substituindo esse valor nas duas outras relações, têm-se

$$\begin{cases} 6(2r_2) + r_1r_3 = m + 8 \\ 6r_1r_3 = 2m \end{cases} \Rightarrow 72 + \frac{m}{3} = m + 8 \Rightarrow m = 96.$$

2ª Questão [Valor 1,0]: Substituindo $by = cz$ na primeira equação, têm-se

$$\begin{cases} ax + by = 2abc \\ 3ax - 4by = -abc \end{cases} \Rightarrow ax = by = cz = abc \Rightarrow x = bc, y = ac, z = ab.$$

Substituindo essas expressões na quarta equação dada,

$$xyz = a^2b^2c^2 = 2013^2 = 3^2 \times 11^2 \times 61^2.$$

Como 3, 11 e 61 são primos entre si e $2 < a < b < c$, então $a = 3$, $b = 11$ e $c = 61$, de modo que $x = 671$, $y = 183$ e $z = 33$.

3ª Questão [Valor 1,0]:

Lema 1: A solução da equação de recorrência $b(k+1) = 2^k + 2b(k)$, para $k \geq 1$, com $b(1) = 1$, é dada por $b(k) = k2^{k-1}$.

$\blacksquare$

Lema 2:

$$\sum_{k=1}^{n} ka^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} a^i = \sum_{k=1}^{n} a^k\left(\frac{a^{n-k+1}-1}{a-1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{a^{n+1}-a^k}{a-1},$$

de modo que

$$\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{na^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a^k}{a-1} = \frac{na^{n+1} - a\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right)}{a-1} = \frac{(na-n-1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}.$$

Para $a = 2$, essa expressão se reduz a

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (2n-n-1)2^{n+1} + 2 = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

$\blacksquare$

No problema dado, seja

$$A^k = \begin{bmatrix} a(k) & b(k) \\ c(k) & d(k) \end{bmatrix},$$

de modo que

$$A^{k+1} = A^k \times A = \begin{bmatrix} a(k) & b(k) \\ c(k) & d(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a(k) & a(k)+2b(k) \\ 2c(k) & c(k)+2d(k) \end{bmatrix}.$$

Com isto,

$$\begin{cases} a(k+1) = 2a(k) \\ b(k+1) = a(k) + 2b(k) \\ c(k+1) = 2c(k) \\ d(k+1) = c(k) + 2d(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(k) = 2^k \\ b(k+1) = 2^k + 2b(k) \\ c(k) = 0 \\ d(k) = 2^k \end{cases},$$

pois $a(1) = 2$, $b(1) = 1$, $c(1) = 0$ e $d(1) = 2$. Logo, pelo Lema 1, $b(k) = k2^{k-1}, k \geq 1$, e a matriz B é dada por

$$B = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} 2^k & \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} \\ \sum_{k=1}^{n} 0 & \sum_{k=1}^{n} 2^k \end{bmatrix}$$

cuja soma S dos quatro elementos, usando o Lema 2, é dada por

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left(2^k + k2^{k-1} + 2^k\right) = 2.2\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right) + \frac{1}{2}\left[(n-1)2^{n+1}+2\right] = (n+3)2^n - 3.$$

4ª Questão [Valor 1,0]: Desenvolvendo o produtório P, têm-se

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=0}^{22}\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]\times\prod_{k=23}^{45}\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]\\
&= \prod_{k=0}^{22}\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]\times\prod_{k=0}^{22}\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{(45-k)\pi}{180}\right)\right]\\
&= \prod_{k=0}^{22}\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{k\pi}{180}\right)\right]\\
&= \prod_{k=0}^{22}\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]\left[1+\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)}\right]\\
&= \prod_{k=0}^{22}\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]\left[1+\frac{1-\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)}\right]\\
&= \prod_{k=0}^{22}\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]\left[\frac{1+\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)+1-\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)}\right]\\
&= \prod_{k=0}^{22}\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]\left[\frac{2}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)}\right]\\
&= \prod_{k=0}^{22}2\\
&= 2^{23},
\end{aligned}$$

de modo que $m=23$.

5ª Questão [Valor 1,0]: Como $p\neq 0$, a solução $Z_1=-Z_2$, com Z_1 e Z_2 reais, não é possível. Assim, Z_1 e Z_2 devem ser complexos conjugados, de modo que $p^2<4q$ e ainda

$$Z_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-p\pm i\sqrt{4q-p^2}}{2}\Rightarrow\begin{cases}\Re\{Z_{1,2}\}=-\frac{p}{2}\\ \Im\{Z_{1,2}\}=\pm\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\end{cases}.$$

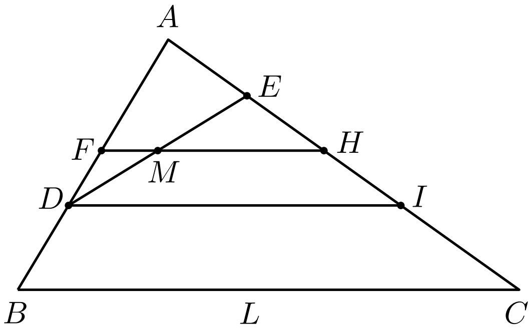
Com isto,

$$|Z_1|=|Z_2|=\sqrt{\frac{p^2+(4q-p^2)}{4}}=\sqrt{q}$$

e assim

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{\Re\{Z_{1,2}\}}{|Z_{1,2}|}\right)^2=\frac{p^2}{4q}.$$

6ª Questão [Valor 1,0]:



Como $AD = mDB$ e $AB = (AD + DB)$, então $AD = \frac{m}{m+1}AB$.

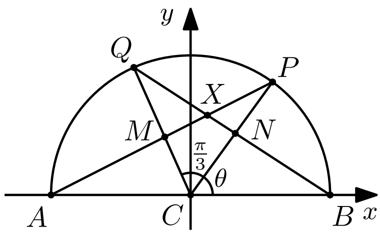
Seja $DI \parallel BC$. Pela semelhança dos triângulos ΔADI e ΔABC, tem-se

$$\frac{AD}{DI} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow DI = \frac{AD.BC}{AB} = \frac{\frac{m}{m+1}AB.L}{AB} = \frac{mL}{m+1},$$

e, como MH é base média do triângulo ΔEDI relativa ao lado DI, então

$$MH = \frac{DI}{2} = \frac{mL}{2(m+1)}.$$

7ª Questão [Valor 1,0]:



1ª Solução (Geometria Sintética): Sejam $B\hat{C}P = \theta$, X a interseção de AP e BQ, M a interseção de AP com CQ e N a interseção de CP com BQ, conforme ilustrado na figura acima.

No triângulo isósceles ΔCQB, em que $CQ = CB$, tem-se $C\hat{Q}B = C\hat{B}Q = (60^\circ - \frac{\theta}{2})$, de modo que $C\hat{N}B = (120^\circ - \frac{\theta}{2})$ e assim $C\hat{N}X = (60^\circ + \frac{\theta}{2})$.

Analogamente, no triângulo isósceles ΔCAP, em que $CA = CP$, tem-se $C\hat{A}P = C\hat{P}A = (30^\circ + \frac{\theta}{2})$, de modo que $C\hat{M}A = (30^\circ + \frac{\theta}{2})$ e assim $C\hat{M}X = (150^\circ + \frac{\theta}{2})$.

Com isso, no quadrilátero $CMXN$, tem-se $M\hat{X}N = 120^\circ$, de modo que X pertence ao arco-capaz do ângulo de 120° relativo ao segmento $AB = 4$.

2ª Solução (Geometria Analítica): Seja $\theta = B\hat{C}P$. Assim:

$A \equiv (-2,0),\ B \equiv (2,0),\ P \equiv (2\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e $Q \equiv (2\cos(\theta+60^{\mathrm{o}}), 2\,\mathrm{sen}(\theta+60^{\mathrm{o}}))$.

Logo, a reta suporte de AP é descrita por

$$y = (x+2)\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta+1} = (x+2)\frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = (x+2)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2},$$

e a reta suporte de BQ é tal que

$$y = (x-2)\frac{\mathrm{sen}(\theta+60^{\mathrm{o}})}{\cos(\theta+60^{\mathrm{o}})-1} = (x-2)\frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}\cos\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}}{-2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}} = (2-x)\,\mathrm{cotg}\,\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}.$$

Com isso, a abscissa x_0 do ponto $X \equiv AP \cap BQ$ é dada por

$$x_0 = 2\,\frac{\mathrm{cotg}\,\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2} - \mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}}{\mathrm{cotg}\,\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}} = 2\,\frac{\cos\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}}{\cos\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}} = 2\,\frac{\cos\left(\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

e assim

$$x_0 = 2\frac{\cos(\theta+30^{\mathrm{o}})}{\cos 30^{\mathrm{o}}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos(\theta+30^{\mathrm{o}}).$$

Um desenvolvimento análogo para a ordenada y_0 de X nos dá que

$$y_0 = \frac{4}{\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}} = 2\,\frac{\mathrm{sen}\,\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}\right) + \mathrm{sen}\,\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2} + \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}}$$

e assim

$$y_0 = 2\,\frac{\mathrm{sen}\,(\theta+30^{\mathrm{o}}) - \mathrm{sen}\,30^{\mathrm{o}}}{\cos\left(\frac{\theta+60^{\mathrm{o}}}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\mathrm{sen}(\theta+30^{\mathrm{o}}) - \frac{1}{2}\right).$$

Com isso, tem-se

$$x_0^2 + \left(y_0 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

de modo que o lugar geométrico de X é o arco da circunferência de raio $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ e centro $(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ acima do eixo das abscissas.

8ª Questão [Valor 1,0]:

a) Sejam $\det(A)$ e tr(A) o determinante e o traço, respectivamente, de uma matriz quadrada A. Das propriedades de matrizes, têm-se

$$\begin{cases} \det(AB) = \det(BA) \\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 125 - 121 = xy - 196 \\ 5 + 25 = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 200 \\ x + y = 30 \end{cases},$$

de modo que $x = 20$ e $y = 10$, pois $x > y$.

b) Como $\det(AB) \neq 0$, então $\det(A)$ é não nulo, de modo que A é inversível e podemos escrever que

$$B = A^{-1}\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}.$$

Usando a notação $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, têm-se as equações

$$\begin{cases} 5a + 11c = 20a + 14b \\ 5b + 11d = 14a + 10b \\ 11a + 25c = 20c + 14d \\ 11b + 25d = 14c + 10d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15a + 14b - 11c = 0 \\ 14a + 5b - 11d = 0 \\ 11a + 5c - 14d = 0 \\ 11b - 14c + 15d = 0 \end{cases}.$$

Parametrizando em função de a e d, têm-se $b = \frac{11d-14a}{5}$ e $c = \frac{14d-11a}{5}$, de modo que

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{11d-14a}{5} \\ \frac{14d-11a}{5} & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & \frac{14a-11d}{5} \\ \frac{11a-14d}{5} & a \end{bmatrix},$$

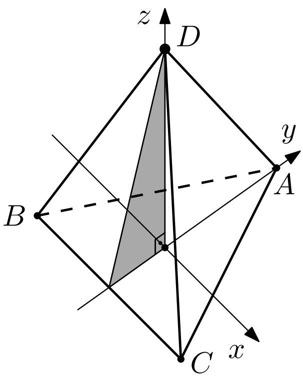
com

$$\Delta = ad - \frac{(11d - 14a)(14d - 11a)}{25} = -\frac{154d^2 - 342ad + 154a^2}{25}.$$

Logo,

$$B = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & \frac{14a-11d}{5} \\ \frac{11a-14d}{5} & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \frac{154a-96d}{5} & (70a - 44d) \\ (22a - 14d) & \frac{146a-154d}{5} \end{bmatrix}.$$

9ª Questão [Valor 1,0]:



Considere o tetraedro de aresta a, com a base ABC no plano xy, com a origem coincidindo com o centro da base, e o vértice D sobre o eixo z, conforme ilustrado na figura acima. Nesse caso,

$$A \equiv (0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, 0),\ B \equiv (-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0),\ C \equiv (\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0),\ \text{e } D \equiv (0, 0, \frac{a\sqrt{6}}{3}).$$

Assim, para $0 \leq t \leq 1$, as arestas AD, BD e CD são respectivamente descritas por

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{a\sqrt{3}}{3}(1-t), \\ z = \frac{a\sqrt{6}}{3}t \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{a}{2}(1-t) \\ y = -\frac{a\sqrt{3}}{6}(1-t) \\ z = \frac{a\sqrt{6}}{3}t \end{cases} \text{e} \begin{cases} x = \frac{a}{2}(1-t) \\ y = -\frac{a\sqrt{3}}{6}(1-t). \\ z = \frac{a\sqrt{6}}{3}t \end{cases}$$

Seja o plano $\pi : \alpha x + \beta y + \gamma z = 1$.

O ponto $E \equiv \pi \cap AD$ é tal que

$$\beta\frac{a\sqrt{3}}{3}(1-t) + \gamma\frac{a\sqrt{6}}{3}t = 1$$

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{3} - \beta a}{a(\gamma\sqrt{2} - \beta)}$$

$$\Rightarrow E \equiv \left(0, \frac{\sqrt{3}(a\gamma\sqrt{2} - \sqrt{3})}{3(\gamma\sqrt{2} - \beta)}, \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} - \beta a)}{3(\gamma\sqrt{2} - \beta)}\right),$$

de modo que

$$DE = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{a\gamma\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\gamma\sqrt{2} - \beta}\right)^2 + \left[\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} - \beta a)}{3(\gamma\sqrt{2} - \beta)} - \frac{a\sqrt{6}}{3}\right]^2} = \frac{|a\gamma\sqrt{2} - \sqrt{3}|}{\gamma\sqrt{2} - \beta}.$$

Analogamente, o ponto $F \equiv \pi \cap BD$ é descrito por

$$-\alpha\frac{a}{2}\left(1-t\right)+\beta\frac{a\sqrt{3}}{6}\left(t-1\right)+\gamma\frac{a\sqrt{6}}{3}t=1$$

$$\Rightarrow t=\frac{1+\frac{\alpha a}{2}+\frac{\beta a\sqrt{3}}{6}}{a\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{6}+\frac{\gamma\sqrt{6}}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow F\equiv\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{a\gamma\sqrt{6}}{3}\right)}{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{6}+\frac{\gamma\sqrt{6}}{3}},\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}\left(1-\frac{a\gamma\sqrt{6}}{3}\right)}{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{6}+\frac{\gamma\sqrt{6}}{3}},\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}\left(1+\frac{\alpha a}{2}+\frac{\beta a\sqrt{3}}{6}\right)}{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{6}+\frac{\gamma\sqrt{6}}{3}}\right),$$

e assim

$$FD=\sqrt{\left(\frac{3}{12}+\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1-\frac{a\gamma\sqrt{6}}{3}}{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{6}+\frac{\gamma\sqrt{6}}{3}}\right)^2+\left[\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{1+\frac{\alpha a}{2}+\frac{\beta a\sqrt{3}}{6}}{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{6}+\frac{\gamma\sqrt{6}}{3}}\right)-\frac{a\sqrt{6}}{3}\right]^2}$$

$$=\frac{|6-2a\gamma\sqrt{6}|}{3\alpha+\beta\sqrt{3}+2\gamma\sqrt{6}}.$$

Por fim, o ponto $G \equiv \pi \cap CD$ é tal que

$$\alpha\frac{a}{2}\left(1-t\right)-\beta\frac{a\sqrt{3}}{6}\left(1-t\right)+\gamma\frac{a\sqrt{6}}{3}t=1$$

$$\Rightarrow t=\frac{1-\frac{\alpha a}{2}+\frac{\beta a\sqrt{3}}{6}}{a\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{6}+\frac{\gamma\sqrt{6}}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow G\equiv\left(\frac{\frac{1}{2a}\left(\frac{\gamma a\sqrt{6}}{3}-1\right)}{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{6}+\frac{\gamma\sqrt{6}}{3}},-\frac{\frac{\sqrt{3}}{6a}\left(\frac{\gamma a\sqrt{6}}{3}-1\right)}{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{6}+\frac{\gamma\sqrt{6}}{3}},\frac{\frac{\sqrt{6}}{3a}\left(1-\frac{\alpha a}{2}+\frac{\beta a\sqrt{3}}{6}\right)}{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{6}+\frac{\gamma\sqrt{6}}{3}}\right),$$

de modo que

$$GD=\sqrt{\left(\frac{3}{12}+\frac{1}{12}\right)\left(\frac{\frac{a\gamma\sqrt{6}}{3}-1}{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{6}+\frac{\gamma\sqrt{6}}{3}}\right)^2+\left[\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{1-\frac{\alpha a}{2}+\frac{\beta a\sqrt{3}}{6}}{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{6}+\frac{\gamma\sqrt{6}}{3}}\right)-\frac{a\sqrt{6}}{3}\right]^2}$$

$$=.$$

Substituindo os valores de ED, FD e GD na relação do enunciado, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{DE}+\frac{1}{FD}+\frac{1}{GD} &= \frac{2\gamma\sqrt{6}-2\beta\sqrt{3}}{|2a\gamma\sqrt{6}-6|}+\frac{3\alpha+\beta\sqrt{3}+2\gamma\sqrt{6}}{|6-2a\gamma\sqrt{6}|}+\frac{-3\alpha+\beta\sqrt{3}+2\gamma\sqrt{6}}{|2a\gamma\sqrt{6}-6|}\\ &= \frac{6\gamma\sqrt{6}}{2a\gamma\sqrt{6}-6}\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\\ &\Rightarrow \gamma=\frac{6}{2a\sqrt{6}-36}.\end{aligned}$$

O ponto $T \in \pi$ é tal que $T \equiv (0, 0, h)$, com

$$h = \frac{1}{\gamma} = \frac{2a\sqrt{6}}{6} - 6,$$

de modo que a distância DT é dada por

$$DT = \frac{a\sqrt{6}}{3} - h = 6.$$

sln1: Esta solução, naturalmente, seria inviável no decorrer da prova.

sln2: Fazendo o plano horizontal, do tipo $z = k$, têm-se $DE = DF = DG = 3\sqrt{6}$. Com isto, pela semelhança dos triângulos ΔDTE e ΔDOA, onde O é a origem dos eixos coordenados, têm-se

$$\frac{DT}{DE} = \frac{DO}{DA} \Rightarrow \frac{DT}{3\sqrt{6}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a} \Rightarrow DT = 6.$$

10ª Questão [Valor 1,0]: Para ser bijetora, a função f deve mapear o conjunto S de 9 elementos em todo o conjunto S. Para ter coordenadas em comum, dois pontos devem pertencer à mesma linha ou mesma coluna do conjunto S. A condição "f(P) e f(Q) possuem coordenadas em comum se e somente se P e Q possuem coordenadas em comum" força a que as imagens dos pontos de uma mesma linha ou coluna de S seja uma (não necessariamente a mesma) linha ou coluna inteira de S.

