O Desenho Geométrico no Vestibular do ITA

Parte I

Prólogo

Este material é complementar ao livro “A Matemática no Vestibular do ITA”, de minha autoria, editado em 2013 pela VestSeller. Optei por não incluir as provas de Desenho no referido livro pelas seguintes razões:

- Como o vestibular atual do ITA não mais inclui a prova de Desenho, o interesse no assunto é bastante limitado.
- Ao não incluir este material, reduzimos significativamente o número de páginas no livro original, minimizando seus custos de impressão, diagramação e até mesmo de envio.
- As questões de desenho e suas respectivas soluções requerem uma diagramação bem distinta, com margens significativamente maiores, o que nos forçaria a perder a compatibilidade com o formato utilizado no livro “A Matemática no Vestibular do IME”, editado em 2011 também pela VestSeller.
- O formato eletrônico permite o uso de cores, facilitando uma melhor visualização das construções-solução aqui incluídas. O uso de cores no formato impresso aumentaria muito os custos de produção do livro, dificultando ainda mais a sua comercialização.

Na organização do presente material, contei com a ajuda inestimável dos meus colaboradores Alessandro. J. S. Dutra, Albert do Nascimento Colins, do acervo das provas do Curso Etapa (disponibilizadas no site do rumoaoita), além de um pequeno acervo pessoal meu.

Talvez este material resulte no menor retorno de todos os que já produzi, mas certamente foi um dos mais trabalhosos e prazeirosos também de se fazer.

Rio de Janeiro, 1 de outubro de 2013.
Sergio Lima Netto (sergioln@smt.ufrj.br)

Índice

I Prólogo **iii**

II Enunciados **1**

II.1 Vestibular de 1993 . . . 3
II.2 Vestibular de 1990 . . . 7
II.3 Vestibular de 1989 . . . 11
II.4 Vestibular de 1988 . . . 17
II.5 Vestibular de 1987 . . . 21
II.6 Vestibular de 1986 . . . 25
II.7 Vestibular de 1985 . . . 28
II.8 Vestibular de 1984 . . . 31
II.9 Vestibular de 1983 . . . 33
II.10 Vestibular de 1982 . . . 35
II.11 Vestibular de 1981 . . . 37
II.12 Vestibular de 1980 . . . 41
II.13 Vestibular de 1979 . . . 42
II.14 Vestibular de 1976 . . . 45
II.15 Vestibular de 1975 . . . 61
II.16 Vestibular de 1974 . . . 72
II.17 Vestibular de 1973 . . . 87
II.18 Vestibular de 1972 . . . 103
II.19 Vestibular de 1971 . . . 114
II.20 Vestibular de 1970 . . . 129
II.21 Vestibular de 1969 . . . 144
II.22 Vestibular de 1968 . . . 157
II.23 Vestibular de 1967 . . . 170
II.24 Vestibular de 1966 . . . 181
II.25 Vestibular de 1965 . . . 187
II.26 Vestibular de 1964 . . . 192

III Soluções Propostas **197**

III.1 Soluções de 1993 . . . 199
III.2 Soluções de 1990 . . . 205
III.3 Soluções de 1989 . . . 216
III.4 Soluções de 1988 . . . 226
III.5 Soluções de 1987 . . . 234
III.6 Soluções de 1986 . . . 241
III.7 Soluções de 1985 . . . 246
III.8 Soluções de 1984 . . . 251
III.9 Soluções de 1983 . . . 255
III.10 Soluções de 1982 . . . 261
III.11 Soluções de 1981 . . . 266
III.12 Soluções de 1980 . . . 271

III.13 Soluções de 1979 276

Parte II

Enunciados

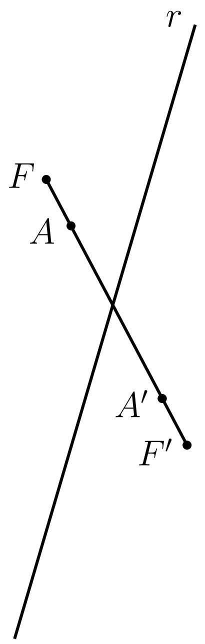
Ano	Prova
1993	X
1992	-
1991	-
1990	X
1989	X
1988	X
1987	X
1986	X
1985	X
1984	X
1983	X
1982	X
1981	X
1980	X
1979	X
1978	-
1977	-
1976	X
1975	X
1974	X
1973	X
1972	X
1971	X
1970	X
1969	X
1968	X
1967	X
1966	X
1965	X
1964	X

II.1 Vestibular de 1993

ITA 1993, Questão 21: Determinar, sem traçar a curva, os pontos P e Q, comuns a uma reta dada r e a uma hipérbole dada por seus focos F e F' e o eixo transverso $\overline{AA'}$. Sobre $\overline{PQ}$, encontre um ponto M de tal forma que $\overline{PM}^2 = \overline{PQ}.\overline{MQ}$. Pergunta: Quanto mede aproximadamente o segmento $\overline{MQ}$?

(A) 16 mm (B) 33 mm (C) 41 mm (D) 25 mm (E) 9 mm

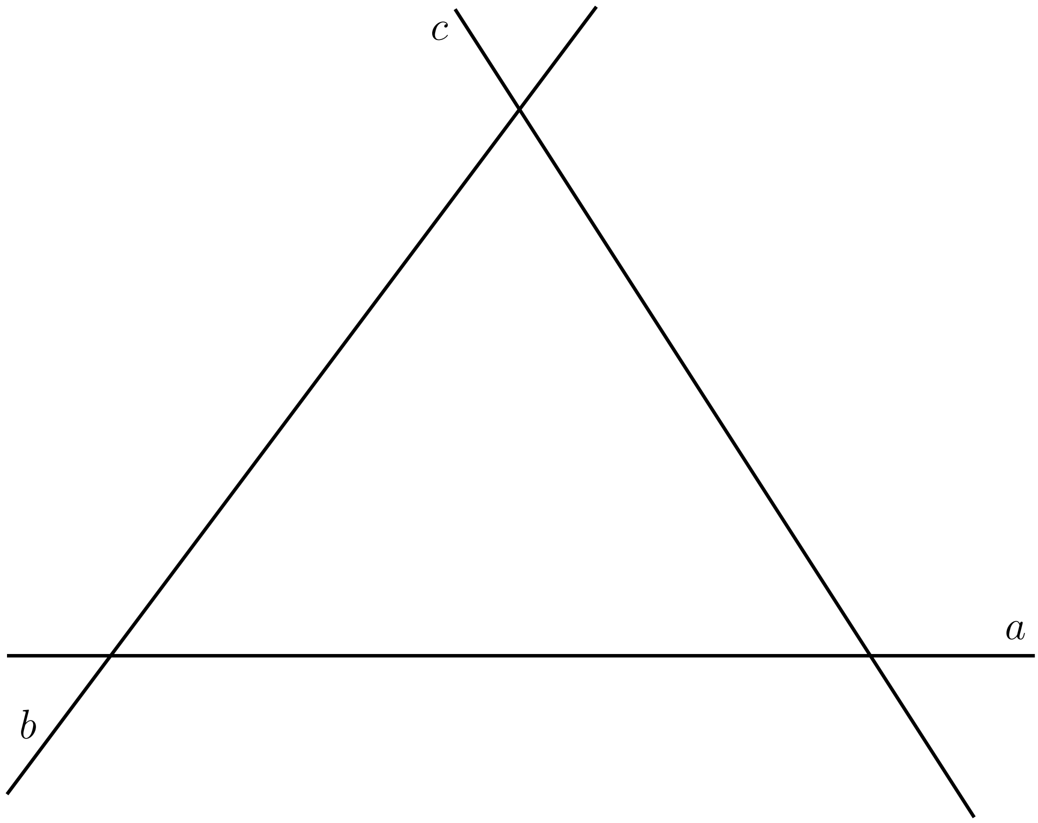
Obs: O ponto P está situado à direita de $\overline{FF'}$.



ITA 1993, Questão 21.

ITA 1993, Questão 22: Dadas as retas a, b e c, traçar uma circunferência que seja interceptada por estas retas, segundo arcos de amplitudes respectivamente iguais a 90^o, 135^o e 75^o. Pergunta: Qual a diferença entre a soma das cordas definidas pelas retas nos arcos de amplitudes 90^o e 75^o e a corda correspondente ao arco de 135^o.

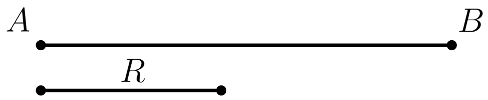
(A) 33 mm (B) 25 mm (C) 40 mm (D) 47 mm (E) 18 mm



ITA 1993, Questão 22.

ITA 1993, Questão 23: O segmento AB corresponde à soma de um lado de um quadrado com um lado de outro. A soma das áreas dos quadrados é equivalente à área de um círculo de raio R dado. Pergunta: Quanto medem aproximadamente os lados dos quadrados?

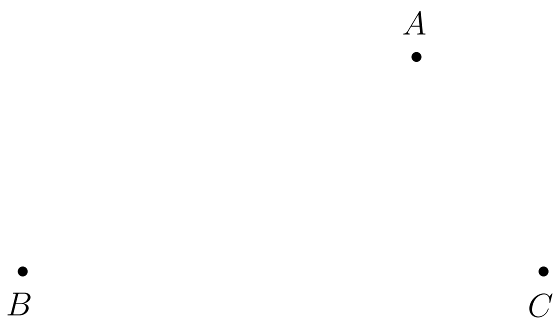
(A) 32 e 23 mm (B) 25 e 30 mm (C) 18 e 37 mm
(D) 40 e 15 mm (E) 46 e 9 mm



ITA 1993, Questão 23.

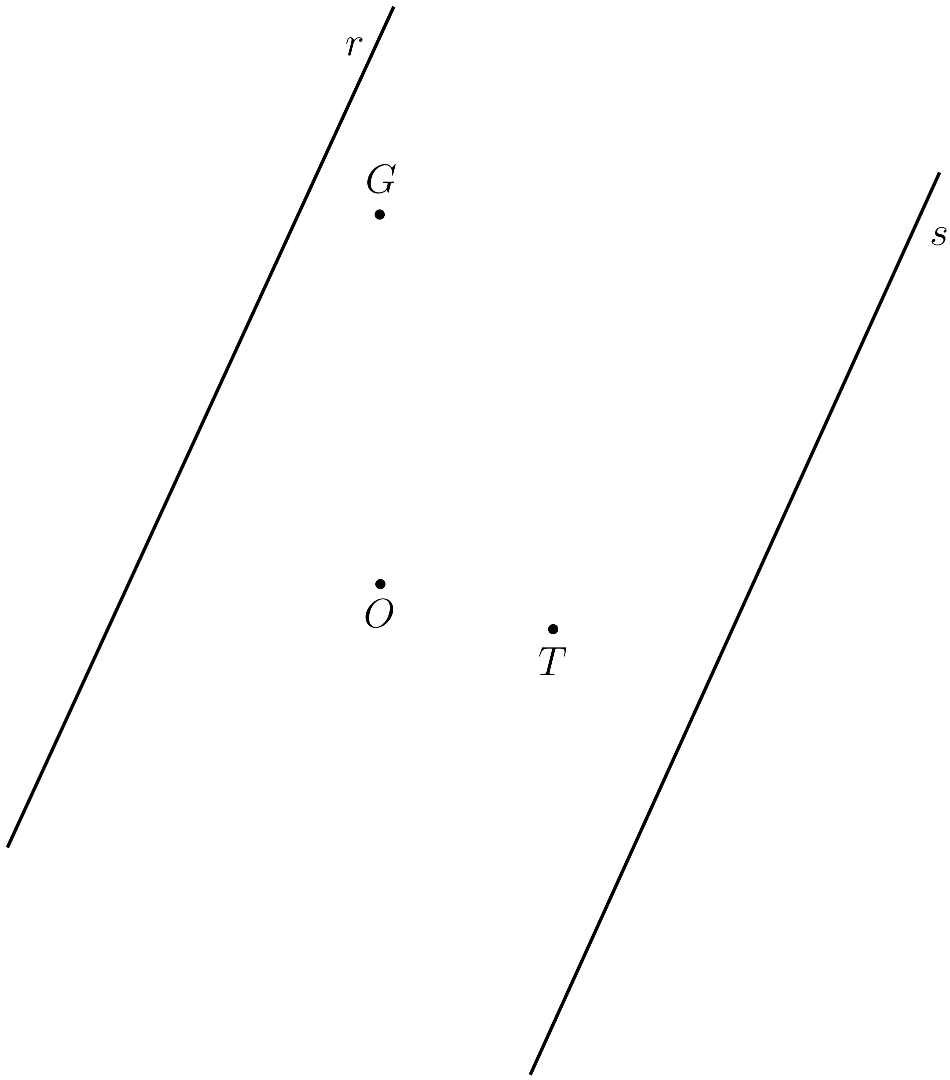
ITA 1993, Questão 24: Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo ABC. Determinar dois segmentos de tal forma que o produto destes segmentos seja igual ao produto dos lados b e c. Um dos segmentos é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo no vértice A. Pergunta: Quanto mede a soma dos segmentos pedidos, considerando os dados na escala $1:50$?

(A) $5{,}80$ m (B) $5{,}35$ m (C) $4{,}55$ m (D) $3{,}90$ m (E) $6{,}40$ m



ITA 1993, Questão 24.

ITA 1993, Questão 25: De um tricúspide são dados: o centro O da circunferência diretora, o ponto gerador G e um ponto T da curva. Pede-se traçar por T uma reta tangente à curva. Pergunta: Quanto mede a menor distância entre dois pontos P e P', equidistantes das retas dadas r e s e que vêem a porção da tangente em T, compreendida entre r e s, sob ângulos de 75^o?
(A) 132 mm (B) 119 mm (C) 88 mm (D) 91 mm (E) 105 mm



ITA 1993, Questão 25.

II.2 Vestibular de 1990

Questão 01: De uma elipse conhecemos o eixo maior $\overline{AB}$ e um ponto P pertencente à curva. Pergunta: Quanto mede a distância focal desta elipse?

(A) 62 mm. (B) 57 mm. (C) 51 mm. (D) 69 mm. (E) 77 mm.

ITA 1990, Questão 01.

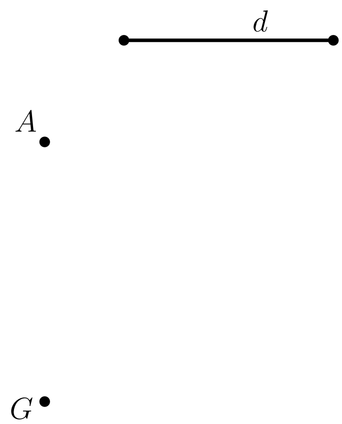
Questão 02: O ponto M dado corresponde ao ponto médio de um segmento de reta $\overline{AB}$. Sendo dados os pontos P e Q, os quais são respectivamente os conjugados harmônicos interno e externo de $\overline{AB}$, pede-se determinar este segmento. Pergunta: Quanto mede o segmento $\overline{AB}$, considerando-se os dados na escala 1:25?

(A) 1,40 m. (B) 1,60 m. (C) 1,76 m. (D) 1,90 m. (E) 2,10 m.

ITA 1990, Questão 02.

Questão 03: Construir o triângulo ABC do qual conhecemos o vértice A, o baricentro G e sabendo-se que o segmento dado d corresponde à distância entre o baricentro e o circuncentro deste triângulo. Pergunta: Quanto mede aproximadamente o maior lado do triângulo ABC?

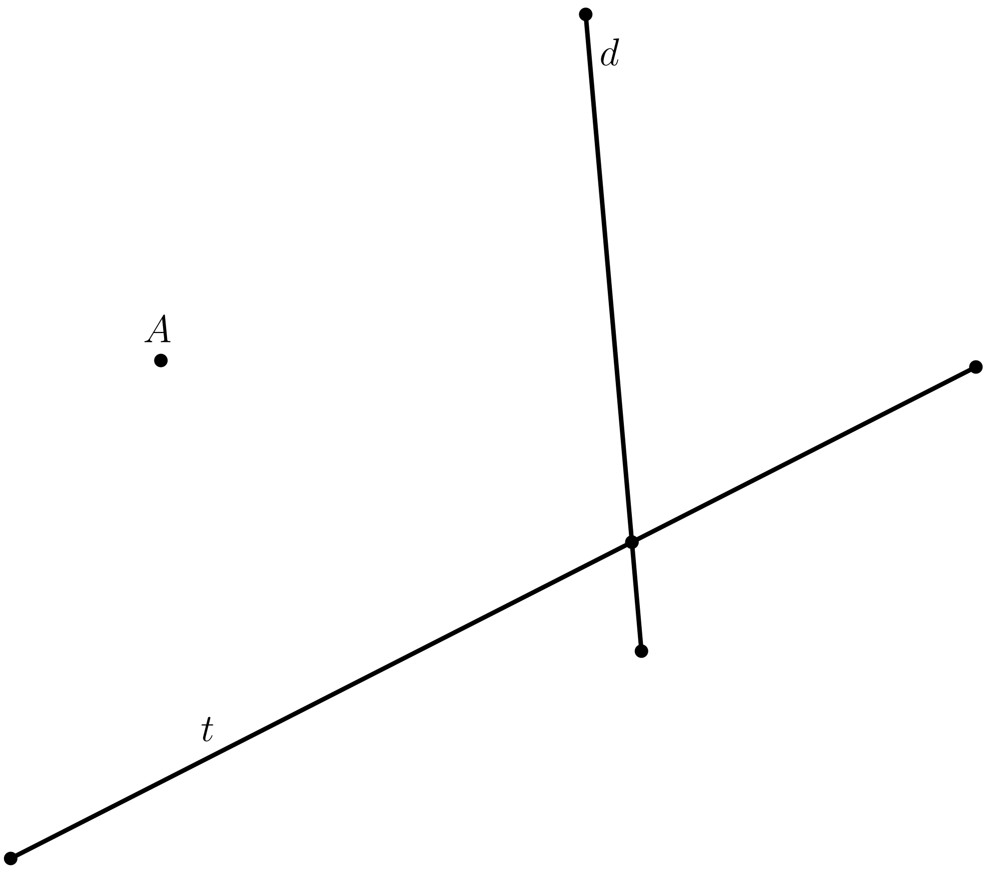
(A) 90 mm. (B) 98 mm. (C) 82 mm. (D) 74 mm. (E) 106 mm.



ITA 1990, Questão 03.

Questão 04: São dadas as retas t, d e o ponto A. Traçar uma circunferência tangente à reta t, de tal forma que a reta d seja a polar do ponto A em relação a esta circunferência. Pergunta: Qual é a distância entre o ponto A e o ponto de tangência da circunferência na reta t?

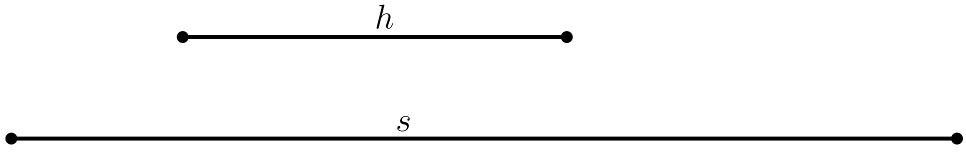
(A) 74 mm. (B) 81 mm. (C) 88 mm. (D) 95 mm. (E) 102 mm.



ITA 1990, Questão 04.

Questão 05: De uma hélice cilíndrica são conhecidos o passo h e o comprimento s de uma espira. Pergunta: Quanto mede o diâmetro da circunferência da base dessa hélice?