Naturalmente que a função identidade $f(P) = P$ satisfaz essa condição. Qualquer permutação de 2 linhas também satisfaz essa condição, o mesmo ocorrendo para qualquer permutação de 2 colunas (inclusive com as linhas já permutadas). A operação de transposição (que transforma linha em coluna) do conjunto S também permite que a propriedade seja satisfeita.

Como há 3! possíveis permutações de linhas, 3! permutações de colunas e a transposição multiplica por 2 as possibilidades, o número total de funções distintas seria: $3! \times 3! \times 2 = 72$.

1.6 Vestibular 2011/2012

1.6.1 Prova Objetiva

1ª Questão, [Valor: 0,25]: Anulada
Observando que $x = 1$ é raiz, a equação do enunciado pode ser facilmente decomposta na forma

$$(x-1)(6x^2+x+3) = 0,$$

de modo que as duas outras raízes são

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4.6.3}}{12}.$$

Logo, a equação original tem raízes complexas, inviabilizando o seu sentido físico e anulando a questão.

2ª Questão, [Valor: 0,25]: (D) 1 e 3
Usando as propriedades de que:

$$\begin{cases} \det[X.Y] = \det[X].\det[Y] \\ \det[X^{\mathrm{t}}] = \det[X] \\ \det[X^{-1}] = \det^{-1}[X] \end{cases}$$

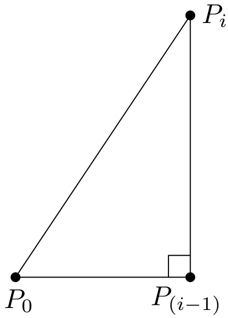
têm-se que

$$\begin{aligned} \det[(CA^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}] &= \det[CA^{\mathrm{t}}] = \det[C].\det[A^{\mathrm{t}}] = \det[C].\det[A], \\ \det[P^{-1}BP] &= \det[P^{-1}].\det[B].\det[P] = \det^{-1}[P].\det[B].\det[P] = \det[B]. \end{aligned}$$

Logo, devemos ter

$$\begin{aligned} \det[C].\det[A] = \det[B] &\Rightarrow (4-x)x = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = -3 \\ &\Rightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-3)}}{2} = 2 \pm 1 \end{aligned}$$

3ª Questão, [Valor: 0,25]: (C) 70



Das condições do problema, temos a seguinte recursão (ver figura acima):

$$(P_0P_i)^2 = (P_0P_{(i-1)})^2 + (P_{(i-1)}P_i)^2,$$

onde $P_{(i-1)}P_i = i$. Logo,

$$\begin{cases} (P_0P_{24})^2 = (P_0P_{23})^2 + (24)^2 \\ (P_0P_{23})^2 = (P_0P_{22})^2 + (23)^2 \\ (P_0P_{22})^2 = (P_0P_{21})^2 + (22)^2 \\ \vdots \\ (P_0P_2)^2 = (P_0P_1)^2 + (2)^2 \end{cases}$$

cuja soma telescópica nos leva a

$$(P_0P_{24})^2 = \sum_{i=1}^{24} i^2.$$

Lembrando-se que a soma S_n dos n primeiros quadrados é dada por

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

tem-se então que

$$P_0P_{24} = \sqrt{S_{24}} = \sqrt{\frac{(24)^3}{3} + \frac{(24)^2}{2} + \frac{24}{6}} = \sqrt{4608+288+4} = \sqrt{4900}.$$

4ª Questão, [Valor: 0,25]: (C) 0

A função $\operatorname{arcsen} x$ é definida no domínio $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Logo, para que a equação do enunciado seja satisfeita, devemos ter $\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} y = \operatorname{arcsen} z = \frac{\pi}{2}$, e assim $x = y = z = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$, de modo que a expressão desejada é igual a

$$1^{100} + 1^{100} + 1^{100} - \frac{9}{1^{101} + 1^{101} + 1^{101}} = 3 - \frac{9}{3} = 0.$$

5ª Questão, [Valor: 0,25]: (E) $\frac{6}{55}$
Como há 4 vagas vazias de um total de 11 (já que a posição da aeronave está necessariamente preenchida), a probabilidade de que uma vaga adjacente específica esteja vazia é $\frac{4}{11}$. Considerando que esta tal vaga esteja vazia, sobram 3 outras vagas vazias de um total de 10. Assim, a probabilidade de que a outra vaga adjacente também esteja vazia é $\frac{3}{10}$, de modo que a probabilidade desejada é igual a $\frac{4}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{6}{55}$.

6ª Questão, [Valor: 0,25]: (B) $(-30, -10]$
Do enunciado,

$$w = \text{ cis}\,\frac{2\pi}{3} = \cos 120^{\text{o}} + i\,\text{sen}\,120^{\text{o}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

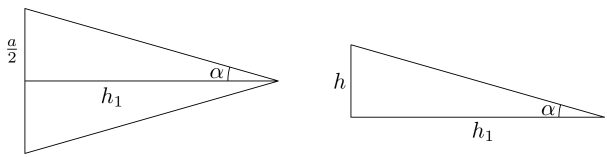
Logo,

$$1-w = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}(\cos 30^{\text{o}} - i\,\text{sen}\,30^{\text{o}}) = \sqrt{3}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

e assim

$$(1-w)^6 = (\sqrt{3})^6\,\text{cis}^6\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 27\,\text{cis}\,(-\pi) = -27.$$

7ª Questão, [Valor: 0,25]: (A) $\dfrac{a^3}{2}\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$



Seja $\alpha = 15^{\text{o}}$ de modo que

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,15^{\text{o}}}{\cos 15^{\text{o}}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos 30^{\text{o}}}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos 30^{\text{o}}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

Seja ainda h_1 o apótema da base, de modo que o volume V da pirâmide é dado por

$$V = \frac{S_b h}{3} = \frac{(6ah_1)h}{3} = 2ah_1h.$$

Mas, pelas figuras acima, têm-se que

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{h_1} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{h_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = \frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha} \\ h = h_1 \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow V = \frac{a^3}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a^3}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

8ª Questão, [Valor: 0,25]: (D) $8x^2 + 24y^2 - m^2 = 0$
Seja $FG = n$, de modo que

$$S_{FGH} = \frac{n^2\sqrt{3}}{4}.$$

Além disto, do enunciado,

$$S_{FHCG} = S_{ABC} - S_{ABHFG} = S_{ABC} - 2S_{FHCG} \Rightarrow S_{FHCG} = \frac{S_{ABC}}{3}.$$

Logo,

$$S_{FGH} = \frac{S_{FHCG}}{2} = \frac{S_{ABC}}{6} \Rightarrow \frac{n^2\sqrt{3}}{4} = \frac{m^2\sqrt{3}}{24} \Rightarrow n = \frac{m}{\sqrt{6}}.$$

Com isto,

$$\begin{cases} FC = 2n\cos 30^{\text{o}} = \frac{m}{\sqrt{2}} \\ GH = 2n \operatorname{sen} 30^{\text{o}} = \frac{m}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

de modo que a elipse desejada é descrita por

$$\frac{x^2}{\left(\frac{FC}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{GH}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{m^2}{(2\sqrt{2})^2}} + \frac{y^2}{\frac{m^2}{(2\sqrt{6})^2}} = 1 \Rightarrow 8x^2 + 24y^2 = m^2.$$

9ª Questão, [Valor: 0,25]: (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
Usando a relação

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right]$$

têm-se que

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 70^{\text{o}} \cos 50^{\text{o}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 120^{\text{o}} + \operatorname{sen} 20^{\text{o}}\right) \\ \operatorname{sen} 260^{\text{o}} \cos 280^{\text{o}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 540^{\text{o}} + \operatorname{sen}(-20^{\text{o}})\right) = \frac{1}{2}\left(-\operatorname{sen} 20^{\text{o}}\right) \end{cases}$$

de modo que

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 120^{\text{o}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

10ª Questão, [Valor: 0,25]: (A) $2x + 3y - 25 = 0$
Determinando a interseção da reta tangente $y = ax + b$ com a curva dada, tem-se

$$x^2 + 4(ax + b)^2 - 100 = 0 \Rightarrow (1 + 4a^2)x^2 + 8abx + (4b^2 - 100) = 0,$$

cujo discriminante deve ser nulo para garantir uma única solução (definição de tangente). Logo,

$$(8ab)^2 - 4(1 + 4a^2)(4b^2 - 100) = 0 \Rightarrow b^2 = 25 + 100a^2.$$

Como a reta deve passar ainda pelo ponto P, devemos ter

$$\begin{aligned} 3 = 8a + b \Rightarrow (3 - 8a)^2 &= 25 + 100a^2 \\ &\Rightarrow 9a^2 + 12a + 4 = (3a + 2)^2 = 0 \\ &\Rightarrow a = -\frac{2}{3} \text{ e } b = \frac{25}{3}, \end{aligned}$$

de modo que a reta tangente é descrita por $3y + 2x = 25$.

11ª Questão, [Valor: 0,25]: (C) $10 \leq n < 15$
O polinômio dado pode ser escrito como $(5x - 3)(x^2 - 12)$, de modo que $n = 12$.

12ª Questão, [Valor: 0,25]: (A) $\dfrac{x + 2y}{1 - x}$
Das propriedades da função logaritmo,

$$\log_5 18 = \frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10}(2 \times 3^2)}{\log_{10} \frac{10}{2}} = \frac{\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3}{1 - \log_{10} 2} = \frac{x + 2y}{1 - x}.$$

13ª Questão, [Valor: 0,25]: (C) x^2
1ª solução: Do enunciado, tem-se $f(a) = a^2$, e a única alternativa que satisfaz esta relação é o item (C).
2ª solução: Como $f(x)$ é um polinômio de segunda ordem, podemos escrever que $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, onde os coeficientes A, B e C podem ser determinados pelas relações $f(a) = a^2$, $f(b) = b^2$ e $f(c) = c^2$, de modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} Aa^2 + Ba + C = a^2 \\ Ab^2 + Bb + C = b^2 \\ Ac^2 + Bc + C = c^2 \end{array} \right. \Rightarrow A = 1, B = C = 0 \Rightarrow f(x) = x^2.$$

14ª Questão, [Valor: 0,25]: (C) 2

Pelos dados do problema, o curso tem exatamente 6 alunos, pois menos que isto é impossível (já que há 6 alunos inscritos na disciplina A) e mais também (pois 7 ou mais alunos implicariam um total de 21 ou mais inscrições, ao invés das 20 existentes). Vamos chamar estes 6 alunos do curso de a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6.

Todos os alunos se inscreverem na disciplina A. Apenas um aluno não se inscreveu na disciplina B e o mesmo ocorreu na disciplina C. Como cada aluno se inscreveu em no mínimo três disciplinas, não podemos ter o mesmo aluno deixando de se inscrever nas disciplinas B e C, pois só sobrariam outras 2 disciplinas (A e D) para este aluno. Assim, seja a_1 o aluno que não se inscreveu na disciplina B e a_2 o que não se inscreveu na disciplina C. Novamente, como todos os alunos se inscreveram em pelo menos 3 disciplinas, a_1 e a_2 necessariamente se inscreveram na disciplina D, e podemos denotar os alunos que não se inscreveram nesta disciplina por a_3 e a_4, sem perda de generalidade.

Com isto, os alunos a_5 e a_6 necessariamente se inscreveram nas 4 disciplinas do curso.

15ª Questão, [Valor: 0,25]: Anulada

Observando que

$$N = 27.209 = 7 \times 13 \times 13 \times 23,$$

é simples perceber que os fatoriais de $1 \leq n \leq 22$ não são múltiplos de N por não terem o fator primo 23. Além disto, os fatoriais de $23 \leq n \leq 25$ não tem dois fatores 13, presentes em N. A partir de $26 \leq n$, porém, todos os fatores de N se encontram no fatorial de n, de modo que o **máximo** número de elementos de G é 25.

Do enunciado, como G é um subconjunto, a princípio qualquer, de F, não podemos determinar exatamente o número de seus elementos, o que provavelmente fez com que a questão fosse anulada.

1.6.2 Prova de Matemática

1ª Questão [Valor 1,0]:

a) Seja a_i o i-ésimo termo da PA. Do enunciado, devemos ter

$$\begin{aligned} a_7^2 = a_2.a_{27} &\Rightarrow (a_1+6r)^2 = (a_1+r)(a_1+26r) \\ &\Rightarrow a_1^2 + 12a_1r + 36r^2 = a_1^2 + 27a_1r + 26r^2 \\ &\Rightarrow 10r^2 = 15a_1r \\ &\Rightarrow 2r = 3a_1, \end{aligned}$$

de modo que

$$q = \frac{a_7}{a_2} = \frac{a_1+6r}{a_1+r} = \frac{20a_1}{5a_1} = 4.$$

Logo, como r é inteiro positivo, o seu menor valor é $r = 3$, que corresponde a $a_1 = 2$.

b) Para $r = 3$ e $a_1 = 2$, tem-se $a_{18} = a_1 + 17r = 53$.