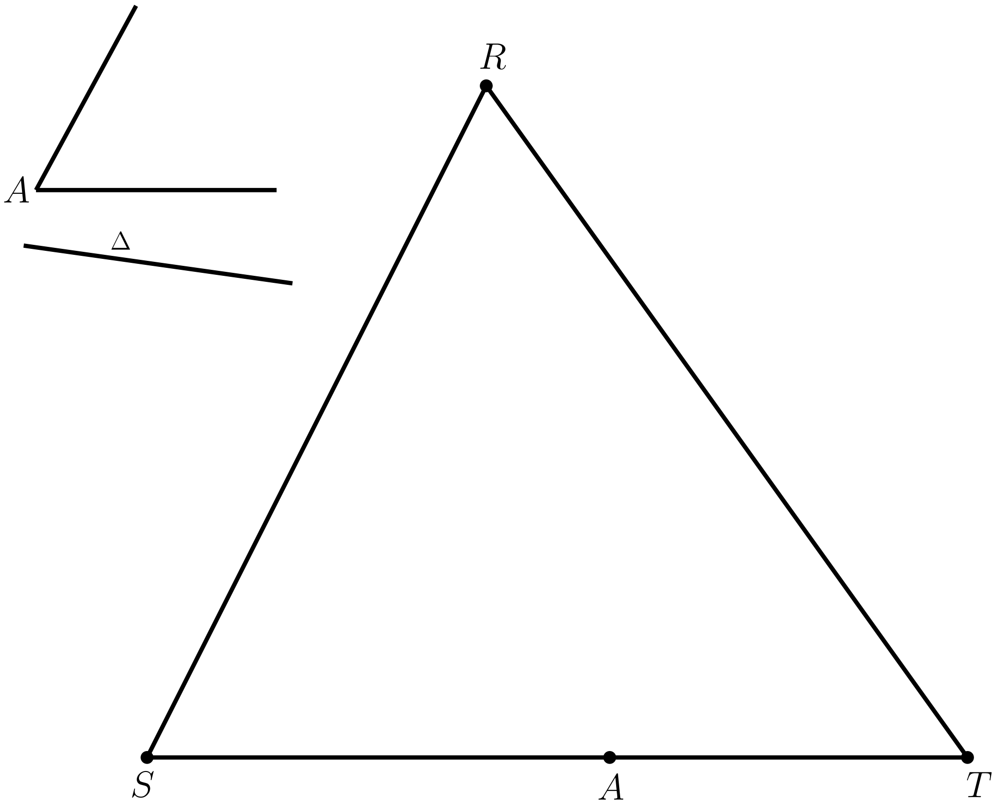
(A) 34 mm. (B) 41 mm. (C) 28 mm. (D) 47 mm. (E) 22 mm.



ITA 1990, Questão 05.

Questão 06: Inscrever em um triângulo dado RST um outro triângulo do qual se conhecem o vértice A, pertencente ao lado $\overline{ST}$, o ângulo $\hat{A}$ e a direção Δ do lado oposto $\overline{BC}$. Pergunta: Quanto mede aproximadamente o perímetro do triângulo inscrito ABC?

(A) 139 mm. (B) 184 mm. (C) 174 mm. (D) 162 mm. (E) 149 mm.



ITA 1990, Questão 06.

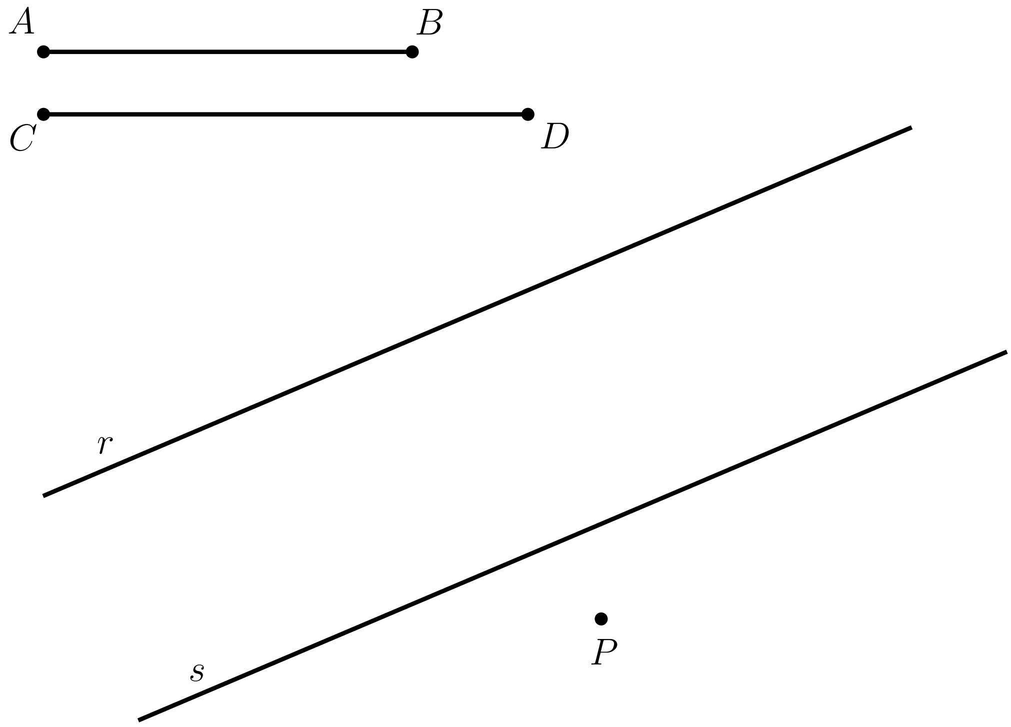
Questão 07: De um triângulo conhecemos a base $b = 60$ mm e a altura $h = 40$ mm. Construir um trapézio isósceles que lhe seja equivalente, sendo dados o ângulo α de sua base maior e o segmento d, que corresponde à diferença entre a base média e a altura deste trapézio. Pergunta: Quanto mede o perímetro do trapézio isósceles?

(A) 145 mm. (B) 223 mm. (C) 205 mm. (D) 185 mm. (E) 166 mm.

ITA 1990, Questão 07.

Questão 08: Traçar uma circunferência que passe pelo ponto dado P e que determine nas retas paralelas r e s, dadas, cordas cujos comprimentos sejam respectivamente iguais aos segmentos também dados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Pergunta: Quanto mede o diâmetro da circunferência?

(A) 48 mm. (B) 56 mm. (C) 64 mm. (D) 72 mm. (E) 80 mm.

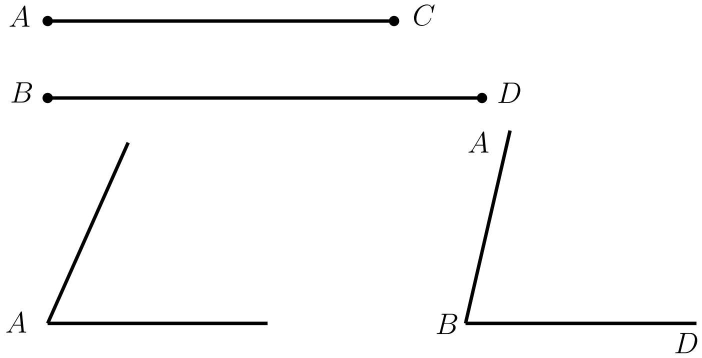


ITA 1990, Questão 08.

II.3 Vestibular de 1989

Questão 01: Construir um quadrilátero $ABCD$ inscritível em uma circunferência, conhecendo-se: o ângulo $\hat{A}$, o ângulo $A\hat{B}D$ e as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Pergunta: Quanto mede na escala 1:20 o lado $\overline{CD}$ do quadrilátero $ABCD$?

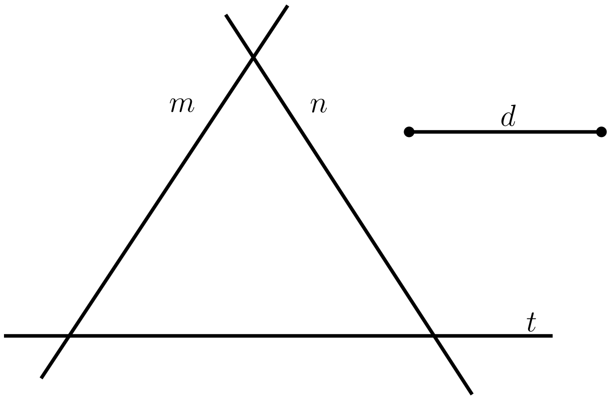
(A) 0,62 m. (B) 0,74 m. (C) 0,84 m. (D) 0,96 m. (E) 1,08 m.



ITA 1989, Questão 01.

Questão 02: São dadas as retas m, n e t. Apoiar nas retas m e n um segmento de reta $\overline{PQ}$, paralelo à reta t e medindo a distância d, também dada. Construa um triângulo equilátero equivalente ao quadrilátero determinado por m, n, t e $\overline{PQ}$. Pergunta: Quanto mede o perímetro do triângulo equilátero?

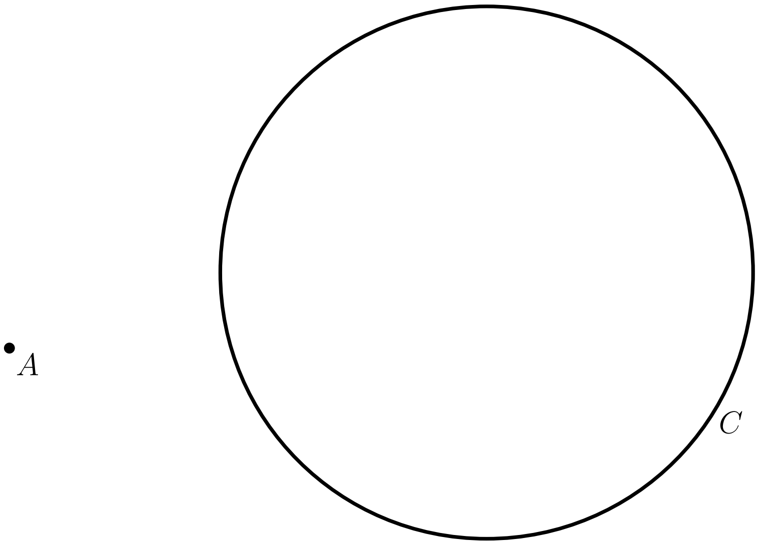
(A) 117 mm. (B) 109 mm. (C) 126 mm. (D) 133 mm. (E) 101 mm.



ITA 1989, Questão 02.

Questão 03: Determine um ponto fixo P, que corresponde ao ponto de encontro das diagonais de todos os trapézios isósceles, inscritos na circunferência dada C, determinados cada um deles por retas secantes à circunferência C, traçadas a partir do ponto A. Pergunta: Quanto mede a distância $\overline{AP}$ na escala 1:75?

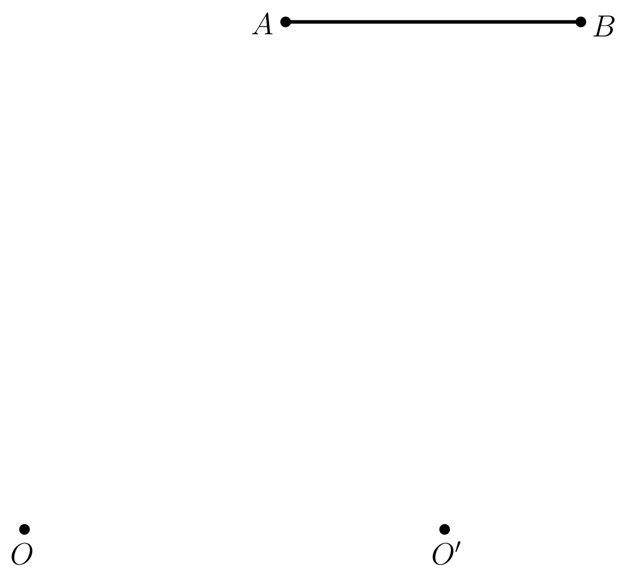
(A) 2,25 m. (B) 2,85 m. (C) 3,45 m. (D) 4,05 m. (E) 4,65 m.