2ª Questão [Valor 1,0]: Por Girard, devemos ter

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{b}{2} \\ x_1x_2x_3 = a^b \end{cases},$$

de modo que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) = a^2 - b.$$

Logo, o logaritmo desejado L é tal que

$$L = \log_a \left[a^b(a)^{(a^2-b)}\right]^b = \log_a a^{ba^2} = ba^2.$$

3ª Questão [Valor 1,0]: Seja $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\begin{aligned} S &= 3\sec x - 3\cos x - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x \\ &= \frac{3(1-\cos^2 x) - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{\cos x} \\ &= \frac{3\,\mathrm{sen}^2\,x - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{\cos x} \\ &= \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}(3\,\mathrm{sen}\,x - \sqrt{3}\cos x). \end{aligned}$$

Logo, a equação do enunciado é equivalente a

$$\begin{aligned} &(\,\mathrm{tg}\,x - m)(3\,\mathrm{sen}\,x - \sqrt{3}\cos x) = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\sqrt{3}\,(\,\mathrm{tg}\,x - m)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{sen}\,x - \frac{1}{2}\cos x\right) = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\sqrt{3}\,(\,\mathrm{tg}\,x - m)(\cos\frac{\pi}{6}\,\mathrm{sen}\,x - \,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\,\cos x) = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\sqrt{3}\,(\,\mathrm{tg}\,x - m)\,\mathrm{sen}\,(x - \frac{\pi}{6}) = 0. \end{aligned}$$

a) A solução da equação acima é

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{sen}\,(x - \frac{\pi}{6}) = 0 \\ \text{ou} \\ \mathrm{tg}\,x = m \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = k\pi + \,\mathrm{arctg}\,m \end{array}\right. , \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Para que α e β, tais que $(\alpha+\beta) = 75^{\text{o}}$, sejam soluções da equação dada, devemos ter, por exemplo,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{sen}\,(\alpha - \frac{\pi}{6}) = 0 \\ \text{e} \\ \mathrm{tg}\,\beta = m \end{array}\right. \Rightarrow \alpha = 30^{\text{o}} \Rightarrow \beta = 45^{\text{o}} \Rightarrow m = \,\mathrm{tg}\,45^{\text{o}} = 1.$$

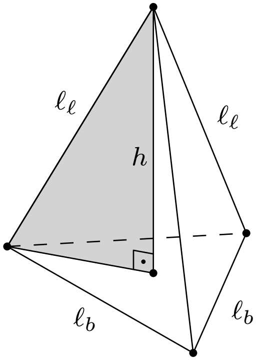
4ª Questão [Valor 1,0]: Do enunciado,

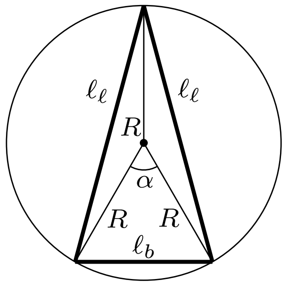
$$Z^3 = a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = 3 + 3i,$$

de modo que

$$Z^3 = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow |Z| = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}.$$

5ª Questão [Valor 1,0]:





Sejam ℓ_b e ℓ_ℓ as respectivas arestas da base e lateral da pirâmide de altura h. Da fórmula do volume, sendo S_b a área da base, tem-se

$$V = \frac{S_b h}{3} = \frac{\frac{\ell_b^2\sqrt{3}}{4}h}{3} = \frac{\ell_b^2 h\sqrt{3}}{12} \Rightarrow h = \frac{12V}{\ell_b^2\sqrt{3}} = \frac{4V\sqrt{3}}{\ell_b^2}.$$

Analisando a figura com a face lateral inscrita no círculo de raio R, como o ângulo do vértice é 30º, é simples ver que $\alpha = 60^\text{o}$, e assim $\ell_b = R$ e ainda

$$\begin{aligned}
&\ell_\ell \cos 15^\text{o} = R + R\cos 30^\text{o} \\
\Rightarrow\ &\ell_\ell = \frac{1+\cos 30^\text{o}}{\cos 15^\text{o}}\,R = \frac{1+\cos 30^\text{o}}{\sqrt{\frac{1+\cos 30^\text{o}}{2}}}\,R = R\sqrt{2(1+\cos 30^\text{o})} = R\sqrt{2+\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

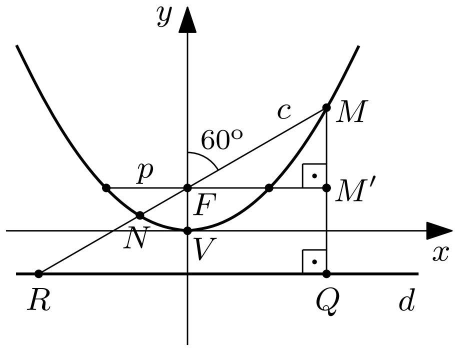
Por fim, por Pitágoras no triângulo sombreado, tem-se

$$\ell_\ell^2 = h^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{\ell_b\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
(2+\sqrt{3})R^2 = \frac{48V^2}{R^4} + \frac{R^2}{3} &\Rightarrow (5+3\sqrt{3})R^6 = 144V^2 \\
&\Rightarrow R = \sqrt[6]{\frac{144V^2}{5+3\sqrt{3}}} = \sqrt[6]{72V^2(3\sqrt{3}-5)}.
\end{aligned}$$

6ª Questão [Valor 1,0]:



1ª Solução: Seja a parábola $y = ax^2$, com vértice $V \equiv (0,0)$, foco $F \equiv (0,f)$ e diretriz $d : y = -f$, de modo que, pela definição de parábola, devemos ter

$$(x_0)^2 + (ax_0^2 - f)^2 = (ax_0^2 + f)^2 \Rightarrow f = \frac{1}{4a}.$$

O parâmetro p de uma parábola é igual ao comprimento da semicorda focal mínima. Com isto, $p = 2FV = 2f = \frac{1}{2a}$, de modo que a parábola pode ser escrita como $y = \frac{1}{2p}x^2$.

A reta suporte c da corda focal MN tem inclinação de 30^{o} e passa por F, logo

$$c : y = \operatorname{tg} 30^{\text{o}} x + f = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{p}{2},$$

cujas interseções com a parábola são tais que

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x_{M,N} + \frac{p}{2} = \frac{1}{2p}x_{M,N}^2 \Rightarrow x_{M,N} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{3} + 4\frac{1}{2p}\frac{p}{2}}}{\frac{1}{p}} = \frac{(1 \pm 2)p\sqrt{3}}{3}$$

$$y_{M,N} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{(1 \pm 2)p\sqrt{3}}{3} + \frac{p}{2} = \frac{(5 \pm 4)p}{6}.$$

Com isto,

$$MQ = y_M + f = \frac{9p}{6} + \frac{p}{2} = 2p,$$

e o perímetro desejado é dado por

$$RM + RQ + MQ = \frac{MQ}{\cos 60^{\text{o}}} + \frac{MQ}{\operatorname{tg} 30^{\text{o}}} + MQ = (3+\sqrt{3})MQ = (3+\sqrt{3})2p.$$

2ª Solução: Pela definição de parábola, $MF = MQ$, de modo que no triângulo retângulo $\Delta MFM'$ tem-se

$$\operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{MM'}{MF} = \frac{MQ - p}{MQ} = \frac{1}{2} \Rightarrow MQ = 2p,$$

e o perímetro desejado fica igual a $(3+\sqrt{3})MQ = (3+\sqrt{3})2p$.

7ª Questão [Valor 1,0]: Utilizando as propriedades básicas do resto da divisão, têm-se

$$\begin{aligned}
(2r + 3s) \equiv 0 \pmod{17} &\Leftrightarrow 30(2r + 3s) \equiv 0 \pmod{17} \\
&\Leftrightarrow (60r + 90s) \equiv 0 \pmod{17} \\
&\Leftrightarrow [(9r + 5s) + (51r + 85s)] \equiv 0 \pmod{17} \\
&\Leftrightarrow [(9r + 5s) + 17(3r + 5s)] \equiv 0 \pmod{17} \\
&\Leftrightarrow (9r + 5s) \equiv 0 \pmod{17}.
\end{aligned}$$

8ª Questão [Valor 1,0]: Considere as duas propriedades de determinantes:

- O determinante de uma matriz não se altera se adicionarmos duas (ou mais) linhas ou colunas;
- Se multiplicarmos uma linha ou coluna por k, o determinante também fica multiplicado por k.

Assim, se ℓ_i e c_i denotam a i-ésima linha ou coluna, respectivamente, da matriz, considere os seguintes passos no cálculo de $f(x)$:

(i) Faça $\ell_1 = (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)$;

(ii) Faça $\ell_1 = \ell_1/k_1$, com $k_1 = (x+a+b+c)$, e coloque este termo em evidência no cálculo do determinante;

(iii) Faça $c_i = (c_i - c_1)$, para $i = 2, 3, 4$;

(iv) Use Laplace na primeira linha, reduzindo a ordem da matriz;

(v) Faça $\ell_1 = (\ell_1 + \ell_2)$;

(vi) Faça $\ell_1 = \ell_1/k_2$, com $k_2 = (x-a-b+c)$, e coloque este termo em evidência no cálculo do determinante;

(vii) Faça $c_2 = (c_2 - c_1)$;

(viii) Use Laplace na primeira linha, reduzindo a ordem da matriz.

Este procedimento leva ao seguinte desenvolvimento:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{vmatrix} (x+a+b+c) & (x+a+b+c) & (x+a+b+c) & (x+a+b+c) \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} \\
&= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} \\
&= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & (x-a) & (c-a) & (b-a) \\ b & (c-b) & (x-b) & (a-b) \\ c & (b-c) & (a-c) & (x-c) \end{vmatrix} \\
&= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} (x-a) & (c-a) & (b-a) \\ (c-b) & (x-b) & (a-b) \\ (b-c) & (a-c) & (x-c) \end{vmatrix} \\
&= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} (x-a-b+c) & (x-a-b+c) & 0 \\ (c-b) & (x-b) & (a-b) \\ (b-c) & (a-c) & (x-c) \end{vmatrix} \\
&= (x+a+b+c)(x-a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ (c-b) & (x-b) & (a-b) \\ (b-c) & (a-c) & (x-c) \end{vmatrix} \\
&= (x+a+b+c)(x-a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (c-b) & (x-c) & (a-b) \\ (b-c) & (a-b) & (x-c) \end{vmatrix} \\
&= (x+a+b+c)(x-a-b+c)\begin{vmatrix} (x-c) & (a-b) \\ (a-b) & (x-c) \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+a+b+c)(x-a-b+c)[(x-c)^2-(a-b)^2] \\
&= (x+a+b+c)(x-a-b+c)(x-c-a+b)(x-c+a-b),
\end{aligned}
$$

de modo que as raízes de $f(x)$ são

$$x = (-a-b-c), (a+b-c), (a-b+c), (-a+b+c).$$

9ª Questão [Valor 1,0]:

a) Resolvendo em y a equação quadrática da curva, tem-se

$$y = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4x^2}}{2} = (-1 \pm \sqrt{2})x$$

o que corresponde a duas retas passando pela origem e perpendiculares, pois $(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2}) = (1-2) = -1$.

b) A reta r pode ser descrita por $r : y = \alpha(x-2) + 3$, e suas interseções $A \equiv (x_a, y_a)$ e $B \equiv (x_b, y_b)$ com as retas dadas são tais que

$$\alpha(x_{a,b} - 2) + 3 = (-1 \pm \sqrt{2})x_{a,b} \Rightarrow x_{a,b} = \frac{2\alpha - 3}{\alpha + 1 \mp \sqrt{2}}.$$

Logo,

$$\overline{PA}^2 = (x_a - 2)^2 + (y_a - 3)^2 = (x_a - 2)^2 + [\alpha(x_a - 2)]^2 = (x_a - 2)^2(1 + \alpha^2),$$
$$\overline{PB}^2 = (x_b - 2)^2 + (y_b - 3)^2 = (x_b - 2)^2 + [\alpha(x_b - 2)]^2 = (x_b - 2)^2(1 + \alpha^2),$$

e assim

$$\begin{aligned}
\overline{PA}^2 . \overline{PB}^2 &= (x_a - 2)^2(x_b - 2)^2(1 + \alpha^2)^2 \\
&= \left(\frac{2\alpha - 3}{\alpha + 1 - \sqrt{2}} - 2\right)^2 \left(\frac{2\alpha - 3}{\alpha + 1 + \sqrt{2}} - 2\right)^2 (1 + \alpha^2)^2 \\
&= \left(\frac{-5 + 2\sqrt{2}}{\alpha + 1 - \sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{-5 - 2\sqrt{2}}{\alpha + 1 + \sqrt{2}}\right)^2 (1 + \alpha^2)^2 \\
&= \left(\frac{(-5)^2 - (2\sqrt{2})^2}{(\alpha + 1)^2 - 2}\right)^2 (1 + \alpha^2)^2.
\end{aligned}$$

Como $\overline{PA}.\overline{PB} = 17$, tem-se então que

$$17 = \pm \frac{17(1+\alpha^2)}{(\alpha+1)^2 - 2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha - 1 = 1 + \alpha^2 \\ \text{ou} \\ \alpha^2 + 2\alpha - 1 = -1 - \alpha^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ ou } \alpha \to \infty \\ \text{ou} \\ \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -1 \end{cases},$$

o que corresponde às quatro retas

$$r_1 : y = x + 1; \quad r_2 : x = 2; \quad r_3 : y = 3; \quad r_4 : y = -x + 5.$$

10ª Questão [Valor 1,0]:

a) Seja a matriz M escrita na forma

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix},$$

com $a_i = \pm 1$, para $i = 1, 2, \ldots, 9$, cujo determinante D é dado por

$$D = a_1a_5a_9 + a_2a_6a_7 + a_3a_4a_8 - a_3a_5a_7 - a_1a_6a_8 - a_2a_4a_9.$$

Assim, D é a soma de seis parcelas do tipo ± 1, de modo que, a princípio, D só pode assumir os valores $D \in \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$.

Para termos $D = 6$, as seis parcelas de D devem ser iguais a $+1$. Para que as três primeiras parcelas sejam positivas, deve haver um número par de elementos -1 em M. Para que as três últimas parcelas também sejam positivas, porém, deve haver um número ímpar de elementos -1 em M, o que gera uma inconsistência, fazendo com que o caso $D = 6$ não seja possível.

O caso $D = 4$ é obtido, por exemplo, para

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D = 1 + 1 + 1 - (-1) - (-1) - 1 = 4,$$

de modo que o valor máximo de D é efetivamente igual a 4.

b) Seja n_i o número de elementos -1 na i-ésima parcela de D, como definidas na equação acima. Para termos $D = 4$, apenas uma das seis parcelas deve ser igual a -1, devendo todas as demais cinco parcelas necessariamente serem iguais a $+1$.

Considere, de início, que a primeira parcela $a_1a_5a_9$ seja igual a -1. Neste caso, n_2 e n_3 devem ser pares e n_1, n_4, n_5 e n_6 devem ser ímpares. Sempre respeitando $(n_1 + n_2 + n_3) = (n_4 + n_5 + n_6)$, podemos distinguir os seguintes casos para o vetor $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6]$:

- $\mathbf{n} = [1, a, b, 1, 1, 1]$, com $a = 2$ e $b = 0$ ou vice-versa: Em cada uma destas 2 situações, há 3 possíveis posições para o termo -1 na primeira parcela, o que define completamente o conteúdo dos demais elementos da matriz, totalizando 6 casos de interesse.
- $\mathbf{n} = [1, 2, 2, a, b, c]$, com $a = 3$ e $b = c = 1$ ou alguma permutação disto: Em cada uma destas 3 situações, a anti-diagonal com três elementos -1 automaticamente define a posição do elemento -1 da

primeira parcela. Com isto, sobram apenas 2 possibilidades para se completar a matriz com os demais elementos $+1$ ou -1, totalizando 6 casos de interesse.

- $\mathbf{n} = [3, 0, 0, 1, 1, 1]$: Este caso é completamente determinado pelos valores de n_i.
- $\mathbf{n} = [3, 2, 2, a, b, c]$, com $a = 1$ e $b = c = 3$ ou alguma permutação disto: Em cada uma destas 3 situações, a matriz M é completamente determinada pelos valores de n_i, totalizando 3 casos de interesse.

Assim, considerando a primeira parcela igual a -1, há 16 casos de interesse, de modo que, pela simetria do problema, fazendo qualquer uma das três primeiras parcelas igual a -1, têm-se $16 \times 3 = 48$ casos em que $D = 4$.

Considere agora que a quarta parcela $-a_3a_5a_7$ seja igual a -1. Neste caso, n_1, n_2, n_3 e n_4 devem ser pares e n_5 e n_6 devem ser ímpares, de modo que podemos distinguir os seguintes casos para o vetor $\mathbf{n}$:

- $\mathbf{n} = [a, b, c, 0, 1, 1]$, com $a = 2$ e $b = c = 0$ ou alguma permutação disto: Em cada uma destas 3 situações, a matriz M é completamente determinada pelos valores de n_i, totalizando 3 casos de interesse.
- $\mathbf{n} = [a, b, c, 2, 1, 1]$, com $a = 0$ e $b = c = 2$ ou alguma permutação disto: Em cada uma destas 3 situações, a diagonal com nenhum elemento -1 automaticamente define a posição dos elementos -1 da quarta parcela. Com isto, sobram apenas 2 possibilidades para se completar a matriz com os demais elementos $+1$ ou -1, totalizando 6 casos de interesse.
- $\mathbf{n} = [2, 2, 2, 2, a, b]$, com $a = 1$ e $b = 3$ ou vice-versa: Em cada uma destas 2 situações, há 3 possibilidades para se posicionar o elemento $+1$ na quarta parcela, o que determina o restante da matriz M, totalizando 6 casos de interesse.
- $\mathbf{n} = [2, 2, 2, 0, 3, 3]$: Este caso é completamente determinado pelos valores de n_i.

Assim, considerando a quarta parcela igual a -1, há também 16 casos de interesse, de modo que, pela simetria do problema, fazendo qualquer uma das três últimas parcelas igual a -1, têm-se novamente $16 \times 3 = 48$ casos em que $D = 4$.

Por tudo isto, há então $(48 + 48) = 96$ casos de interesse num total de 2^9 possibilidades, o que corresponde a uma probabilidade P para termos $D = 4$ dada por

$$P = \frac{96}{2^9} = \frac{3}{16}.$$

1.7 Vestibular 1975/1976

1.7.1 Prova de Álgebra

1ª Questão, [Valor: 1,25]: De (3) e (4):

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} \quad \ldots (6)$$

De (1) e (6):

$$E = (A \cup B \cup C) \cup (A \cup B \cup C)_E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \ldots (7)$$

De (5) e (7):

$$B = E - B_E = \{1, 2, 7, 10\} \quad \ldots (8)$$

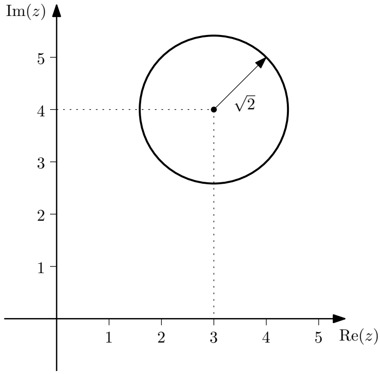
Por (1), os elementos ‘4’ e ‘6’ não pertencem a A nem C. Por (2), o elemento ‘7’ pertence C, e assim ‘7’ não pertence a A. Por (2) e (8), o sub-conjunto C não contém os elementos ‘1’, ‘2’ e ‘10’, que, por (4), devem então pertencer a A. Por (3) e (8), o elemento ‘9’ pertence a A, e assim ‘9’ não pertence a C; além disto, destas mesmas relações, os elementos ‘3’, ‘5’ e ‘8’ não pertencem a A, e, por (4) devem então pertencer a C. Em suma,

$$A = \{1, 2, 9, 10\} \quad \text{e} \quad C = \{3, 5, 7, 8\}$$

2ª Questão, [Valor: 1,25]: A relação desejada é equivalente a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(\frac{(x-2)+(y-3)i}{(x-4)+(y-5)i}\right) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{Re}\left([(x-2)+(y-3)i][(x-4)-(y-5)i]\right) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(x-2)(x-4)+(y-3)(y-5) = 0\\
\Leftrightarrow\ &x^2-6x+8+y^2-8y+15 = 0\\
\Leftrightarrow\ &(x-3)^2-9+8+(y-4)^2-16+15 = 0\\
\Leftrightarrow\ &(x-3)^2+(y-4)^2 = 2
\end{aligned}$$

que corresponde a uma circunferência de centro $(3, 4)$ e raio $\sqrt{2}$ representada a seguir.



3ª Questão, [Valor: 1,25]: Seja

$$L = \lim_{n\to\infty} \ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}{3}\right)}{\frac{1}{n}}$$

que, por L'Hôpital, é igual a

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}\right)\left[\frac{\left(1^{\frac{1}{n}}\right)'+\left(2^{\frac{1}{n}}\right)'+\left(3^{\frac{1}{n}}\right)'}{3}\right]}{\left(\frac{1}{n}\right)'} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1^{\frac{1}{n}}\ln 1\left(\frac{1}{n}\right)'+2^{\frac{1}{n}}\ln 2\left(\frac{1}{n}\right)'+3^{\frac{1}{n}}\ln 3\left(\frac{1}{n}\right)'}{1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)'} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1^{\frac{1}{n}}\ln 1 + 2^{\frac{1}{n}}\ln 2 + 3^{\frac{1}{n}}\ln 3}{1^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{\ln 1 + \ln 2 + \ln 3}{1+1+1} \\
&= \frac{\ln 6}{3} \\
&= \ln \sqrt[3]{6}
\end{aligned}$$

de modo que $A = \sqrt[3]{6}$.

4ª Questão, Item A [Valor: 0,5]: Por simetria, considera-se que o centro da circunferência está no ponto $(x_0, 0)$ sobre o eixo x. Igualando as equações da circunferência com a da parábola, tem-se

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+y^2=27 \\ y^2=6x \end{cases} \Rightarrow (x-x_0)^2+6x=27 \Rightarrow x^2+(6-2x_0)x+x_0^2-27=0$$

Novamente por simetria, devemos forçar esta equação a ter apenas uma solução em x, anulando o seu discriminante, de modo que

$$(6-2x_0)^2-4(x_0^2-27)=0 \Rightarrow 36-24x_0+108=0 \Rightarrow x_0=6$$

Logo, o centro da circunferência está no ponto $(6, 0)$ e os pontos A e B de tangência são tais que

$$x^2-6x+9=(x-3)^2=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{6x}=\pm3\sqrt{2}$$

Com isto, a distância d do vértice $(0, 0)$ da parábola aos pontos A e B é igual a $d=\sqrt{9+18}=3\sqrt{3}$.

4ª Questão, item B [Valor: 0,75]: Como no Item A, igualando as equações das duas curvas obtém-se a relação

$$(x-x_0)^2+6x=r^2 \Rightarrow x^2+(6-2x_0)x+x_0^2-r^2=0$$

Anulando o discriminante desta equação, para forçar dois pontos de tangência com mesma abscissa, obtém-se

$$(6-2x_0)^2-4(x_0^2-r^2)=0 \Rightarrow 4(9-6x_0+r^2)=0 \Rightarrow x_0=\frac{r^2+9}{6}$$

de modo que, como $r>0$, o lugar geométrico desejado é a parte do eixo x tal que $x_0>\frac{3}{2}$.

5ª Questão, [Valor: 1,25]: Por Girard,

$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3=0 \\ r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=m \\ r_1r_2r_3=-n \end{cases}$$

e como $r_1=r_2r_3$, têm-se que

$$\begin{cases} r_1(r_2+r_3+1)=m \Rightarrow r_1(-r_1+1)=m \\ r_1^2=-n \end{cases}$$

Logo, a relação do enunciado equivale a

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{1+r_1} + \frac{2+r_2+r_3}{1+r_2+r_3+r_2r_3} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{1+r_1} + \frac{2-r_1}{1-r_1+r_1} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{1+r_1} + 2 - r_1 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{1+r_1} = r_1 - 1 \\
\Leftrightarrow\ & r_1^2 - 1 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & r_1 = \pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

de modo que $n = -r_1^2 = -2$ e como $n > m$, tem-se $m = (-2-\sqrt{2})$ e $r_1 = -\sqrt{2}$. Com isto,

$$
\begin{cases}
r_2 + r_3 = -r_1 = \sqrt{2} \\
r_2 r_3 = r_1 = -\sqrt{2}
\end{cases}
$$

de modo que r_2 e r_3 são as raízes da equação

$$
r^2 - \sqrt{2}r - \sqrt{2} = 0
$$

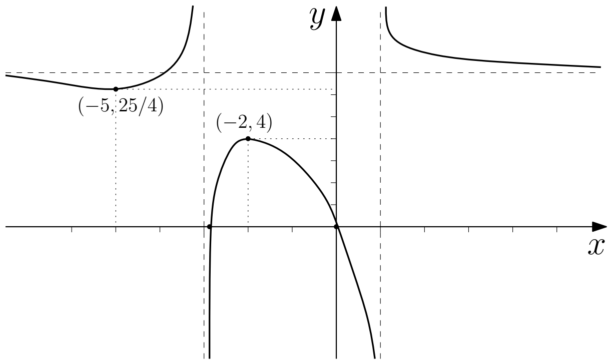
e assim

$$
r_{2,3} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4\sqrt{2}}}{2}
$$

6ª Questão, [Valor: 1,25]: Determinando as derivadas de y:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{7x\left(x+\frac{20}{7}\right)}{(x+3)(x-1)} \\
y' &= \frac{(x^2+2x-3)(14x+20)-(7x^2+20x)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} \\
&= \frac{-6(x^2+7x+10)}{(x^2+2x-3)^2} \\
&= \frac{-6(x+2)(x+5)}{(x+3)^2(x-1)^2} \\
y'' &= \frac{(x^2+2x-3)^2(-6)(2x+7)-2(x^2+2x-3)(2x+2)(-6)(x^2+7x+10)}{(x^2+2x-3)^4} \\
&= \frac{6(2x^3+21x^2+60x+61)}{(x^2+2x-3)^3}
\end{aligned}
$$

Assim, podemos concluir que: (i) Pontos que cruzam o eixo x: $(0,0)$ e $(-20/7,0)$; (ii) Assíntotas verticas: $x=-3$ e $x=1$; (iii) Assíntota horizontal: $y=7$, pois $\lim_{x\to\pm\infty} y = 7$; (iv) Máximo local: $(-2,4)$, pois $y'(-2)=0$ e $y''(-2)<0$; (v) Mínimo local: $(-5,25/4)$, pois $y'=0$ e $y''(-5)>0$; (vi) Intervalo de crescimento: $-5<x<-2$, pois $y'>0$ neste intervalo; (vii) Intervalos de decrescimento: $x<-5$ e $x>-2$, pois $y'<0$ nestes intervalos. Com destas informações, podemos gerar o seguinte esboço do gráfico de y:



7ª Questão, [Valor: 1,25]: Do enunciado,

$$\begin{cases} P(x)-1=(x+1)^4Q_1(x) \\ P(x)+1=(x-1)^4Q_2(x) \end{cases}$$

Derivando estas relações, têm-se

$$\begin{cases} P'(x)=4(x+1)^3Q_1(x)+(x+1)^4Q_1'(x)=(x+1)^3[4Q_1(x)+(x+1)Q_1'(x)] \\ P'(x)=4(x-1)^3Q_2(x)+(x-1)^4Q_2'(x)=(x-1)^3[4Q_2(x)+(x-1)Q_2'(x)] \end{cases}$$

Logo, $P'(x)$, que é de sexta ordem, tem raízes triplas em $x=1$ e em $x=-1$, de modo que

$$P'(x)=k(x-1)^3(x+1)^3=k(x^2-1)^3=k(x^6-3x^4+3x^2-1)$$

$$\Rightarrow P(x)=k\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x+c\right)$$

com $k\neq 0$. Usando as condições do problema, têm-se

$$\begin{cases} P(-1)-1=0 \\ P(1)+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{5}-1+1+c\right)=1 \\ k\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{5}+1-1+c\right)=-1 \end{cases}$$

e assim, adicionando-se e subtraindo-se as duas equações,

$$\begin{cases} 2kc=0 \\ 2k\left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{5}\right)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ k=\frac{35}{16} \end{cases} \Rightarrow P(x)=\frac{5}{16}x^7-\frac{21}{16}x^5+\frac{35}{16}x^3-\frac{35}{16}x$$

8ª Questão, [Valor: 1,25]: Sejam a, b e c os índices dos alunos escolhidos. Para evitar números consecutivos numa mesma comissão, basta evitar que os índices $(b-1)$ e $(b+1)$ sejam escolhidos. Assim, o números N de comissões distintas sem índices consecutivos é

$$N = C_3^{n-2} = \frac{(n-2)!}{(n-5)!\,3!} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$$

para $n \geq 5$. Naturalmente, evitando-se dois índices consecutivos já evitamos os casos de três índices consecutivos.

1.8 Vestibular 1974/1975

1.8.1 Prova de Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]: Usando as relações do arco-dobro e de transformação em produto, têm-se

$$\begin{aligned} 1-2\,\mathrm{sen}^2\,x &= \cos 2x \\ \mathrm{sen}\,9x + \mathrm{sen}\,5x &= 2\,\mathrm{sen}\,7x\cos 2x \end{aligned}$$

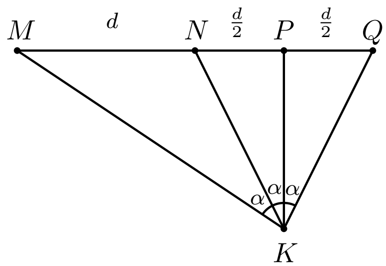
Logo, a equação do enunciado é equivalente a

$$2\,\mathrm{sen}\,7x\cos 2x - \cos 2x = 0$$

cuja solução, para qualquer k inteiro, é dada por

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \text{ou} \\ \mathrm{sen}\,7x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ 7x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{2k\pi+\pi}{4} \\ \text{ou} \\ \frac{12k\pi+3\pi\pm 2\pi}{42} \end{cases}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]:



Pelo teorema das bissetrizes no triângulo ΔNKQ,

$$\frac{\overline{NK}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{QK}}{\overline{QP}} \Rightarrow \overline{NK} = \overline{QK} \Rightarrow \widehat{KPN} = \widehat{KPQ} = 90^{\text{o}}$$

Pelos teoremas de Pitágoras e das bissetrizes no triângulo ΔMPK, têm-se

$$\begin{cases} \overline{MK}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PK}^2 \\ \frac{\overline{MK}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{PK}}{\overline{PN}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{9d^2}{4} + h^2}}{d} = \frac{h}{\frac{d}{2}}$$

de modo que

$$\frac{9d^2}{4} + h^2 = 4h^2 \Rightarrow \frac{h}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]:

a) Da lei dos senos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b+c}{\operatorname{sen}(90^{\text{o}} + \hat{C}) + \operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{ma}{\cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{C}}$$

de modo que devemos ter

$$\begin{aligned} \cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{C} &= m \operatorname{sen}\hat{A} \\ &= m \operatorname{sen}(90^{\text{o}} - 2\hat{C}) \\ &= m \cos 2\hat{C} \\ &= m(\cos^2\hat{C} - \operatorname{sen}^2\hat{C}) \\ &= m(\cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{C})(\cos\hat{C} - \operatorname{sen}\hat{C}) \end{aligned}$$

Cancelando o termo $(\cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{C})$ e elevando ao quadrado, tem-se

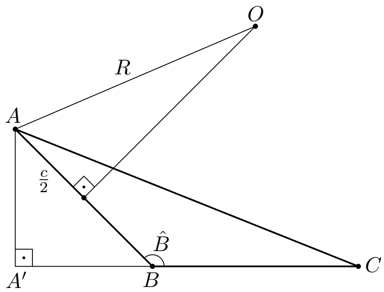
$$\frac{1}{m^2} = \cos^2\hat{C} - 2\cos\hat{C}\operatorname{sen}\hat{C} + \operatorname{sen}^2\hat{C} = 1 - \operatorname{sen} 2\hat{C}$$

e então

$$\operatorname{sen} 2\hat{C} = \frac{m^2 - 1}{m^2} \;\Rightarrow\; \cos 2\hat{C} = \frac{\sqrt{2m^2 - 1}}{m^2}$$

Logo,

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\hat{C} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2C}{2}} = \sqrt{\frac{m^2 - \sqrt{2m^2 - 1}}{2m^2}} \\ \operatorname{sen}\hat{A} = \cos 2\hat{C} = \frac{\sqrt{2m^2 - 1}}{m^2} \\ \operatorname{sen}\hat{B} = \cos\hat{C} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\hat{C}} = \sqrt{\frac{m^2 + \sqrt{2m^2 - 1}}{2m^2}} \end{cases}$$



b) Da figura, e pela lei dos senos no triângulo ΔABC, tem-se que

$$\cos\widehat{OAB} = \frac{\frac{c}{2}}{R} = \frac{c}{2R} = \operatorname{sen}\hat{C} \;\Rightarrow\; \widehat{OAB} = 90^{\text{o}} - \hat{C}$$

Se A' é o pé da altura do vértice A em relação ao lado BC, então

$$\widehat{A'AO} = \widehat{A'AB} + \widehat{OAB} = (\hat{B} - 90^{\text{o}}) + (90^{\text{o}} - \hat{C}) = 90^{\text{o}}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]: A área S do quadrilátero $KMLN$ é a soma das áreas S_1 do triângulo retângulo ΔLMN e S_2 do triângulo equilátero ΔKMN. Observando que

$$\begin{array}{l} \overline{MQ} = \overline{NQ} = \overline{MC} = \overline{NC} = \overline{NL} = R \\ \overline{MN} = \overline{KM} = \overline{KN} = R\sqrt{3} \end{array}$$

têm-se

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{(R\sqrt{3})R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} \\ S_2 = \frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \end{array} \right. \Rightarrow S = \frac{5R^2\sqrt{3}}{4}$$

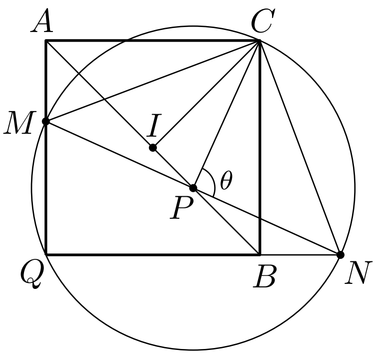
5ª Questão [Valor: 1,0]:

O quadrilátero $QMCN$ é inscritível. Como, $\widehat{NQM} = 90^{\text{o}}$, então $\widehat{NCM} = 90^{\text{o}}$ e assim

$$\widehat{NCM} = \widehat{ACB} - \widehat{ACM} + \widehat{BCN} \;\Rightarrow\; \widehat{ACM} = \widehat{BCN}$$

e os triângulos ΔACM e ΔBCN são congruentes, de modo que $\overline{AM} = \overline{BN}$ e assim $r_1 = 1$.

Além disto, tem-se $\overline{CM} = \overline{CN}$, e como $\overline{PM} = \overline{PN}$, então CP é a altura do triângulo isósceles ΔCMN, de forma que $\theta = 90^{\text{o}}$.