ITA 1989, Questão 03.

Questão 04: Os pontos O e O' dados são centros de duas circunferências cujos diâmetros são respectivamente iguais aos segmentos áureos externo e interno do segmento de reta $\overline{AB}$, também dado. Determine o lugar geométrico dos centros das circunferências que cortam simultaneamente as circunferências de centro O e O' segundo os seus diâmetros. Pergunta: Quanto mede a menor distância do ponto O' ao lugar geométrico pedido?

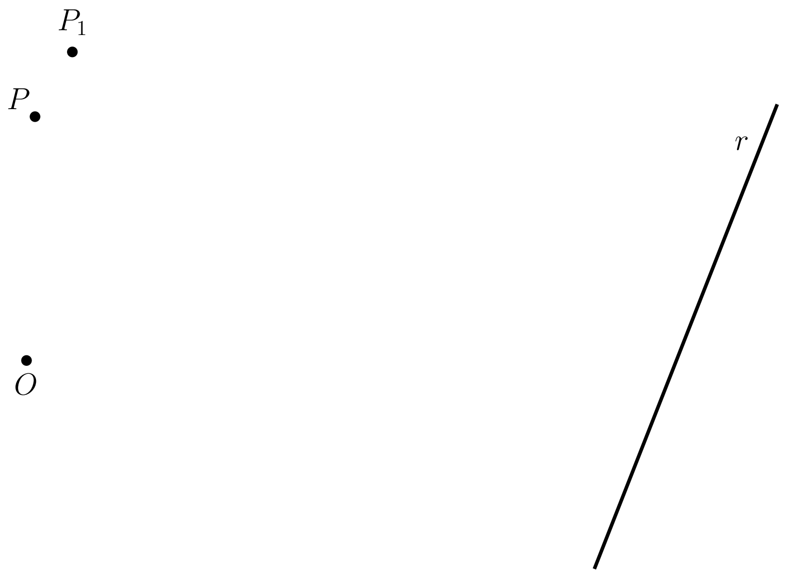
(A) 19 mm. (B) 25 mm. (C) 31 mm. (D) 37 mm. (E) 43 mm.



ITA 1989, Questão 04.

Questão 05: O ponto O é o centro do círculo diretor de uma evolvente da qual são conhecidos os pontos P e P_1, sendo P o ponto de nascença da evolvente e P_1 o primeiro ponto desta obtido pelo processo usual de construção da curva. Determine os pontos subsequentes P_2 e P_3 e, por P_3, trace uma reta tangente à curva. Pergunta: Quanto mede aproximadamente o maior ângulo formado pela intersecção da reta tangente à curva com a reta r dada?

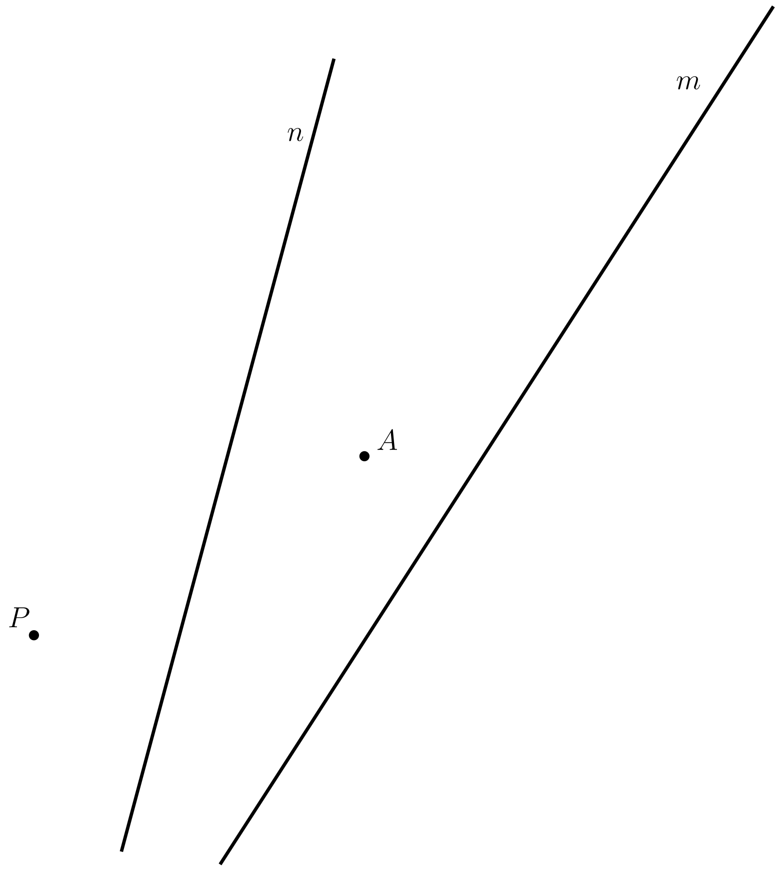
(A) 137°. (B) 92°. (C) 100°. (D) 115°. (E) 126°.



ITA 1989, Questão 05.

Questão 06: Traçar uma reta r que passa pelo ponto dado P e pela intersecção de duas retas dadas m e n, sem usar essa intersecção. Determine o lugar geométrico dos pontos B, conjugados harmônicos do ponto A também dado, em relação ao ponto de encontro das retas m e r, com retas secantes a estas, traçadas pelo ponto A. Pergunta: Quanto mede aproximadamente o menor ângulo formado pela intersecção do lugar geométrico pedido com a reta n?

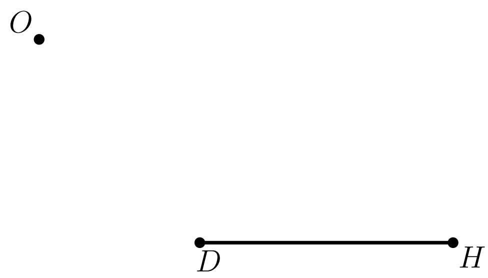
(A) 19^o. (B) 31^o. (C) 43^o. (D) 55^o. (E) 67^o.



ITA 1989, Questão 06.

Questão 07: Construir um triângulo ABC, conhecendo-se: a posição do centro O da circunferência circunscrita, o pé H da altura referente ao vértice A e o ponto D, que é o encontro da bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ com o lado $\overline{BC}$. Pergunta: Quanto mede o lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC?

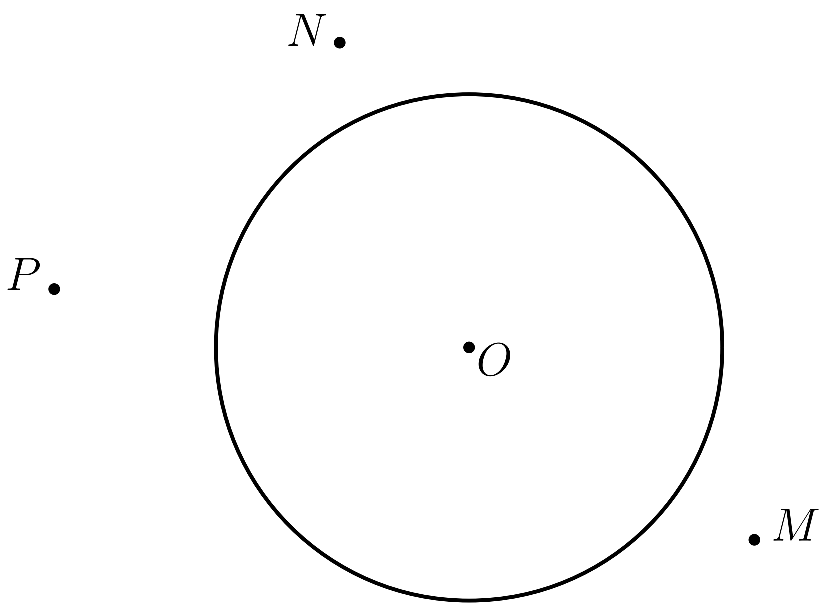
(A) 101 mm. (B) 107 mm. (C) 113 mm. (D) 118 mm. (E) 124 mm.



ITA 1989, Questão 07.

Questão 08: São dados: uma circunferência de centro O e três pontos M, N e P. Pelos dois primeiros traçar duas retas secantes à circunferência, determinando nos pontos de contato os segmentos $\overline{MAA'}$ e $\overline{NBB'}$, de tal forma que as cordas $\overline{AB'}$ e $\overline{A'B}$ se encontrem no ponto P. Pergunta: Quanto mede aproximadamente a diferença entre os comprimentos das cordas $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$?

(A) 26 mm. (B) 32 mm. (C) 38 mm. (D) 44 mm. (E) 49 mm.



ITA 1989, Questão 08.

II.4 Vestibular de 1988

Questão 01: O segmento AB dado é o semi-perímetro de um hexágono regular. Sem construir esse hexágono, pede-se traçar um quadrado de área equivalente. Pergunta: Quanto mede o lado do quadrado?

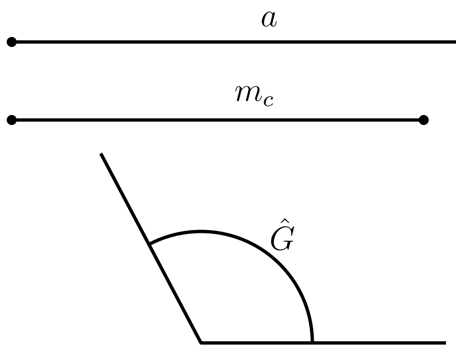
Obs.: Mostrar todas as construções geométricas.

(A) 36 mm. (B) 43 mm. (C) 48 mm. (D) 53 mm. (E) 57 mm.

ITA 1988, Questão 01.

Questão 02: Construir um triângulo sendo conhecidos: o lado a, a mediana m_c e o ângulo $\hat{G}$, formado pelas medianas m_c e m_b. A mediana m_a mede?