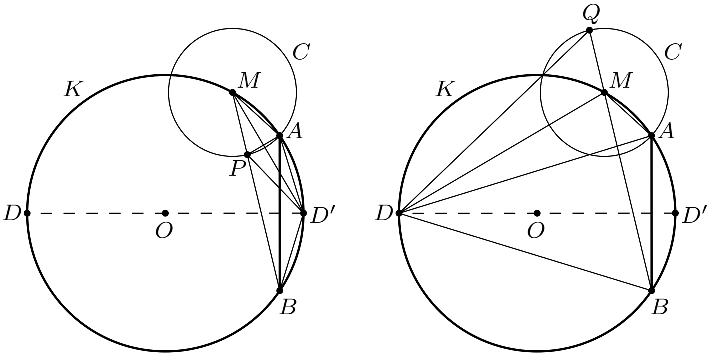


Sejam $\overline{AC} = a$ e $\overline{PQ} = r$, respectivamente, o lado do quadrado e o raio da circunferência de centro P. Nos triângulos retângulos ΔACM e ΔCIP, têm-se

$$\begin{cases} \overline{AM}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{AC}^2 = (\overline{PC}^2 + \overline{PM}^2) - a^2 = 2r^2 - a^2 \\ \overline{IP}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{CI}^2 = r^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

de modo que $r_2 = \sqrt{2}$.

6ª Questão [Valor: 1,0]:

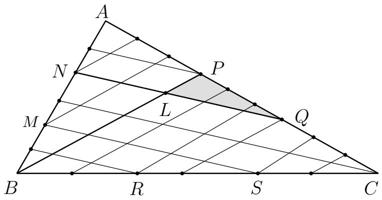


Seja $\overline{DD'}$ o diâmetro de K perpendicular à corda $\overline{AB}$.

Como $\overline{AD'} = \overline{BD'}$, então, no quadrilátero inscritível $BMAD'$, tem-se $\widehat{AMD'} = \widehat{BMD'}$. Logo, como $\overline{MP} = \overline{MA}$, os triângulos $\Delta PMD'$ e $\Delta AMD'$ são congruentes, de modo que $\overline{PD'} = \overline{AD'}$. Assim, o ponto P percorre a circunferência de centro D' e raio $\overline{AD'}$.

Para o ponto Q, como $\overline{AD} = \overline{BD}$, então, no quadrilátero inscritível $BDMA$, tem-se $(180^o - \widehat{AMD}) = \widehat{BMD}$. Logo, os triângulos ΔQMD e ΔAMD são congruentes, pois $\overline{MQ} = \overline{MA}$, de modo que $\overline{QD} = \overline{AD}$. Assim, o ponto Q percorre a circunferência de centro D e raio $\overline{AD}$.

7ª Questão [Valor: 1,0]:



Como $\widehat{BAC} = 90^{\text{o}}$, então

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{3}$$

e assim

$$\begin{cases} \overline{PB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + (\frac{1}{3}\overline{AC})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \overline{QN} = \sqrt{\overline{AN}^2 + \overline{AQ}^2} = \sqrt{(\frac{1}{3}\overline{AB})^2 + (\frac{2}{3}\overline{AC})^2} = \frac{\sqrt{13}}{3} \end{cases}$$

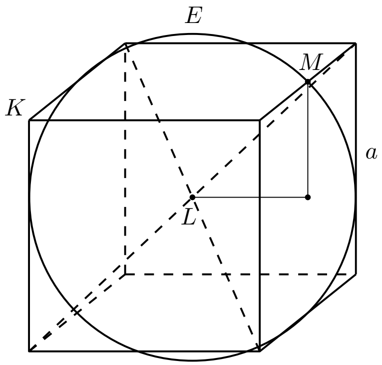
Dividindo-se o lado $\overline{AC}$ em nove partes e traçando, por cada parte, uma paralela a $\overline{BP}$, o segmento $\overline{AP}$ engloba três divisões iguais, de modo que a primeira divisão é ligada ao ponto N sobre $\overline{AB}$. Logo, $\overline{QL} = \frac{3}{5}\overline{QN} = \frac{\sqrt{13}}{5}$.

Dividindo-se o lado $\overline{AB}$ em seis partes e traçando, por cada divisão, uma paralela a $\overline{QN}$, a primeira parte se une ao ponto P e assim a terceira parte se une ao vértice C. As demais paralelas dividem o lado $\overline{BC}$ em três partes iguais, de forma que $\overline{PL} = \frac{1}{5}\overline{PB} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$.

Usando a notação $\overline{QL} = a$, $\overline{PL} = b$ e $\overline{PQ} = c$, e denotando o perímetro do triângulo ΔPLQ por $2p$, a área desejada deste triângulo pode ser calculada como

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{[-a^2 + (b+c)^2][a^2 - (b-c)^2]}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{[-(3\sqrt{13})^2 + (7\sqrt{3})^2][(3\sqrt{13})^2 - (3\sqrt{3})^2]}}{30^2} \\ &= \frac{\sqrt{(-117+147)(117-27)}}{900} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{30} \end{aligned}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]:



O raio R da esfera E é dado por

$$R = \overline{LM} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Logo, a pirâmide P tem altura

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} - R = \frac{a(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}$$

Sejam ℓ_ℓ e ℓ_b os respectivos comprimentos das arestas laterais e da base de P. Como as faces laterais de P são triângulos retângulos, tem-se

$$\ell_b = \ell_\ell\sqrt{2}$$

Além disto, na pirâmide regular

$$\ell_\ell^2 = h^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{\ell_b\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

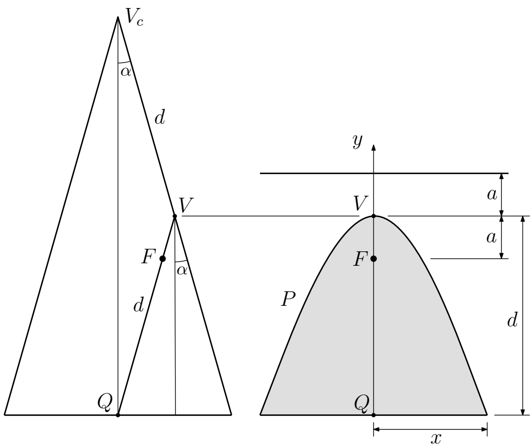
de modo que

$$\ell_\ell^2 - \frac{\ell_b^2}{3} = h^2 \Rightarrow \ell_\ell^2 - \frac{2\ell_\ell^2}{3} = h^2 \Rightarrow \ell_\ell = h\sqrt{3} \text{ e } \ell_b = h\sqrt{6}$$

Logo, o volume V de P é dado por

$$\begin{aligned} V &= \frac{\frac{\ell_b^2\sqrt{3}}{4}h}{3} \\ &= \frac{h^3\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{a^3(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{a^3(27-11\sqrt{6})}{16} \end{aligned}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]:



a) Seja d a distância do vértice V da parábola ao vértice V_c do cone. Seja ainda Q a interseção do plano gerador da parábola com o eixo do cone. Como $\widehat{VQV_c} = \widehat{VV_cQ} = \alpha$, então $\overline{VQ} = \overline{VV_c} = d$ e com isto, usando a notação indicada na figura acima,

$$x = 2d \operatorname{sen} \alpha$$

Além disto, pela definição de parábola, tem-se

$$\sqrt{x^2 + (d-a)^2} = d + a \Rightarrow x^2 = 4ad \Rightarrow a = d \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Assim, para cada d, o foco da parábola correspondente dista $d \operatorname{sen}^2 \alpha$ do vértice V. Logo, o lugar geométrico desejado é uma reta passando por V_c.

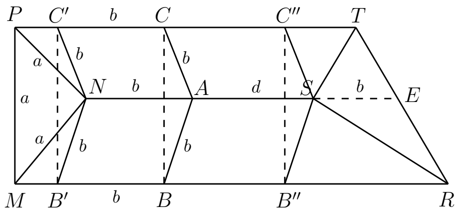
b) Situando os eixos coordenados xy como indicado na figura acima, a parábola P é descrita pela equação

$$y = -\frac{x}{4d \operatorname{sen}^2 \alpha} + d$$

de modo que a área S desejada é dada por

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-2d\,\mathrm{sen}\,\alpha}^{2d\,\mathrm{sen}\,\alpha} \left(-\frac{x^2}{4d\,\mathrm{sen}^2\,\alpha} + d\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{x^3}{12d\,\mathrm{sen}^2\,\alpha} + dx \Bigg|_{x=-2d\,\mathrm{sen}\,\alpha}^{x=2d\,\mathrm{sen}\,\alpha} \\
&= \frac{8}{3}d^2\,\mathrm{sen}\,\alpha
\end{aligned}$$

10ª Questão [Valor: 1,0] (Baseada em solução do Colégio Impacto):



Seja a figura devidamente rotacionada para efeito de diagramação.

a) Traçando, por N, paralelas a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, determinam-se B' e C' sobre $\overline{MR}$ e $\overline{PT}$, respectivamente. Assim, do triângulo retângulo $\Delta B'NC'$, tem-se $a = b\sqrt{2}$. O volume V_1 é a soma dos volumes V_a do prisma reto $ABCB'NC'$ e V_b da pirâmide $B'MPC'N$. Logo,

$$V_1 = \frac{\overline{AB}\,\overline{AC}}{2}\overline{AN} + \frac{\overline{MB'}\,\overline{MP}\frac{b\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{b^3}{2} + \frac{b^3}{3} = \frac{5b^3}{6}$$

b) Traçando, por S, paralelas a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, determinam-se B'' e C'' sobre $\overline{MR}$ e $\overline{PT}$, respectivamente. Se X é médio de $\overline{B''C''}$, no triângulo retângulo ΔSXE, tem-se $\overline{XE} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. Além disto, $\overline{XE}$ é base média do trapézio $C''TRB''$, e assim $2\overline{XE} = (\overline{C''T} + \overline{B''R})$.

O volume V_2 é dado pela área da base ΔABC multiplicada pela média das arestas laterais $\overline{CT}$, $\overline{AS}$ e $\overline{BR}$ do semi-prisma. Logo,

$$V_2 = \frac{b^2}{2}\frac{[(d+\overline{C''T})+d+(d+\overline{B''R})]}{3} = \frac{b^2(3d+b\sqrt{2})}{6}$$

de modo que

$$V_1 = V_2 \Rightarrow d = \frac{(5-\sqrt{2})b}{3}$$

1.9 Vestibular 1973/1974

1.9.1 Prova de Álgebra

1ª Questão, Item 1 [Valor: 0,6]:

a) Da segunda relação, tem-se que $f(e) = 1$. Usando $y = e$ na primeira relação, tem-se

$$f(e^x) = xf(e) = x.$$

Logo,

$$f^{-1}(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \ln x.$$

b) Pelo item anterior, usando o conceito de integral por partes e L'Hôpital, o limite L desejado é tal que

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln x \, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(x \ln x |_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 1 \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\varepsilon \ln \varepsilon - (1 - \varepsilon) \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\varepsilon - 1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

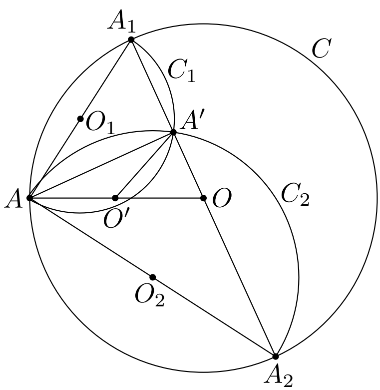
1ª Questão, Item 2 [Valor: 0,4]: Dos dados do problema, $(200 - 75) = 125$ pessoas gostam apenas de música clássica, $(400 - 75) = 325$ pessoas gostam apenas de música popular e 75 pessoas gostam de ambos os estilos. Isto dá um total de 525 pessoas, ao invés dos 500 entrevistados, indicando que os dados são inconsistentes.

2ª Questão, Item 1 [Valor: 0,5]: Como $q(x)$ pode ser decomposto da forma $q(x) = x(2x+1)$, seus fatores são 1, x, $(2x+1)$ e o próprio $q(x) = (2x^2+x)$, que são os possíveis mdc's com $p(x)$.

2ª Questão, Item 2 [Valor: 0,5]: Assumindo que os dois polinômios têm as mesmas raízes, por Girard têm-se que

$$\begin{cases} \frac{1}{m+1} = \frac{3}{m-1} \\ \frac{n-2}{m+1} = \frac{n+2}{m-1} \\ \frac{m+n-p}{m+1} = \frac{m-n+p}{m-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ \frac{n-2}{-1} = \frac{n+2}{-3} \\ \frac{-2+n-p}{-1} = \frac{-2-n+p}{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ \frac{-2+4-p}{-1} = \frac{-2-4+p}{-3} \end{cases} \Rightarrow p = 3.$$

3ª Questão [Valor: 1,0]:



Sejam a circunferência $C \equiv (O, r)$, as extremidades A_1 e A_2 das cordas perpendiculares de C passando por A, as circunferências $C_1 \equiv (O_1, r_1)$ e $C_2 \equiv (O_2, r_2)$ de diâmetros AA_1 e AA_2, respectivamente, e a outra interseção A', distinta de A, de C_1 e C_2.

Como AA_1 e AA_2 são os respectivos diâmetros de C_1 de C_2, então $A\hat{A}'A_1 = A\hat{A}'A_2 = 90^{\circ}$, de modo que A' é a projeção de A no diâmetro A_1A_2 de C. Assim, no triângulo retângulo $\Delta AA'O$, a mediana $A'O'$ relativa à hipotenusa AO é tal que $A'O' = \frac{AO}{2} = \frac{r}{2}$, que é constante. Logo, o lugar geométrico desejado de A' é a circunferência de centro O', ponto médio de AO, e raio $\frac{r}{2}$.

sln: O que uma questão fundamentalmente geométrica está fazendo nesta prova de álgebra?

4ª Questão [Valor: 1,0]:

a) Da definição da relação D, a operação $m\ D\ 1$ equivale a $m = \pm 1$. Logo, é simples observar que $a\ E\ a$, pois existe $m = 1$ tal que $m\ D\ 1$ é definida e ainda $a = ma$, de modo que E é reflexiva. Além disto,

$$a\ E\ b \ \Leftrightarrow\ a = \pm b \ \Leftrightarrow\ b = \pm a \ \Leftrightarrow\ b\ E\ a,$$

e E é simétrica. Por fim,

$$\left\{ \begin{array}{l} a\ E\ b \ \Leftrightarrow\ a = \pm b \\ b\ E\ c \ \Leftrightarrow\ b = \pm c \end{array} \right. \ \Leftrightarrow\ a = \pm c \ \Leftrightarrow\ a\ E\ c,$$

de modo que E é transitiva, fazendo com que E seja uma relação de equivalência.

b) Uma raiz n-ésima r de um número N é dita primitiva se ela não é também raiz m-ésima, com $m < n$, de N.

Seja $r_k = e^{\frac{i2\pi k}{n}}$, para $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$, uma raiz n-ésima da unidade. Sejam ainda $\ell = \mathrm{mdc}(k, n)$, $k = q\ell$ e $n = m\ell$, com q e m primos entre si, de modo que podemos escrever $r_k = e^{\frac{i2\pi q}{m}}$. Logo, r_k é sempre uma raiz m-ésima primitiva da unidade, com a relação $m\ D\ n$ sempre definida para um único $m = n/\mathrm{mdc}(k, n)$.

5ª Questão [Valor: 1,0]:

a) Em torno do ponto x_0, a função $f_0(x)$ pode ser aproximada por

$$f_0(x) \approx f_0(x_0) + f_0'(x_0)\Delta x + f_0''(x_0)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + f_0'''(x_0)\frac{(\Delta x)^3}{3!} + f_0''''(x_0)\frac{(\Delta x)^4}{4!},$$

com $\Delta x = (x - x_0)$ e ainda

$$\begin{aligned}
f_0'(x) &= 1 + \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - x}\left[\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2x) - 1\right] = 1 - (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}, \\
f_0''(x) &= -(-\frac{1}{2})(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}(2x) = (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}x, \\
f_0'''(x) &= \left[(-\frac{3}{2})(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}(2x)\right]x + (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \\
&= (x^2+1)^{-\frac{5}{2}}[-3x^2 + (x^2+1)] \\
&= (x^2+1)^{-\frac{5}{2}}(1-2x^2), \\
f_0''''(x) &= \left[-\frac{5}{2}(x^2+1)^{-\frac{7}{2}}(2x)\right](1-2x^2) + (x^2+1)^{-\frac{5}{2}}(-4x) \\
&= (x^2+1)^{-\frac{7}{2}}[-5x(1-2x^2) + (x^2+1)(-4x)] \\
&= (x^2+1)^{-\frac{7}{2}}(3x)(2x^2-3).
\end{aligned}$$

b) Do item anterior,

$$\lim_{x\to 0} f_0(x) = \lim_{x\to 0} f_0'(x) = \lim_{x\to 0} f_0''(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} f_0'''(x) = 1.$$

Assim, por L'Hôpital, têm-se que

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f_0(x)}{x} = \lim_{x\to 0} f_0'(x) = 0 = a_1, \\
&\lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f_0(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f_0'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{f_0''(x)}{2} = 0 = a_2, \\
&\lim_{x\to 0} f_3(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f_0(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{f_0'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f_0''(x)}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{f_0'''(x)}{6} = \frac{1}{6} = a_3,
\end{aligned}$$

e, para $k > 3$,

$$\lim_{x\to 0} f_k(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f_0(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{f_0'(x)}{kx^{k-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{f_0''(x)}{k(k-1)x^{k-2}},$$

de modo que, para $k > 3$,

$$\lim_{x\to 0} f_k(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f_0'''(x)}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}} = \infty.$$

6ª Questão [Valor: 1,0]:

a) Como $A.B = I$, então $|A|.|B| = 1$ e assim $|A| = 1/|B| = 1/2$. Além disto, usando Laplace na quarta linha, tem-se que

$$\begin{aligned} |C| &= -(1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 2 & 4 & c \end{vmatrix} + (d)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -(-c + 2b + 4a - 2a + 4b - c) + d(4 - 1 + 2 - 1 - 2 + 4) \\ &= -2a - 6b + 2c + 6d, \end{aligned}$$

e assim

$$|A|.|C| = (-a - 3b + c + 3d) = f(a, b, c, d).$$

b) Seja $p(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$. Para satisfazer as condições do problema, devemos ter

$$\begin{cases} p(-1) = \alpha - \beta + \gamma = a \\ p(1) = \alpha + \beta + \gamma = b \\ p(2) = 4\alpha + 2\beta + \gamma = c \\ p(0) = \gamma = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = a - d \\ \alpha + \beta = b - d \\ 4\alpha + 2\beta = c - d \end{cases}.$$

As duas primeiras equações geram a solução $\alpha = (a + b - 2d)/2$ e $\beta = (b - a)/2$, de modo que, pela terceira equação, o sistema tem solução se e somente se

$$2(a+b-2d)+(b-a) = c-d \Leftrightarrow -(-a-3b+c+3d) = 0 \Leftrightarrow f(a, b, c, d) = 0.$$

7ª Questão [Valor: 1,0]: Seja Δ o determinante definido no enunciado. Aplicando-se a translação

$$\begin{cases} x = u - x_0 \\ y = v - y_0 \end{cases},$$

tem-se a equação transformada

$$A(u-x_0)^2+2B(u-x_0)(v-y_0)+C(v-y_0)^2+2D(u-x_0)+2E(v-y_0)+F = 0,$$

que pode ser escrita como

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2(D - Ax_0 - By_0)u + 2(E - Cy_0 - Bx_0)v + \overline{F} = 0,$$

com $\overline{F} = (Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2-2Dx_0-2Ey_0+F)$. Com isto, o determinante $\overline{\Delta}$ da equação transformada é tal que

$$\overline{\Delta} = \overline{A}\,\overline{C} - \overline{B}^2 = AC - B^2 = \Delta.$$

Aplicando-se a rotação de um ângulo θ qualquer,

$$\left\{\begin{array}{l} x = u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = u\,\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta \end{array}\right. ,$$

tem-se a equação transformada

$$\begin{aligned} &A(u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + 2B(u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta)(u\,\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta) \\ &+ C(u\,\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta)^2 + 2D(u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta) + 2E(u\,\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta) + F = 0 \end{aligned}$$

que equivale a

$$\overline{A}u^2 + 2\overline{B}uv + \overline{C}v^2 + 2\overline{D}u + 2\overline{E}v + F = 0,$$

com

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overline{A} &=& A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + C\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ &=& A\cos^2\theta + B\,\mathrm{sen}\,2\theta + C\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ \overline{B} &=& -A\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + B(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) + C\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \\ &=& \frac{(C-A)}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + B\cos 2\theta \\ \overline{C} &=& A\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 2B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ &=& A\,\mathrm{sen}^2\,\theta - B\,\mathrm{sen}\,2\theta + C\cos^2\theta \end{array}\right.$$

e os valores de $\overline{D}$ e $\overline{E}$ não alterando o determinante $\overline{\Delta}$ da equação transformada

$$\begin{aligned} \overline{\Delta} &= \overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C} \\ &= \frac{(C-A)^2}{4}\,\mathrm{sen}^2\,2\theta + (C-A)B\,\mathrm{sen}\,2\theta\cos 2\theta + B^2\cos^2 2\theta \\ &\quad - \big[(A^2+C^2)\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta - B^2\,\mathrm{sen}^2\,2\theta + AC\left(\cos^4\theta + \mathrm{sen}^4\,\theta\right) \\ &\quad + AB\,\mathrm{sen}\,2\theta\left(\mathrm{sen}^2\,\theta - \cos^2\theta\right) + BC\,\mathrm{sen}\,2\theta\left(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta\right)\big] \\ &= (C-A)^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos^2\theta + (C-A)B\,\mathrm{sen}\,2\theta\cos 2\theta + B^2\cos^2 2\theta \\ &\quad -(A^2+C^2)\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta + B^2\,\mathrm{sen}^2\,2\theta - AC\left(\cos^4\theta + \mathrm{sen}^4\,\theta\right) \\ &\quad -(C-A)B\,\mathrm{sen}\,2\theta\cos 2\theta \\ &= -2AC\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos^2\theta + B^2\left(\cos^2 2\theta + \mathrm{sen}^2\,2\theta\right) - AC\left(\cos^4\theta + \mathrm{sen}^4\,\theta\right) \\ &= B^2 - AC(\cos^4\theta + 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos^2\theta + \mathrm{sen}^4\,\theta) \\ &= B^2 - AC(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta)^2 \\ &= B^2 - AC \\ &= \Delta. \end{aligned}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]:

a) No intervalo $1 \leq x \leq 2$,

$$\begin{array}{l} f^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ se } x \text{ é racional} \\ 0, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases} \\ f^-(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \text{ é racional} \\ -\frac{1}{x}, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases} \end{array} \Rightarrow f^+(x) - f^-(x) = \frac{1}{x}.$$

Assim, por descontinuidade em um número infinito de pontos no intervalo $1 \leq x \leq 2$, o valor de I_1 não é definido, enquanto que

$$I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

b) As funções $f(x)$ e $f^+(x)$ não são limitadas superiormente, de modo que os seus supremos são infinitos, isto é, não são definidos. Por isto mesmo, os valores de g e h não são determinados, o mesmo ocorrendo, então, para M.

9ª Questão [Valor: 1,0]:

a) Os pontos de acumulação de A formam o conjunto

$$A' = \begin{cases} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n + \frac{1}{m}} \\ \frac{1}{n} = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{n + \frac{1}{m}}, \forall n \in Z_0^+ \end{cases},$$

e os pontos de acumulação de A' determinam o conjunto

$$A'' = \{0\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.$$

sln: a_A é ponto de acumulação do conjunto A, se toda vizinhança de a_A contém elemento(s) de A, de modo que a_A é limite de alguma sequência infinita de elementos de A.

b) Determinando as interseções de $f(x)$ e $g(x)$, tem-se

$$x^2+8=6x \Rightarrow (x-2)(x-4)=0.$$

Com isto,

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_4^5 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_4^5 g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left. 3x^2\right|_{x=1}^{x=2} + \left.\left(\frac{x^3}{3}+8x\right)\right|_{x=3}^{x=4} + \left. 3x^2\right|_{x=4}^{x=5} \\
&= 3(2^2-1^2) + \left(\frac{4^3}{3}+8.4-\frac{3^3}{3}+8.3\right) + 3(5^2-4^2) \\
&= \frac{169}{3}.
\end{aligned}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]: Para $k=0$, a função $f(k)$ é nula, o mesmo ocorrendo então para $x^k f(k)$ e sua derivada em qualquer ponto.

Para $k>0$, a função $f(k)$ é um somatório infinito dos termos de uma progressão geométrica, e assim

$$f(k) = \frac{1}{1-k^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{k}},$$

se

$$\left| k^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{k}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} < 1,$$

o que sempre é válido para $k>0$, e neste caso

$$\frac{\mathrm{d}(x^k f(k))}{\mathrm{d}x} = kx^{k-1} f(k) = kx^{k-1}\,\frac{1}{1-k^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{k}}.$$

Com tudo isto,

$$\left.\frac{\mathrm{d}(x^k f(k))}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \begin{cases} 0, \ \text{se } k\neq 1 \\ \dfrac{1}{1-\ \operatorname{sen}^2 1}, \ \text{se } k=1 \end{cases}.$$

1.10 Vestibular 1973/1974

1.10.1 Prova de Geometria

1ª Questão, Item 1 [Valor: 0,4]: Como

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}[\pi - (c+b)] &= \operatorname{sen}\pi\cos(c+b) - \operatorname{sen}(c+b)\cos\pi \\
&= \operatorname{sen}(c+b)
\end{aligned}
$$

as relações do enunciado acarretam em:

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{sen}(a+d) = \operatorname{sen}(c+b) \\
\Leftrightarrow\ & \operatorname{sen} a\cos d + \operatorname{sen} d\cos a = \operatorname{sen} c\cos b + \operatorname{sen} b\cos c \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\operatorname{sen} a\cos d + \operatorname{sen} d\cos a}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} d} = \frac{\operatorname{sen} c\cos b + \operatorname{sen} b\cos c}{\operatorname{sen} c\operatorname{sen} b} \\
\Leftrightarrow\ & \operatorname{cotg} d + \operatorname{cotg} a = \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} c \\
\Leftrightarrow\ & \operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b = \operatorname{cotg} c - \operatorname{cotg} d
\end{aligned}
$$

1ª Questão, Item 2 [Valor: 0,6]: Usando a transformação em produto

$$
\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y
$$

com $x = 4a$ e $y = -a$, a expressão S do enunciado é igual a

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\cos a\,.\cos 13a}{2\cos 4a\,.\cos(-a)} \\
&= \frac{\cos 13a}{2\cos 4a} \\
&= \frac{\cos\frac{13\pi}{17}}{2\cos\frac{4\pi}{17}} \\
&= \frac{\cos\left(\pi - \frac{4\pi}{17}\right)}{2\cos\frac{4\pi}{17}} \\
&= \frac{\cos\pi\cos\frac{4\pi}{17} + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\frac{4\pi}{17}}{2\cos\frac{4\pi}{17}} \\
&= \frac{-\cos\frac{4\pi}{17}}{2\cos\frac{4\pi}{17}} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2ª Questão, Item 1 [Valor: 0,6]: Desenvolvendo o lado direito D da equação, tem-se

$$D = \left(\cos 3x \cos\frac{\pi}{2} - \,\text{sen}\,3x\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)^2 = \text{sen}^2 3x$$

de modo que, para todo k inteiro, devemos ter

$$\begin{aligned}\text{sen}(x-\frac{\pi}{4}) = \pm\,\text{sen}\,3x \Rightarrow x-\frac{\pi}{4} &= k\pi\pm 3x\\ \Rightarrow x &= \frac{(4k+1)\pi}{4(1\mp 3)}\end{aligned}$$

2ª Questão, Item 2 [Valor: 0,4]: Para $x = 0$, tem-se

$$y(0) = 1 + m$$

e para $x = \frac{\pi}{4}$, tem-se

$$y(\frac{\pi}{4}) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 + 2m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1+2m}{4}$$

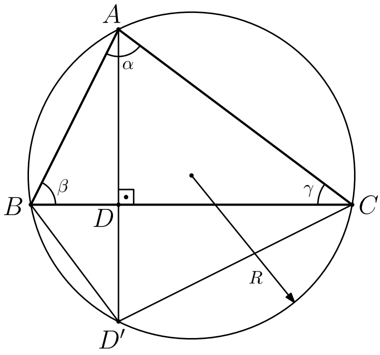
Assim, para y ser independente de x, o único possível valor de m é dado por

$$y(0) = y(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow 1 + m = \frac{1+2m}{4} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

Para este valor, de fato, tem-se

$$\begin{aligned}y &= \,\text{sen}^6 x + \cos^6 x - \frac{3}{2}(\text{sen}^4 x + \cos^4 x)\\ &= \,\text{sen}^4 x(\text{sen}^2 x - 1) + \cos^4 x(\cos^2 x - 1) - \frac{1}{2}(\text{sen}^4 x + \cos^4 x)\\ &= \,\text{sen}^4 x(-\cos^2 x) + \cos^4 x(-\,\text{sen}^2\, x) - \frac{1}{2}(\,\text{sen}^4 x + \cos^4 x)\\ &= -\,\text{sen}^2 x \cos^2 x(\,\text{sen}^2\, x + \cos^2 x) - \frac{1}{2}(\text{sen}^4 x + \cos^4 x)\\ &= -\,\text{sen}^2\, x \cos^2 x - \frac{1}{2}(\text{sen}^4\, x + \cos^4 x)\\ &= -\frac{1}{2}(\,\text{sen}^4\, x + 2\,\text{sen}^2\, x \cos^2 x + \cos^4 x)\\ &= -\frac{1}{2}(\,\text{sen}^2\, x + \cos^2 x)^2\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]:



Seja a notação indicada na figura acima. Pelo conceito de arco-capaz,

$$D'\hat{B}C = D'\hat{A}C = 90^{\text{o}} - \gamma$$

Além disto, pela lei dos senos nos triângulos ΔABC e $\Delta ABD'$, inscritos no mesmo círculo de raio R, tem-se

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{AD'}{\operatorname{sen}(\beta + D'\hat{B}C)} = 2R$$

Logo,

$$AD' = 2R\operatorname{sen}(\beta + 90^{\text{o}} - \gamma) = 2R\cos(\gamma - \beta)$$

e do triângulo retângulo ΔABD, tem-se

$$AD = AB\operatorname{sen}\beta = 2R\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta$$

Analogamente, para os outros lados, têm-se

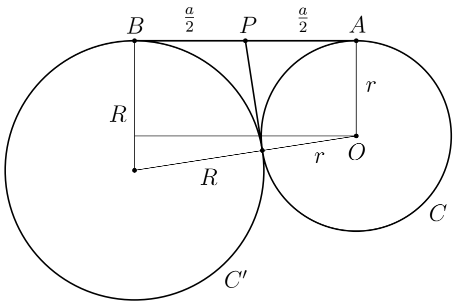
$$BE' = 2R\cos(\alpha - \gamma); \quad CF' = 2R\cos(\beta - \alpha)$$
$$BE = 2R\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma; \quad CF = 2R\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$$

4ª Questão [Valor: 1,0]:

a) Seja P o ponto médio de AB, de modo que $PA = PB = \frac{a}{2}$. Pelo conceito de potência, tem-se

$$\begin{cases} \text{Pot}_C(P) = PA^2 \\ \text{Pot}_{C'}(P) = PB^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Pot}_C(P) = \text{Pot}_{C'}(P)$$

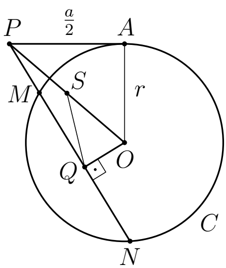
Logo, o ponto fixo P sempre pertence ao eixo radical dos círculos C e C', eixo este que é determinado pelos pontos M e N, interseções destes círculos.



b) Seja R o raio de C'. No caso limite em que C e C' são tangentes externos, passando por O uma paralela a AB, tem-se um triângulo retângulo tal que

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + a^2 \Rightarrow R = \frac{a^2}{4r}$$

Logo, para C e C' serem círculos secantes, devemos ter $R > \frac{a^2}{4r}$.



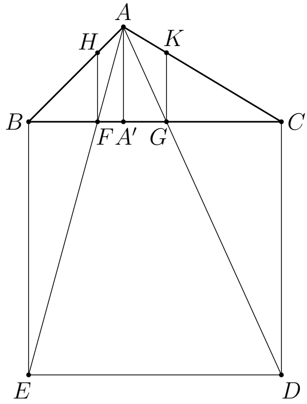
c) Pelos ítens anteriores, o lugar geométrico desejado é o dos pontos médios Q das cordas determinadas pelas secantes ao círculo C traçadas pelo ponto P.

Seja S o ponto médio de PO. Do triângulo retângulo ΔOQP, a mediana QS é tal que

$$QS = \frac{OP}{2} = \frac{\sqrt{AP^2 + AO^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}}{2}$$

que é constante. Logo, o lugar geométrico desejado é a parte da circunferência, com centro no ponto médio de PO e raio $\frac{\sqrt{\frac{a^2}{4}+r^2}}{2}$, interna ao círculo C.

5ª Questão [Valor: 1,0]:



a) Sejam A' o pé da altura do lado BC, $AB = c$, $BA' = m$ e $A'C = n$. Das semelhanças dos triângulos $\Delta AA'B$ e ΔHFB e dos triângulos ΔABE e ΔAHF, têm-se

$$\begin{cases} \frac{AA'}{HF} = \frac{AB}{HB} \\ \frac{HF}{BE} = \frac{AH}{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HB = \frac{AB.HF}{AA'} = \frac{c.HF}{h} \\ HF = \frac{BE.AH}{AB} = \frac{a.(c-HB)}{c} \end{cases}$$

e assim, juntando as duas relações,

$$HF = \frac{a.(c - \frac{c.HF}{h})}{c} \Rightarrow HF = \frac{ha}{h+a}$$

Além disto,

$$\frac{AA'}{BA'} = \frac{HF}{BF} \Rightarrow BF = \frac{HF.BA'}{AA'} = \frac{am}{h+a}$$

Analogamente, das semelhanças dos triângulos $\Delta AA'C$ e ΔKGC e dos triângulos ΔACD e ΔAKG,

$$KG = \frac{ha}{h+a}; \quad GC = \frac{an}{h+a}$$

de modo que

$$FG = a - (BF + GC) = a - \frac{a(n+m)}{h+a} = \frac{ha}{h+a}$$

Como HF e KG são paralelos e iguais, então HK e FG são também iguais e paralelos entre si.