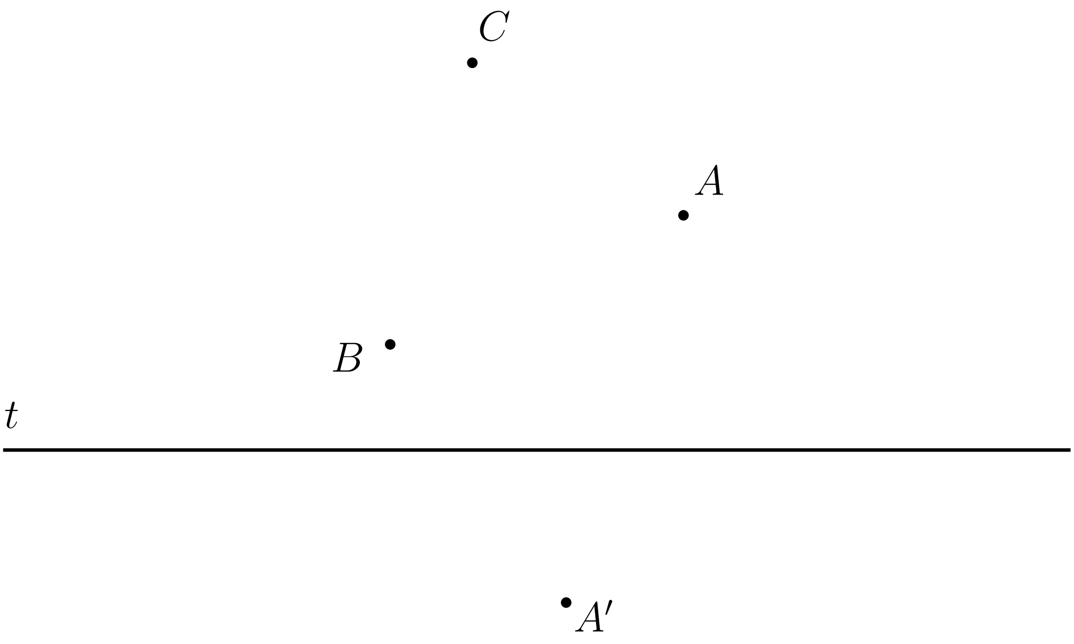
(A) 57 mm. (B) 70 mm. (C) 65 mm. (D) 60 mm. (E) 74 mm.



ITA 1988, Questão 02.

Questão 03: Seja t um eixo de afinidade; A, B e C pontos que pertencem a uma circunferência e A' o ponto afim de A. Quanto medem, aproximadamente, os eixos maior e menor da elipse afim da circunferência que contém A, B e C?

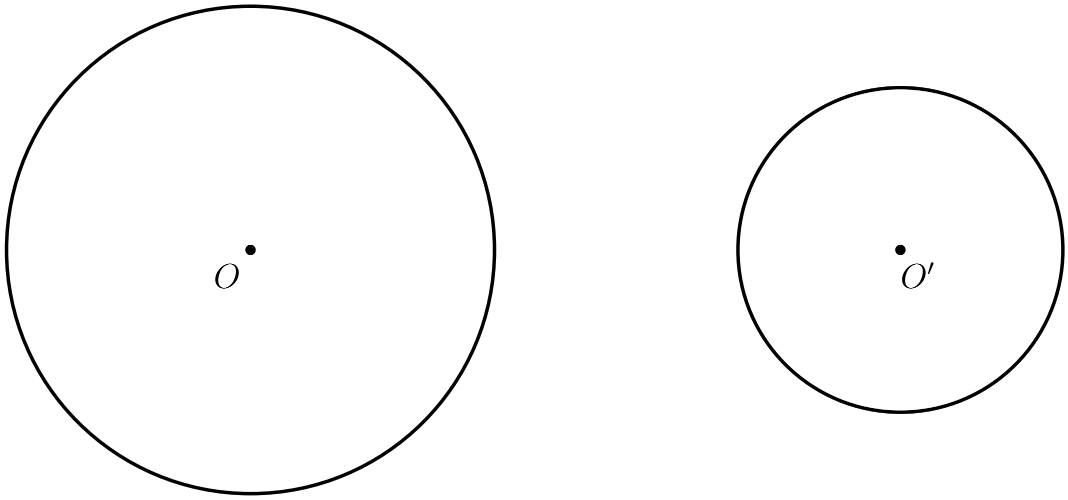
(A) 100 e 65 mm. (B) 120 e $72{,}5$ mm. (C) 130 e 80 mm.
(D) $135{,}5$ e 85 mm. (E) 140 e $90{,}5$ mm.



ITA 1988, Questão 03.

Questão 04: Determinar dois pontos fixos P e Q por onde passam todas as circunferências ortogonais às circunferências de centros O e O'. Pergunta: Quanto mede a distância $\overline{PQ}$?

(A) 45 mm. (B) 52 mm. (C) 58 mm. (D) 67 mm. (E) 76 mm.

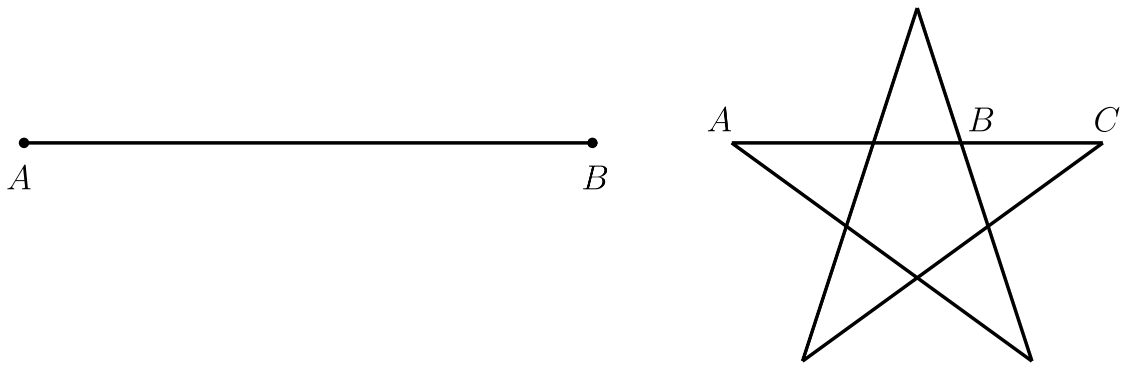


ITA 1988, Questão 04.

Questão 05: O segmento $\overline{AB}$ pertence a um pentágono estrelado. Quanto mede o segmento $\overline{AC}$? Escala: 1:25.

Obs.: O desenho do pentágono estrelado abaixo é apenas uma demonstração do que se pede, não possuindo valor numérico.

(A) $256{,}25$ cm. (B) $270{,}75$ cm. (C) $287{,}50$ cm. (D) $293{,}25$ cm. (E) $300{,}50$ cm.



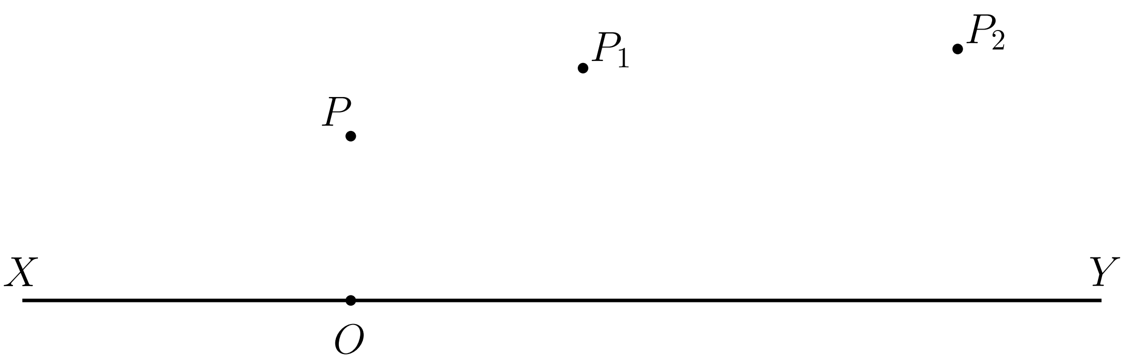
ITA 1988, Questão 05.

Questão 06: Construa uma hipociclóide encurtada de tal forma que a cíclica seja uma elipse, sabendo-se que os pares de números dados correspondem respectivamente ao raio do círculo diretor e do círculo gerador da curva. Qual é o par de valores correto?

(A) 40 e 20 mm. (B) 45 e 15 mm. (C) 50 e 20 mm. (D) 40 e 16 mm. (E) 60 e 20 mm.

Questão 07: P, P_1 e P_2 são pontos que pertencem a uma espiral hiperbólica de eixo polar XY e pólo O. Trace a assíntota da espiral e, pelo ponto P, uma reta tangente à curva. Pergunta: Qual é, aproximadamente, a medida do maior ângulo formado pela interseção da assíntota com a tangente?

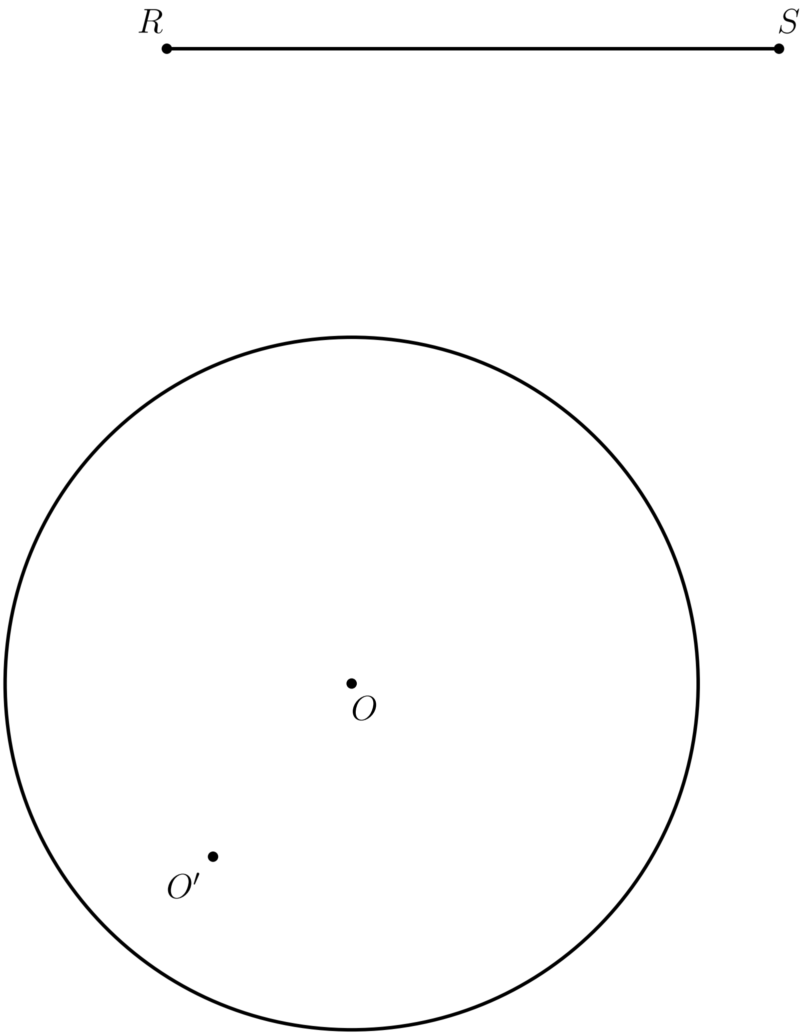
(A) 140°. (B) 148°. (C) 157°. (D) 165°. (E) 176°.



ITA 1999, Questão 07.

Questão 08: São dados: A circunferência de centro O, o ponto O' e o segmento $\overline{RS}$, que é o perímetro de uma circunferência cujo centro é O'. Trace a circunferência de centro O' e determine os centros de homotetia das duas circunferências. Pergunta: Quanto mede a distância entre os centros de homotetias direta e inversa das duas circunferências?

(A) 8 mm. (B) 11 mm. (C) 14 mm. (D) 18 mm. (E) 23 mm.

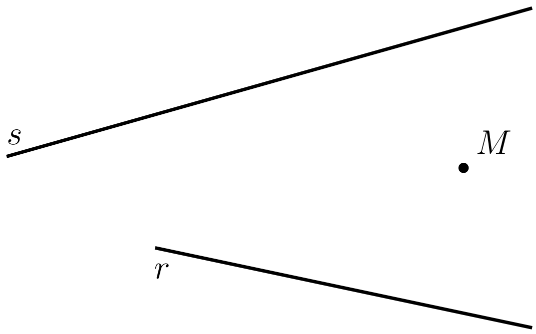


ITA 1988, Questão 08.

II.5 Vestibular de 1987

Questão 01: Dadas duas retas r e s e um ponto M entre elas, pede-se determinar dois pontos R e S nas retas dadas, sendo $m(\overline{MR}) = m(\overline{MS})$. O valor do segmento $\overline{RS}$ é:

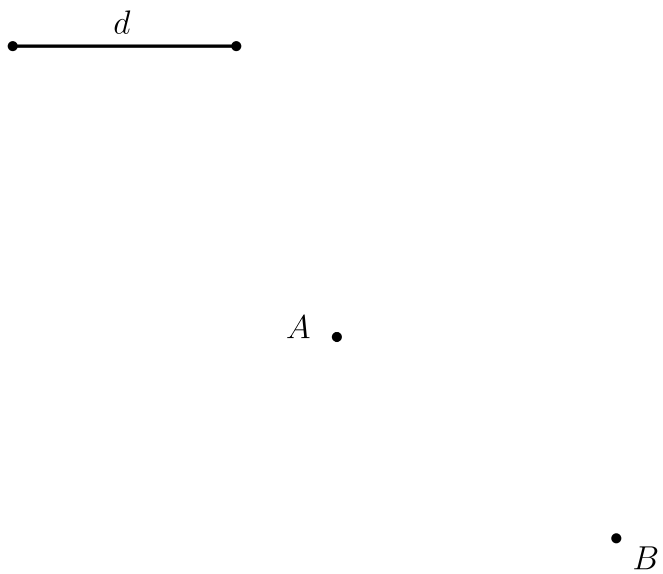
(A) 22. (B) 42. (C) 30. (D) 35. (E) 38.



ITA 1987, Questão 01.

Questão 02: Passar, pelos pontos dados, retas a e b paralelas e separadas pelo segmento d também dado. O segmento perpendicular pelo ponto B, até a reta que passa pelo ponto A, mede:

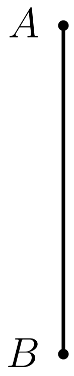
(A) 45. (B) 36. (C) 40. (D) 30. (E) 43.



ITA 1987, Questão 02.

Questão 03: Dado o passo $\overline{AB}$ construir a espiral de Arquimedes, usando 8 pontos. Pelo 5º ponto, traçar uma tangente a essa espiral. A normal a essa tangente mede:

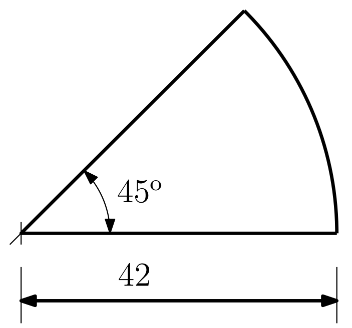
(A) 20. (B) 23. (C) 30. (D) 26. (E) 19.



ITA 1987, Questão 03.

Questão 04: Construir um triângulo isósceles equivalente ao setor circular conhecido. A base desse triângulo mede aproximadamente:

(A) 33. (B) 29. (C) 36. (D) 27. (E) 38.



ITA 1987, Questão 04.

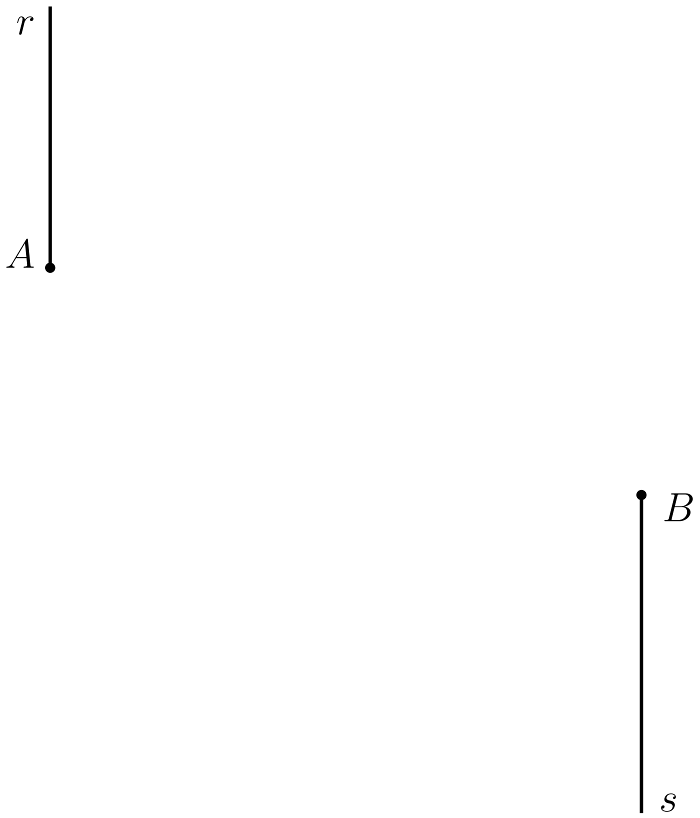
Questão 05: O segmento $\overline{CE}$ dado é o lado de um pentágono inscrito em um círculo. Construa um triângulo retângulo, sabendo-se que sua hipotenusa é igual ao segmento $\overline{CE}$ e que os catetos são lados de polígonos inscritos no mesmo círculo. Pergunta: Qual é o perímetro do triângulo?

(A) 62 mm. (B) 75 mm. (C) 90 mm. (D) 83 mm. (E) 68 mm.

ITA 1987, Questão 05.

Questão 06: Dadas as retas r e s paralelas, concordá-las nos pontos A e B por uma curva plana composta de dois arcos, sabendo-se que o raio de um deles é o triplo do outro. Quanto mede a diferença entre os comprimentos dos arcos concordantes?

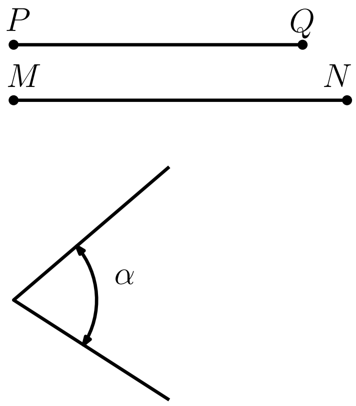
(A) 40 mm. (B) 55 mm. (C) 65 mm. (D) 72 mm. (E) 80 mm.



ITA 1987, Questão 06.

Questão 07: O segmento $\overline{PQ}$ é um dos lados não paralelos de um trapézio. O segmento $\overline{MN}$ é o que une os pontos médios dos lados não paralelos. O segmento $\overline{PQ}$ forma com a base maior um ângulo igual a α. Sabe-se que a base maior é o dobro da base menor. Quanto mede o lado não paralelo a $\overline{PQ}$?

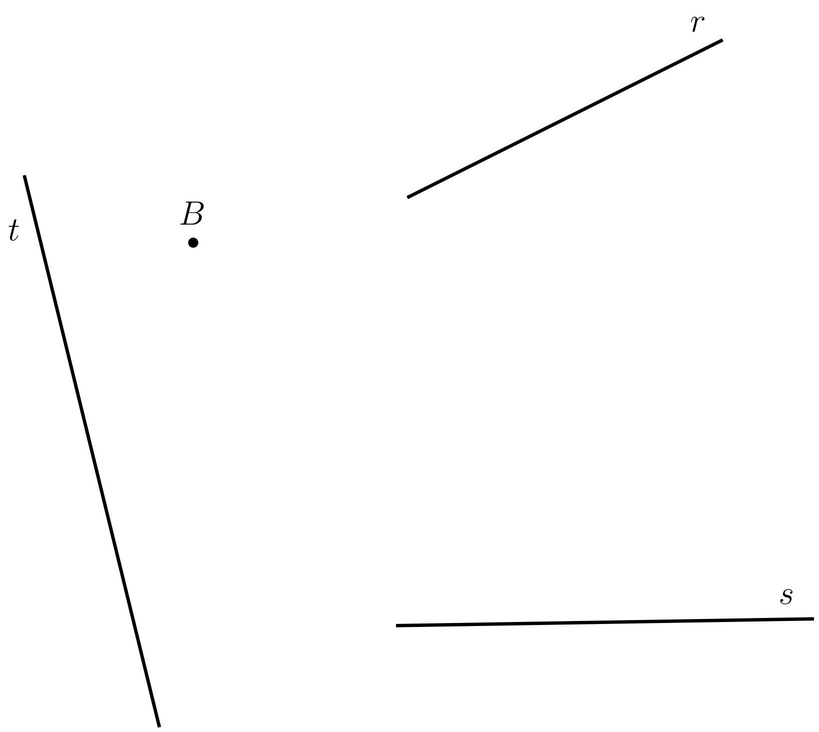
(A) 45 mm. (B) 41 mm. (C) 35 mm. (D) 48 mm. (E) 37 mm.