Logo, o quadrilátero $FGKH$ tem os quatro lados e os quatro ângulos internos iguais, de modo que $FGKH$ é um quadrado.

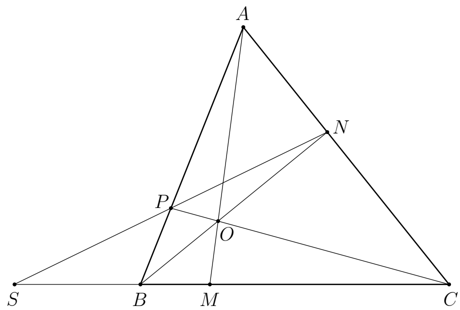
b) Pelo desenvolvimento acima, $x = \frac{ha}{h+a}$.

c) Por um desenvolvimento análogo, se h' é a altura relativa ao lado $AC = b$, então $y = \frac{h'b}{h'+b}$. Assim, se S é a área do triângulo ΔABC, a relação $x = y$ equivale a

$$\frac{2S}{\frac{2S}{a}+a} = \frac{2S}{\frac{2S}{b}+b} \Rightarrow (2S-ab)(a-b) = 0$$

de modo que o triângulo ΔABC é isósceles de base AB e/ou retângulo de hipotenusa AB.

6ª Questão [Valor: 1,0]:



Aplicando os Teoremas de Ceva e Manelaus, com a secante SPN, no triângulo ΔABC, têm-se

$$\begin{cases} \frac{MC.NA.PB}{MB.NC.PA} = 1 \\ \frac{NA.PB.SC}{NC.PA.SB} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{NA.PB}{NC.PA} = \frac{SB}{SC}$$

de modo que S e M dividem BC harmonicamente.

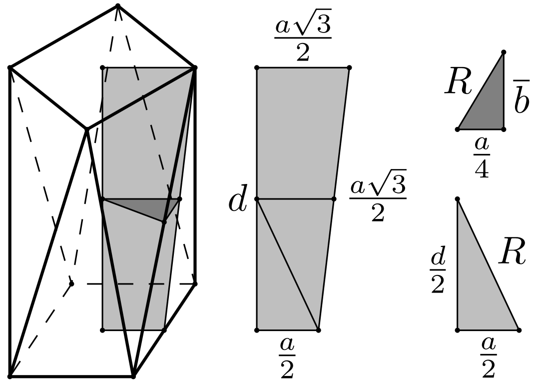
7ª Questão [Valor: 1,0]:

sln: Ver solução da 7ª questão da prova de Geometria de 1976/1977.

a) O novo poliedro tem 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais. Cada vértice forma um ângulo sólido (ou poliedro) de três faces, sendo uma pentagonal (com ângulo de 104^{o}) e duas hexagonais (com ângulo de 120^{o}).

b) O novo poliedro tem um total de 32 faces, 60 vértices e, pela relação de Euler, 90 arestas.

8ª Questão [Valor: 1,0]:



a) Fazendo um corte C_1 por um plano contendo OO', como mostrado acima, tem-se uma seção trapezoidal tal que

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + d^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow d = a\frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}$$

b) Da seção resultante de um corte C_2 por um plano paralelo a π e passando pelo ponto médio de OO', tem-se o triângul retângulo tal que

$$R^2 = \overline{b}^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

onde $\overline{b}$ é a base média da seção de C_1, isto é,

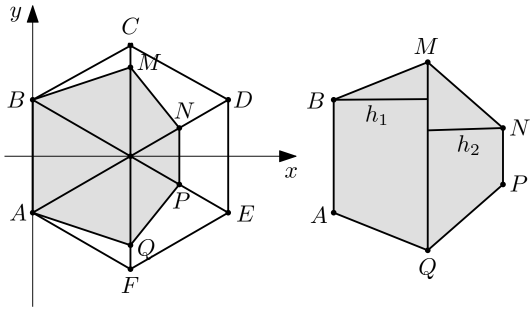
$$\overline{b} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2}}{2} = \frac{a(\sqrt{2}+1)}{4}$$

Para que a esfera de raio R passe pelos pontos médios das arestas das bases quadradas, do corte C_1, tem-se

$$R^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Assim, para que a esfera passe pelos pontos médios de todas as arestas,

$$\frac{a^2(\sqrt{2}+1)^2}{16} + \frac{a^2}{16} = \frac{d^2}{4} + \frac{a^2}{4} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}$$



9ª Questão [Valor: 1,0]:

Seja o posicionamento dos eixos coordenados indicado na figura acima, com a base pertencendo ao plano $z = 0$. Neste caso, os pontos de interesse são descritos por

$$\begin{cases} A \equiv (0, -\frac{a}{2}, 0) \\ B \equiv (0, \frac{a}{2}, 0) \\ C \equiv (\frac{a\sqrt{3}}{2}, a, 0) \\ D \equiv (a\sqrt{3}, \frac{a}{2}, 0) \\ S \equiv (\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3a}{2}) \end{cases}$$

a) O plano $AB\sigma$ é descrito por $x + \sigma z = 0$ e o plano $CDS : \alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ é tal que

$$\begin{cases} \alpha \frac{a\sqrt{3}}{2} + \beta a = 1 \\ \alpha a\sqrt{3} + \beta \frac{a}{2} = 1 \\ \alpha \frac{a\sqrt{3}}{2} + \gamma \frac{3a}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{9a} \\ \beta = \frac{2}{3a} \\ \gamma = \frac{4}{9a} \end{cases}$$

de modo que $CDS : 2\sqrt{3}x + 6y + 4z = 9a$.

A reta MN é interseção dos planos $AB\sigma$ e CDS:

$$\begin{cases} x + \sigma z = 0 \\ 2\sqrt{3}x + 6y + 4z = 9a \end{cases}$$

de modo que $x = 0$ equivale a $z = 0$ e $y = \frac{3a}{2}$, que independe de σ. Logo, a distância desejado do ponto fixo $P \equiv (0, \frac{3a}{2}, 0)$ ao centro $O \equiv (\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0)$ é

$$\overline{PO} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{9a^2}{4}} = a\sqrt{3}$$

b) Quando N é o ponto médio da aresta SD, suas coordenadas são $N \equiv (\frac{3a\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{4}, \frac{3a}{4})$. Da primeira equação que caracteriza a reta MN, tem-se então

$$\frac{3a\sqrt{3}}{4} + \sigma\frac{3a}{4} = 0 \Rightarrow \sigma = -\sqrt{3}$$

Como $M \equiv (\frac{a\sqrt{3}}{2}, Y_M, Z_M)$, da reta MN, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}Z_M = 0 \\ 3a + 6Y_M + 4Z_M = 9a \end{array} \right. \Rightarrow M \equiv (\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{2a}{3}, \frac{a}{2})$$

Assim, por Pitágoras, têm-se

$$\begin{aligned} SQ &= \sqrt{(Y_S - Y_Q)^2 + (Z_S - Z_Q)^2} \\ &= \sqrt{Y_M^2 + (Z_S - Z_M)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4a^2}{9} + a^2} \\ SE &= \sqrt{SO^2 + OE^2} \\ &= \sqrt{\frac{9a^2}{4} + a^2} \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{SQ}{SE} = \frac{\frac{a\sqrt{13}}{3}}{\frac{a\sqrt{13}}{2}} = \frac{2}{3}$$

A área S_6 desejada é a soma das áreas de dois trapézios de alturas

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{(X_M - X_B)^2 + (Z_M - Z_B)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a \\ h_2 &= \sqrt{(X_N - X_M)^2 + (Z_N - Z_M)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{16} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
S_6 &= \frac{\overline{AB}+\overline{MQ}}{2} \times h_1 + \frac{\overline{MQ}+\overline{NP}}{2} \times h_2 \\
&= \frac{a+\frac{4a}{3}}{2} \times a + \frac{\frac{4a}{3}+\frac{a}{2}}{2} \times \frac{a}{2} \\
&= \frac{7a^2}{6} + \frac{11a^2}{24} \\
&= \frac{39a^2}{24}
\end{aligned}
$$

10ª Questão [Valor: 1,0]:
sln: Creio que esta questão foi anulada, pois o conceito de *raio de hipérbole* não é muito corrente.

1.11 Vestibular 1972/1973

1.11.1 Prova de Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]: Diferenciando a equação da cônica, no ponto (x_0, y_0) tem-se

$$\begin{aligned} &10x_0\,\mathrm{d}x - 2y_0\,\mathrm{d}y + 6x_0\,\mathrm{d}y + 6y_0\,\mathrm{d}x + 4\,\mathrm{d}x + 8\,\mathrm{d}y = 0 \\ \Rightarrow\ &(10x_0 + 6y_0 + 4)\,\mathrm{d}x + (-2y_0 + 6x_0 + 8)\,\mathrm{d}y = 0 \end{aligned}$$

Anulando-se ambos os termos, determina-se o centro da cônica que é dado por

$$\begin{cases} 10x_0 + 6y_0 + 4 = 0 \\ -2y_0 + 6x_0 + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) = (-1, 1)$$

Fazendo a transformação de variáveis

$$x = uC_\theta - vS_\theta; \quad y = uS_\theta + vC_\theta$$

onde $C_\theta \equiv \cos\theta$ e $S_\theta \equiv \operatorname{sen}\theta$, tem-se

$$\begin{aligned} &5(uC_\theta - vS_\theta)^2 - (uS_\theta + vC_\theta)^2 \\ &+6(uC_\theta - vS_\theta)(uS_\theta + vC_\theta) \\ &+4(uC_\theta - vS_\theta) + 8(uS_\theta + vC_\theta) + 10 = 0 \\ \Rightarrow\ &u^2(5C_\theta^2 - S_\theta^2 + 6C_\theta S_\theta) + v^2(5S_\theta^2 - C_\theta^2 - 6C_\theta S_\theta) \\ &+uv(-12C_\theta S_\theta + 6C_\theta^2 - 6S_\theta^2) \\ &+u(4C_\theta + 8S_\theta) + v(8C_\theta - 4S_\theta) + 10 = 0 \end{aligned}$$

Anulando o coeficiente do termo uv, tem-se

$$-6S_{2\theta} + 6C_{2\theta} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8}$$

Assim, os eixos de simetria são as retas de coeficientes angulares $\operatorname{tg}\theta$ e $-\operatorname{cotg}\theta$ passando pelo centro da cônica, isto é

$$\begin{aligned} y &= (\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} \\ y &= -(\sqrt{2} + 1)x - \sqrt{2} \end{aligned}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]: Resolvendo o sistema, tem-se

$$\begin{cases} x_5 = mx_6 \\ x_4 = mx_5 = m^2x_6 \\ x_3 = mx_4 = m^3x_6 \\ x_2 = mx_3 = m^4x_6 \\ x_1 = mx_2 = m^5x_6 \end{cases}$$

o que nos leva a

$$
\begin{aligned}
& (4m^5 - 4m^4 - 17m^3 + 17m^2 + 4m - 4)x_6 = 0 \\
\Rightarrow \quad & (4m^4 - 17m^2 + 4)(m-1)x_6 = 0
\end{aligned}
$$

Para o fator biquadrado, as raízes são dadas por

$$
m^2 = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} = 4 \text{ ou } \frac{1}{4}
$$

Com isto, a primeira equação do sistema pode ser escrita como $(m^2 - 4)(4m^2 - 1)(m-1)x_6 = 0$, e os valores de m que permitem uma solução não trivial são $m \in \{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\}$.

3ª Questão [Valor: 1,0]: Seja N o número total de números obtidos pela permutação sem repetição dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Para cada número $n_1 = abcde$ tem-se o seu complemento da forma $n_2 = (6-a)(6-b)(6-c)(6-d)(6-e)$ tal que $(n_1 + n_2) = 66666$. Logo, a soma total S dos N números é

$$
S = 66666 \times \frac{N}{2} = 66666 \times \frac{5!}{2} = 3.999.960
$$

4ª Questão [Valor: 1,0]: Integrando $P''(x)$ duas vezes, têm-se

$$
\begin{aligned}
P'(x) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c_1 \\
P(x) &= \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2
\end{aligned}
$$

Dividindo-se $P(x)$ por $P''(x)$, podemos escrever que $P(x) = Q(x)P''(x) + R(x)$, com

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{3} \\
R(x) &= (c_1 - \frac{5}{12})x + (c_2 - \frac{1}{3})
\end{aligned}
$$

Como $P(x)$ é divisível por $P''(x)$, então $R(x) \equiv 0$ e assim

$$
P(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}
$$

5ª Questão [Valor: 1,0]: Seja a derivada da cônica no ponto (x_0, y_0)

$$
2x_0 \, \mathrm{d}x - 2y_0 \, \mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x_0}{y_0}
$$

de modo que a tangente T por este ponto é descrita por

$$
y = \frac{x_0}{y_0}x - \frac{1}{y_0}
$$

Logo, a normal N, passando pela origem, é dada por

$$y = -\frac{y_0}{x_0}x$$

Determinando a interseção (x_1, y_1) de T e N, têm-se

$$\frac{x_0}{y_0}x_1 - \frac{1}{y_0} = -\frac{y_0}{x_0}x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

Substituindo este valor na equação de N, tem-se

$$y_1 = -\frac{y_0}{x_0}\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} = -\frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

de modo que o lugar geométrico desejado é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, de centro na origem e raio 1.

6ª Questão [Valor: 1,0]: Considere inicialmente o caso $a = 1$. Desenvolvendo ambos os lados da igualdade $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, têm-se

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x)^n &= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right)\\ &= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{l}\binom{n}{k-l}x^k\\ (1+x)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k\end{aligned}$$

Igualando-se os coeficientes de x^n dos dois desenvolvimentos, tem-se

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\binom{n}{n-l} = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}^2 = \binom{2n}{n}$$

Para o caso geral, a soma dos quadrados dos coeficientes de $(x+a)^n$ é dada pelo coeficiente de x^n do desenvolvimento de $(x+a)^n(1+ax)^n$, que não possui uma expressão fechada simples.

7ª Questão [Valor: 1,0]: Tomando o logaritmo natural do limite desejado L,

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{7x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{7x}\right)}{1/x}$$

e, por L'Hôpital,

$$\ln L = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{7x}\right)}\frac{1}{7}\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{7x}\right)}\frac{1}{7} = \frac{1}{7}$$

de modo que $L=\sqrt[7]{e}$.

8ª Questão [Valor: 1,0]: Subtraindo a primeira linha da matriz das demais linhas, tem-se que o determinante D desejado é igual a

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{vmatrix} = M.N.P.R$$

Das definições

$$M=a;\;\; N=a;\;\; P=\frac{1}{a^2};\;\; R=4a^2$$

e assim $D=4a^2$.

9ª Questão [Valor: 1,0]: Das condições do enunciado, a curva passa pelos pontos $(0,4)$ e $(2,0)$, tem derivada nula em $x=2$ (ou seja, tem uma raiz dupla neste ponto) e segunda derivada nula em $x=0$. Logo,

$$\begin{cases} d=4 \\ 8a+4b+2c+d=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ 2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=4 \end{cases}$$

Dividindo $y=(\frac{1}{4}x^3-3x+4)$ por $(x-2)^2$, tem-se o quociente $(\frac{1}{4}x+1)$. Logo, a curva pode ser escrita como

$$y=\frac{1}{4}(x+4)(x-2)(x-2)$$

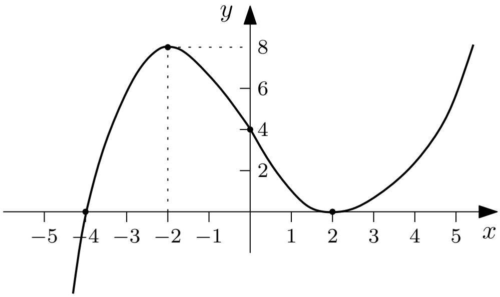
com derivadas de primeira e segunda ordens dadas por

$$y'=\frac{3}{4}x^2-3;\;\; y''=\frac{3}{2}x$$

Alguns pontos importantes são: raízes em $(2,0)$ (dupla) e $(-4,0)$; extremos em $(2,0)$ (mínimo local) e $(-2,8)$ (máximo local); ponto de inflexão em $(0,4)$. Considerando ainda os limites

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$$

tem-se o esboço da curva mostrado a seguir.