ITA 1987, Questão 07.

Questão 08: São dadas as retas r, s e t, assim como o ponto B. Trace a bissetriz do ângulo formado por r e s e determine sobre a mesma um ponto A, distante 20 mm à direita da reta t. Trace o menor caminho entre os pontos A e B, com um ponto em t. Pergunta: Qual é a medida do ângulo formado pelos segmentos que determinam este menor caminho?
Obs.: t é perpendicular à bissetriz do ângulo formado por r e s.

(A) 45°. (B) 90°. (C) 60°. (D) 75°. (E) 65°.

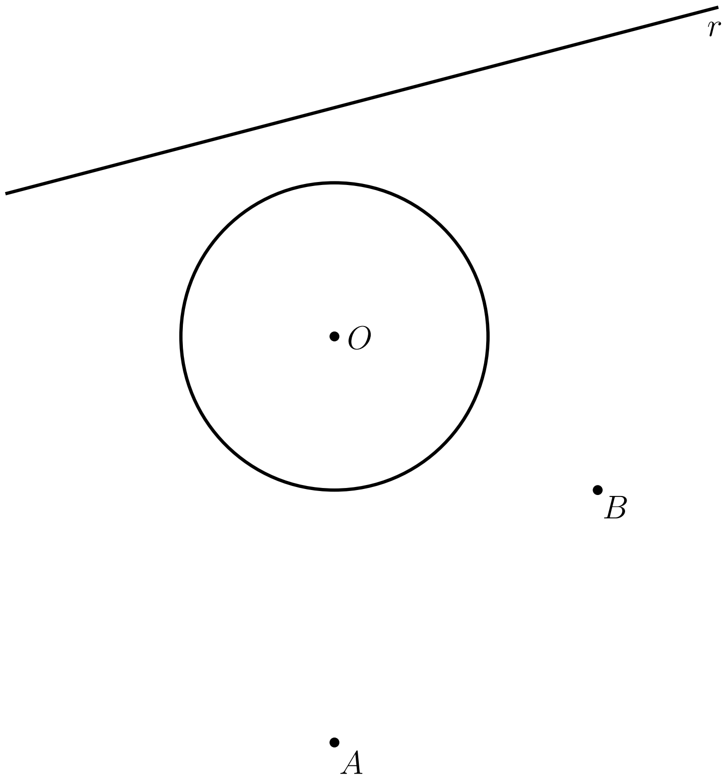


ITA 1987, Questão 08.

II.6 Vestibular de 1986

Questão 16: Dados: Uma circunferência de centro O; uma reta r; dois pontos A e B. Pede-se: O raio da circunferência que passa pelos dois pontos e é secante à circunferência dada e determina nesta uma secante paralela à reta r.

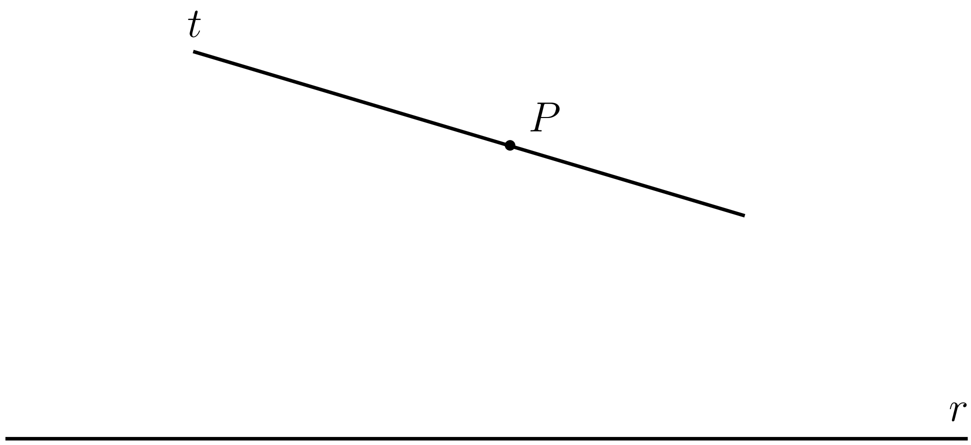
(A) 23 mm. (B) 20 mm. (C) 29 mm. (D) 37 mm. (E) 42 mm.



ITA 1986, Questão 16.

Questão 17: Conhecendo-se: t, reta tangente a uma cíclica; P, ponto de tangência; r, diretriz da cíclica. Pede-se: O raio da circunferência geradora, assim como a construção de um ciclo dessa curva, passando por P.

(A) 20 mm. (B) 27 mm. (C) 16 mm. (D) 24 mm. (E) 30 mm.

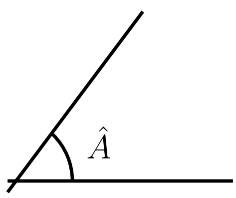


ITA 1986, Questão 17.

Questão 18: De um triângulo ABC conhecemos: Um lado, uma mediana e o ângulo oposto ao lado dado. Pede-se o valor dos outros dois lados.

- a = 65 mm; m_b = 63 mm.

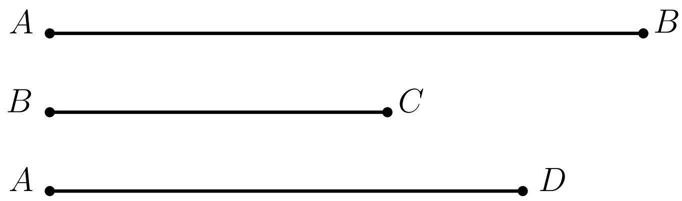
(A) 60 e 80 mm. (B) 50 e 57 mm. (C) 55 e 65 mm.
(D) 60 e 70 mm. (E) 68 e 77 mm.



ITA 1986, Questão 18.

Questão 19: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são os lados de um triângulo ABC. Determinar o ângulo do vértice A, sabendo-se que o lado $\overline{AC}$ é a quarta proporcional dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$.

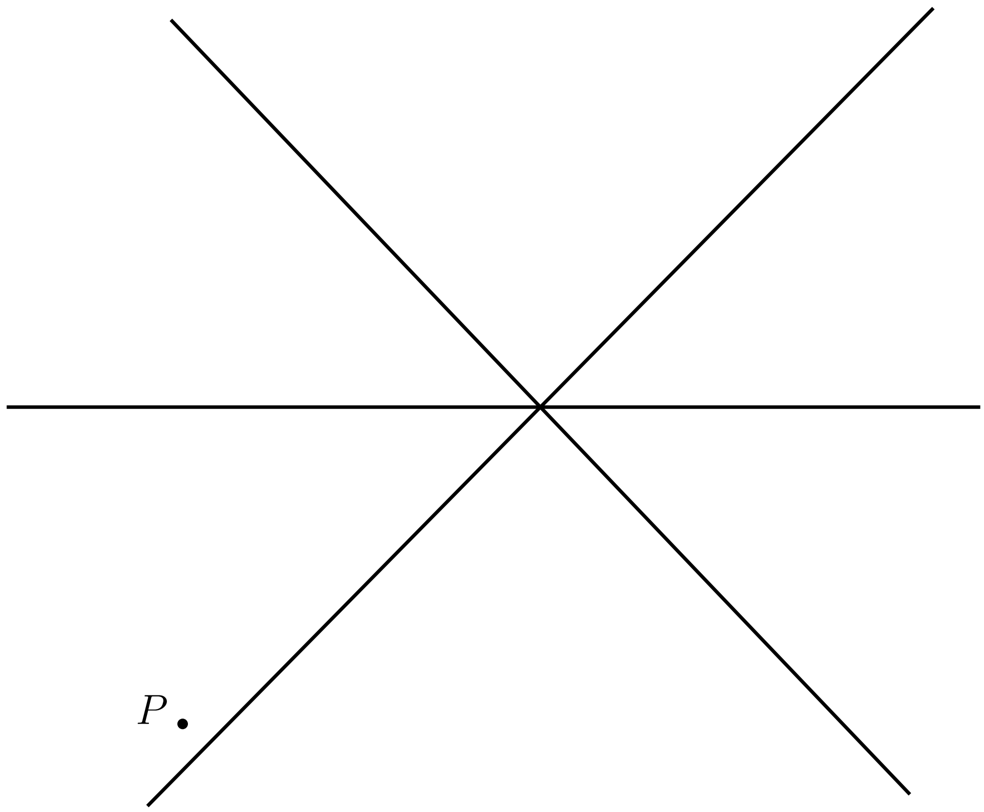
(A) 25º. (B) 30º. (C) 22º. (D) 16º. (E) 20º.



ITA 1986, Questão 19.

Questão 20: Determinar a distância focal da hipérbole, conhecendo-se: As assíntotas e o ponto P pertencente à curva.

(A) 60 mm. (B) 80 mm. (C) 75 mm. (D) 65 mm. (E) 70 mm.



ITA 1986, Questão 20.

II.7 Vestibular de 1985

Questão 16: Determinar, aproximadamente, o perímetro de um triângulo ABC (assinalado no sentido horário), sendo dado um dos lados $\overline{AB}$, igual a 75 mm. O ângulo do vértice A é igual a 135º e a altura conduzida do vértice C ao lado $\overline{AB}$ é igual ao segmento áureo desse lado.

(A) 250 mm. (B) 225 mm. (C) 312 mm. (D) 270 mm. (E) 306 mm.

ITA 1985, Questão 16.