10ª Questão [Valor: 1,0]: Decompondo S da forma

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{n=30} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \sum_{n=0}^{n=30} \left(\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{n=30} \frac{(a+b)n + (2a+b)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

devemos ter

$$
\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}
$$

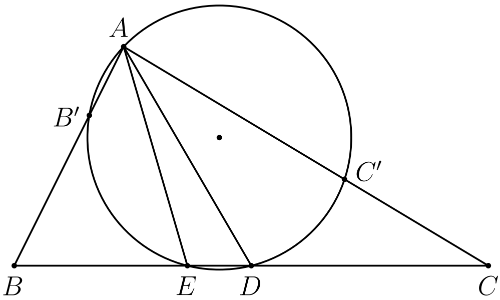
e assim, fazendo $n' = (n+1)$, têm-se

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{n=30} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=0}^{n=30} \frac{1}{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{n=30} \frac{1}{n+1} - \sum_{n'=1}^{n'=31} \frac{1}{n'+1} \\
&= \left. \frac{1}{n+1} \right|_{n=0} - \left. \frac{1}{n'+1} \right|_{n'=31} \\
&= \frac{31}{32}
\end{aligned}
$$

1.12 Vestibular 1972/1973

1.12.1 Prova de Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]:



Pelo Teorema das Bissetrizes, $\frac{\overline{BE}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}}$, e como $\overline{BC} = (\overline{BE} + \overline{CE})$, têm-se

$$\overline{BE} = \frac{\overline{BA}.\overline{BC}}{\overline{BA} + \overline{CA}}; \quad \overline{CE} = \frac{\overline{CA}.\overline{BC}}{\overline{BA} + \overline{CA}}$$

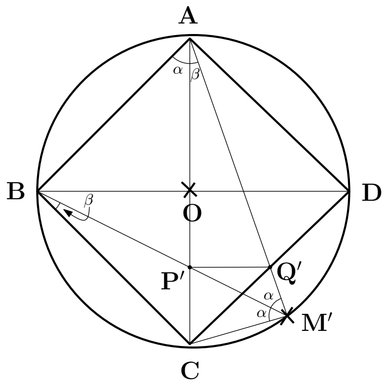
Pelo conceito de potência,

$$\begin{cases} \overline{BE}.\overline{BD} = \overline{BB'}.\overline{BA} \\ \overline{CD}.\overline{CE} = \overline{CC'}.\overline{CA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\overline{BA}.\overline{BC}}{\overline{BA}+\overline{CA}}.\frac{\overline{BC}}{2} = \overline{BB'}.\overline{BA} \\ \frac{\overline{BC}}{2}.\frac{\overline{CA}.\overline{BC}}{\overline{BA}+\overline{CA}} = \overline{CC'}.\overline{CA} \end{cases}$$

e assim

$$\overline{BB'} = \overline{CC'} = \frac{\overline{BC}^2}{2(\overline{BA} + \overline{CA})}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]:



Considere a notação da figura acima, onde $\alpha = 45^{\text{o}}$.

a) Da igualdade dos triângulos $\Delta M'BC$ e $\Delta M'AP'$, tem-se $\overline{M'C} = \overline{M'P'}$, de modo que o triângulo $\Delta M'P'C$ é isósceles com ângulos iguais a

$$P'\hat{M}'C = \alpha = 45^{\text{o}}$$
$$M'\hat{P}'C = M'\hat{C}P' = \frac{180^{\text{o}} - \alpha}{2} = 67^{\text{o}}30'$$

e do triângulo $\Delta M'AC$ tem-se $\beta = 22^{\text{o}}30'$.

b) Ainda da igualdade dos triângulos $\Delta M'BC$ e $\Delta M'AP'$, tem-se $\overline{AP'} = \overline{BC} = R\sqrt{2}$, e assim

$$\overline{P'C} = \overline{AC} - \overline{AP'} = R(2 - \sqrt{2})$$

Além disto, pela Lei dos Senos estendida no triângulo $\Delta M'BC$,

$$\overline{M'P'} = \overline{M'C} = 2R \operatorname{sen} \beta = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

e pelo Teorema de Pitágoras no triângulo $\Delta M'AC$,

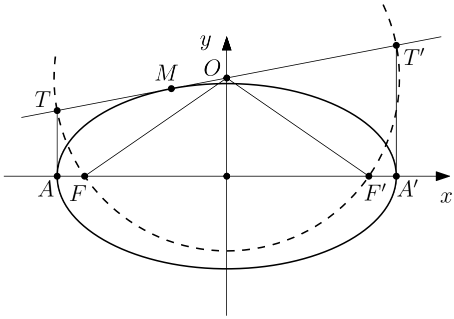
$$\overline{M'B} = \overline{M'A} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{M'C}^2} = R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

de modo que

$$\overline{P'B} = R(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}) = R\sqrt{2(2-\sqrt{2})}$$

c) Como $\overline{AP'} = \overline{BC} = \overline{AD}$ e $\beta = 22^{\text{o}}30'$, os triângulos $\Delta AP'Q'$ e $\Delta ADQ'$ caem no caso LAL de equivalência, e assim $A\hat{P}'Q' = A\hat{D}Q' = 90^{\text{o}}$.

3ª Questão [Valor: 1,0]:



Seja a elipse descrita na forma canônica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de modo que, no ponto $M \equiv (x_0, y_0)$, tem-se

$$\frac{2x_0\,\mathrm{d}x}{a^2} + \frac{2y_0\,\mathrm{d}y}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

Logo, a equação da reta tangente por M é

$$y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x + \frac{b^2}{y_0}$$

e os pontos T e T' são descritos por

$$T \equiv (-a, -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(-a) + \frac{b^2}{y_0}) = (-a, \frac{b^2(a+x_0)}{ay_0})$$

$$T' \equiv (a, -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(a) + \frac{b^2}{y_0}) = (a, \frac{b^2(a-x_0)}{ay_0})$$

Com isto

$$\begin{aligned}\overline{AT} \times \overline{A'T'} &= \frac{b^2(a+x_0)}{ay_0} \times \frac{b^2(a-x_0)}{ay_0} \\ &= \frac{b^4}{(a^2b^2 - b^2x_0^2)}(a^2 - x_0^2)\end{aligned}$$

e assim $\overline{AT} \times \overline{A'T'} = b^2$ que é constante.

O ponto O médio de $\overline{TT'}$ é descrito por

$$O \equiv \frac{T + T'}{2} = (0, \frac{b^2}{y_0})$$

de modo que

$$\overline{OT}^2 = \overline{OT'}^2 = a^2 + \left(\frac{b^2(a-x_0)}{ay_0} - \frac{b^2}{y_0}\right)^2$$

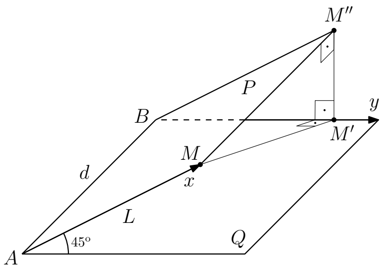
Já para os focos $F \equiv (-c, 0)$ e $F' \equiv (c, 0)$, tem-se

$$\overline{OF}^2 = \overline{OF'}^2 = c^2 + \frac{b^4}{y_0^2} = a^2 + \frac{b^2(b^2 - y_0^2)}{y_0^2}$$

e assim

$$\overline{OT} = \overline{OT'} = \overline{OF} = \overline{OF'} = a^2 + \frac{b^4 x_0^2}{a^2 y_0^2}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]:

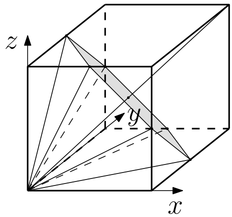


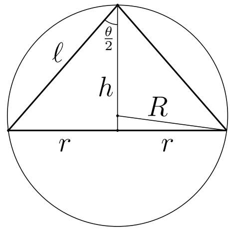
Da figura acima,

$$\overline{BM'} = \overline{BM''} \cos 45^\circ = L \cos 45^\circ = \frac{L\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{MM'} = \sqrt{\overline{MM''}^2 + \overline{M'M''}^2} = \sqrt{d^2 + \frac{L^2}{2}}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]:





Situando o cubo nos eixos cartesianos, como indicado na figura acima, tem-se uma diagonal da origem ao ponto (a, a, a). O plano perpendicular a esta diagonal e que passa pelo centro $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ do cubo é descrito por $x+y+z = \frac{3a}{2}$, interceptando as arestas nos pontos

$$(0, a, \frac{a}{2});\ (0, \frac{a}{2}, a);\ (a, 0, \frac{a}{2});\ (\frac{a}{2}, 0, a);\ (a, \frac{a}{2}, 0);\ (\frac{a}{2}, a, 0)$$

Assim, a seção obtida é um hexágono regular de lado $r = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ e a pirâmide resultante tem altura $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pelo Teorema de Pitágoras na figura da direita,

$$\ell^2 = h^2 + r^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} \Rightarrow \ell = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

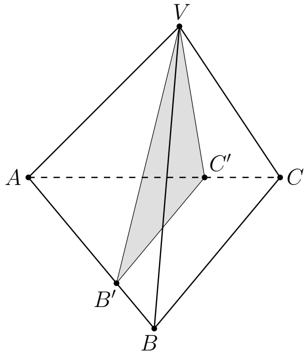
Pela Lei dos Cossenos,

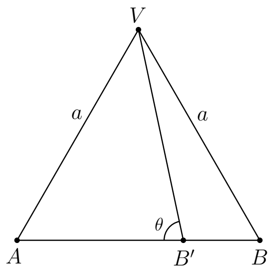
$$(2r)^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2\ell^2 \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{5};\ \operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

e pela Lei dos Senos,

$$2R = \frac{2r}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow R = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]:





O resultado da seção é duas pirâmides de mesma altura. Como elas têm o mesmo volume, suas bases devem ter as mesmas áreas. Assim, a área do triângulo $\Delta AB'C'$ é a metade da área do triângulo ΔABC, de modo que

$$\frac{\frac{\overline{AB'}\,\overline{AC'}}{2}\,\text{sen}\, B'\hat{A}C'}{\frac{\overline{AB}\,\overline{AC}}{2}\,\text{sen}\, B\hat{A}C} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{AB'} = \overline{AC'} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e ainda

$$\overline{B'C'} = \overline{BC}\frac{\sqrt{2}}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos duas vezes no triângulo ΔVAB, onde $A\hat{B}'V = \theta$, com a ceviana $\overline{VB'} = m$, têm-se

$$\begin{cases} \overline{VA}^2 = \overline{VB'}^2 + \overline{AB'}^2 - 2\overline{VB'}\,\overline{AB'}\cos\theta \\ \overline{VB}^2 = \overline{VB'}^2 + \overline{BB'}^2 + 2\overline{VB'}\,\overline{BB'}\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = m^2 + a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2ma\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta \\ a^2 = m^2 + a^2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2ma\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\cos\theta \end{cases}$$

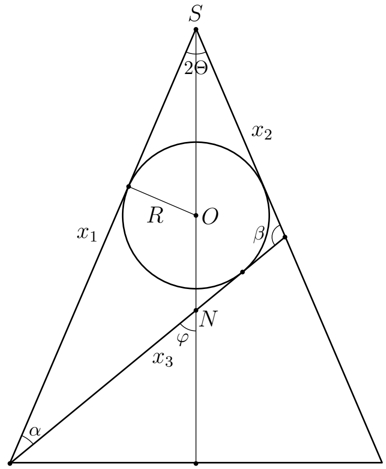
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = m^2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) - 2ma\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta \\ \frac{a^2(2\sqrt{2}-1)}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = m^2\frac{\sqrt{2}}{2} + 2ma\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2(3-\sqrt{2})}{2} = m^2.$$

Logo, o perímetro da seção $\Delta VB'C'$ é dado por

$$2p = 2m + \overline{B'C'} = a\sqrt{6-2\sqrt{2}} + a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7ª Questão [Valor: 1,0]:



Usando a notação da figura acima, pela Lei dos Senos tem-se que

$$\frac{x_1}{\operatorname{sen}(\varphi+\Theta)} = \frac{x_2}{\operatorname{sen}(\varphi-\Theta)} = \frac{x_3}{\operatorname{sen}2\Theta}$$

Se S_Δ é a área e p_Δ o semi-perímetro de um triângulo, pela relação $S_\Delta = p_\Delta R$ no triângulo de lados x_1, x_2 e x_3 indicado na figura, tem-se

$$\frac{x_1 x_2}{2}\operatorname{sen}2\Theta = \frac{(x_1+x_2+x_3)}{2}R$$

e assim

$$\begin{aligned}
&\frac{x_3\operatorname{sen}(\varphi+\Theta)}{\operatorname{sen}2\Theta}.\frac{x_3\operatorname{sen}(\varphi-\Theta)}{\operatorname{sen}2\Theta}.\frac{\operatorname{sen}2\Theta}{2}\\
&\quad=\left(\frac{x_3\operatorname{sen}(\varphi+\Theta)}{\operatorname{sen}2\Theta}+\frac{x_3\operatorname{sen}(\varphi-\Theta)}{\operatorname{sen}2\Theta}+x_3\right)\frac{R}{2}\\
\Rightarrow\ & x_3\operatorname{sen}(\varphi+\Theta)\operatorname{sen}(\varphi-\Theta)\\
&\quad=(\operatorname{sen}(\varphi+\Theta)+\operatorname{sen}(\varphi-\Theta)+\operatorname{sen}2\Theta)R\\
\Rightarrow\ & \frac{x_3}{2}(\cos 2\Theta-\cos 2\varphi) = (2\operatorname{sen}\varphi\cos\Theta+2\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta)R\\
\Rightarrow\ & x_3(\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2\Theta) = 2\cos\Theta(\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\Theta)R
\end{aligned}$$

de modo que, como $x_3 = 2a$,

$$2a = \frac{2R\cos\Theta}{\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}\Theta}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]: Desenvolvendo a equação do enunciado,

$$\frac{3}{\cos x} + n(\cos x - \operatorname{sen} x) - 3(\operatorname{sen} x + \cos x) = 0$$
$$\Rightarrow 3+n\cos x(\cos x - \operatorname{sen} x) - 3\cos x \operatorname{sen} x - 3\cos^2 x = 0$$
$$\Rightarrow n\cos x(\cos x - \operatorname{sen} x) - 3\cos x \operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen}^2 x = 0$$
$$\Rightarrow n\cos x(\cos x - \operatorname{sen} x) - 3\operatorname{sen} x(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0$$
$$\Rightarrow (n\cos x - 3\operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x_1 = 1 \\ \text{ou} \\ \operatorname{tg} x_2 = \frac{n}{3} \end{cases}$$

Logo, a primeira raiz é $x_1 = 45^{\mathrm{o}}$ e a segunda raiz é $x_2 = (180^{\mathrm{o}} - 105^{\mathrm{o}} - 45^{\mathrm{o}}) = 30^{\mathrm{o}}$, de modo que

$$\operatorname{tg} 30^{\mathrm{o}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{n}{3} \Rightarrow n = \sqrt{3}$$

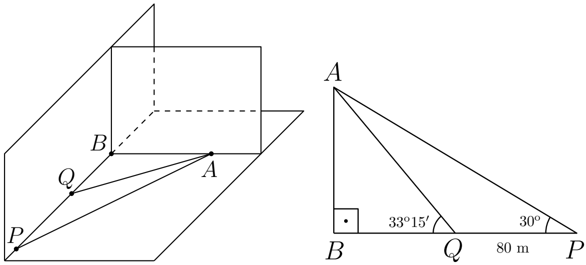
9ª Questão [Valor: 1,0]: Isolando $\operatorname{cotg}^2 y$ em ambas as equações, tem-se

$$\operatorname{cotg}^2 y = \frac{1}{5 - \sec^2 x} = \frac{7}{3} - \operatorname{cosec}^2 x$$
$$\Rightarrow \frac{\cos^2 x}{5\cos^2 x - 1} = \frac{7\operatorname{sen}^2 x - 3}{3\operatorname{sen}^2 x}$$
$$\Rightarrow 3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = 35\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x - 7\operatorname{sen}^2 x - 15\cos^2 x + 3$$
$$\Rightarrow 32\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x - 7(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) - 8\cos^2 x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow 32\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x - 8\cos^2 x - 4 = 0$$
$$\Rightarrow 8\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x - 2\cos^2 x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 2x - \cos 2x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \ -2\cos^2 2x - \cos 2x = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \text{ou} \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \cos^2 x = \frac{1}{4}; \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 y = 3 \\ \text{ou} \\ \operatorname{tg}^2 y = 1 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \text{ e } y = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ e } y = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]:



Das figuras acima,

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 33^{\text{o}}15' = \frac{\overline{AB}}{\overline{BQ}} \\ \operatorname{tg} 30^{\text{o}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BQ}+80} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\operatorname{tg} 33^{\text{o}}15'} = \frac{\overline{AB} - 80 \operatorname{tg} 30^{\text{o}}}{\operatorname{tg} 30^{\text{o}}}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{80 \operatorname{tg} 33^{\text{o}}15' \operatorname{tg} 30^{\text{o}}}{\operatorname{tg} 33^{\text{o}}15' - \operatorname{tg} 30^{\text{o}}} = \frac{80.0{,}66\sqrt{3}}{3.0{,}66 - \sqrt{3}}$$

e assim $\overline{AB} = 369$ m.