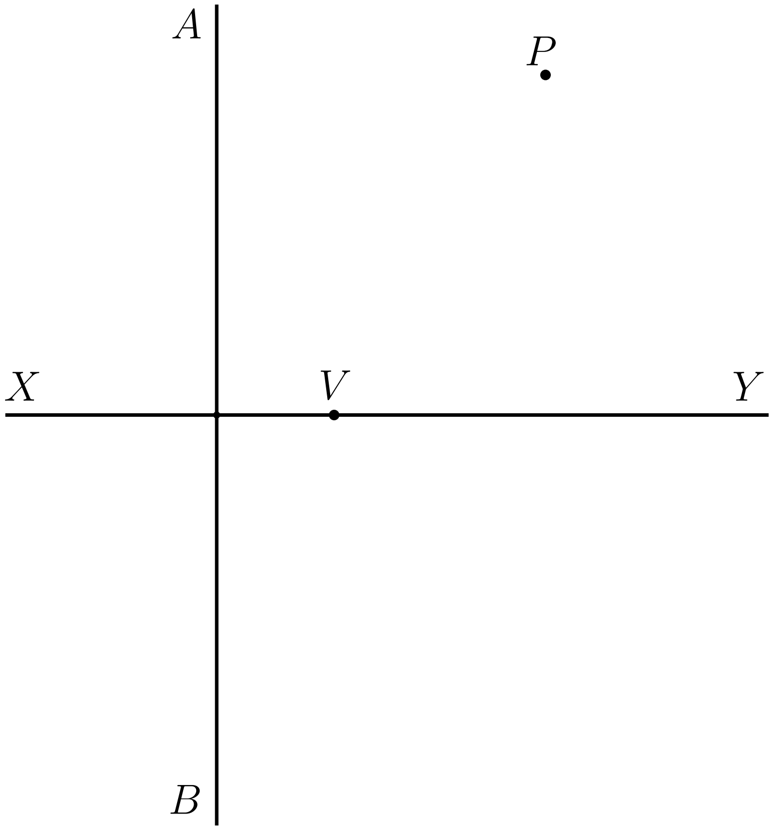
Questão 17: São dados do problema: uma circunferência de raio r, um ponto P que lhe pertence, uma reta t a ela tangente e um ponto Q dessa reta. Girando-se a circunferência de 135º sobre a reta, sem deslizar, determinar a distância do ponto P ao ponto Q.

(A) 76 mm. (B) 50 mm. (C) 70 mm. (D) 63 mm. (E) 55 mm.

ITA 1985, Questão 17.

Questão 18: De uma parábola são conhecidos: o eixo XY, a diretriz $\overline{AB}$, o vértice V e um ponto P de tangência. Encontrar a soma dos comprimentos das medianas do triângulo definido pelo ponto P, pelo foco F e um ponto Q determinado pela interseção da reta tangente à parábola no ponto P com o eixo XY.

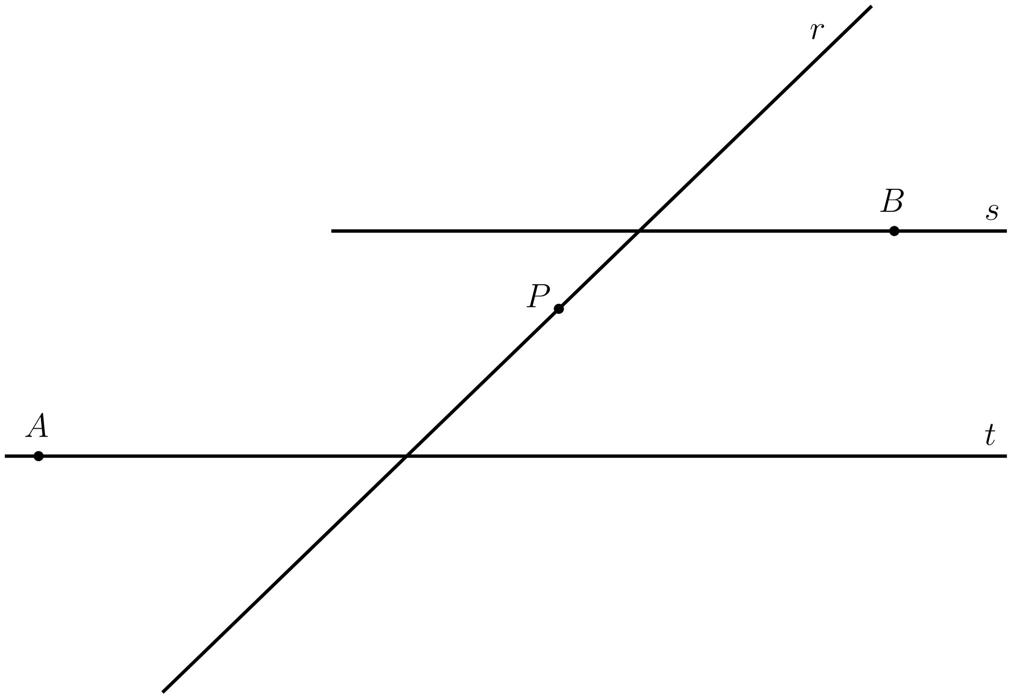
(A) 130 mm. (B) 105 mm. (C) 145 mm. (D) 140 mm. (E) 110 mm.



ITA 1985, Questão 18.

Questão 19: As retas s e t são os eixos de um duto que descreve uma curva definida por dois arcos de circunferência concordantes. Determinar graficamente o comprimento do duto entre os pontos A e B, sabendo-se que ambos os arcos de concordância são tangentes à reta r no ponto P. Escala do desenho: 1:10.

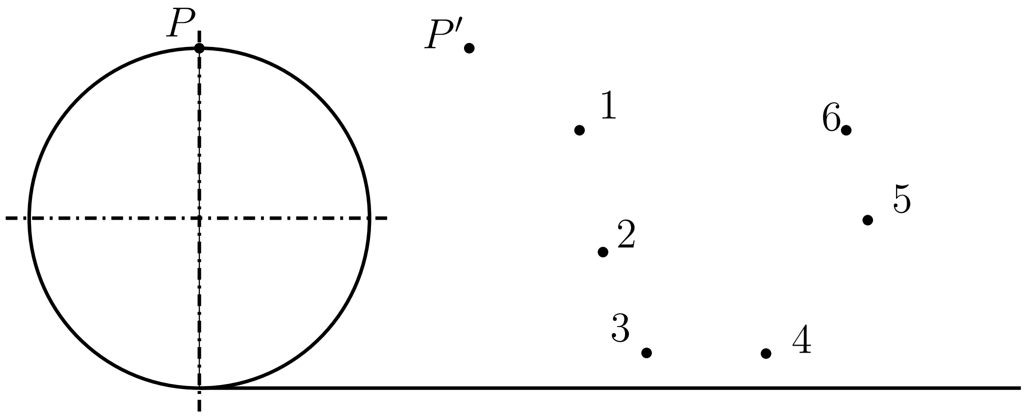
(A) 1180 mm. (B) 1280 mm. (C) 1110 mm. (D) 990 mm. (E) 1220 mm.



ITA 1985, Questão 19.

Questão 20: Uma hélice de 60 mm de passo é traçada sobre uma superfície cilíndrica de diâmetro D. Na representação gráfica de seu desenvolvimento, iniciado no ponto P, qual o par de pontos assinalados pertence à curva?

(A) 1 - 2. (B) 3 - 4. (C) 5 - 3. (D) 6 - 3. (E) 2 - 4.



ITA 1985, Questão 20.

II.8 Vestibular de 1984

Questão 16: Um topógrafo pretende medir a altura de uma torre. Para tanto localiza o teodolito num ponto A conveniente e faz uma visada horizontal para o ponto B localizado a 100 m de distância. Em seguida visa o topo da torre (ponto C) verificando ser de 40º o ângulo que o teodolito forma com a horizontal. Determinar a altura da torre, sabendo-se ser esta a média proporcional da distância $m(\overline{AB})$. O visor do teodolito está a $1{,}50$ m do solo. Escala: 1:10^3

(A) 71,50 m. (B) 62,0 m. (C) 55,5 m. (D) 66,0 m. (E) 50,5 m.

Questão 17: Determinar, graficamente, o comprimento desenvolvido de um anel de diâmetro externo D (75 mm) e diâmetro interno d (25 mm) usando equivalência de áreas.

(A) 157 mm. (B) 161 mm. (C) 150 mm. (D) 175 mm. (E) 166 mm.

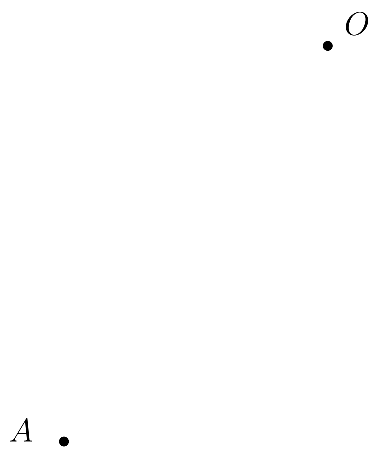
Questão 18: Determinar, graficamente, a altura referida ao lado $\overline{AB}$ de um triângulo ABC, conhecendo-se o valor das medianas M_B e M_C, bem como o comprimento do lado $\overline{BC}$.

- $m(M_B)$ = 90 mm; $m(M_C)$ = 60 mm; $m(\overline{BC})$ = 63 mm.

(A) 60 mm. (B) 45 mm. (C) 64 mm. (D) 72 mm. (E) 51 mm.

Questão 19: Construir um quadrilátero $ABCD$ que seja inscritível e tal que nele seja inscrita uma circunferência de centro O e raio r (25 mm). Determinar o raio da circunferência que circunscreve o quadrilátero, sabendo-se que seu lado $\overline{AB}$ mede 90 mm.

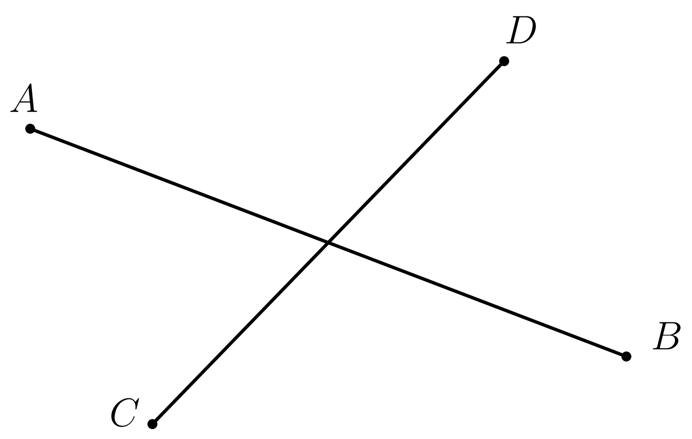
(A) 42 mm. (B) 47 mm. (C) 52 mm. (D) 57 mm. (E) 61 mm



ITA 1984, Questão 19.

Questão 20: As retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são diâmetros conjugados de uma elipse. Determinar o valor de seus diâmetros maior e menor.

(A) 85 mm e 62 mm. (B) 90 mm e 55 mm. (C) 96 mm e 57 mm.
(D) 100 mm e 68 mm. (E) 88 mm e 64 mm.

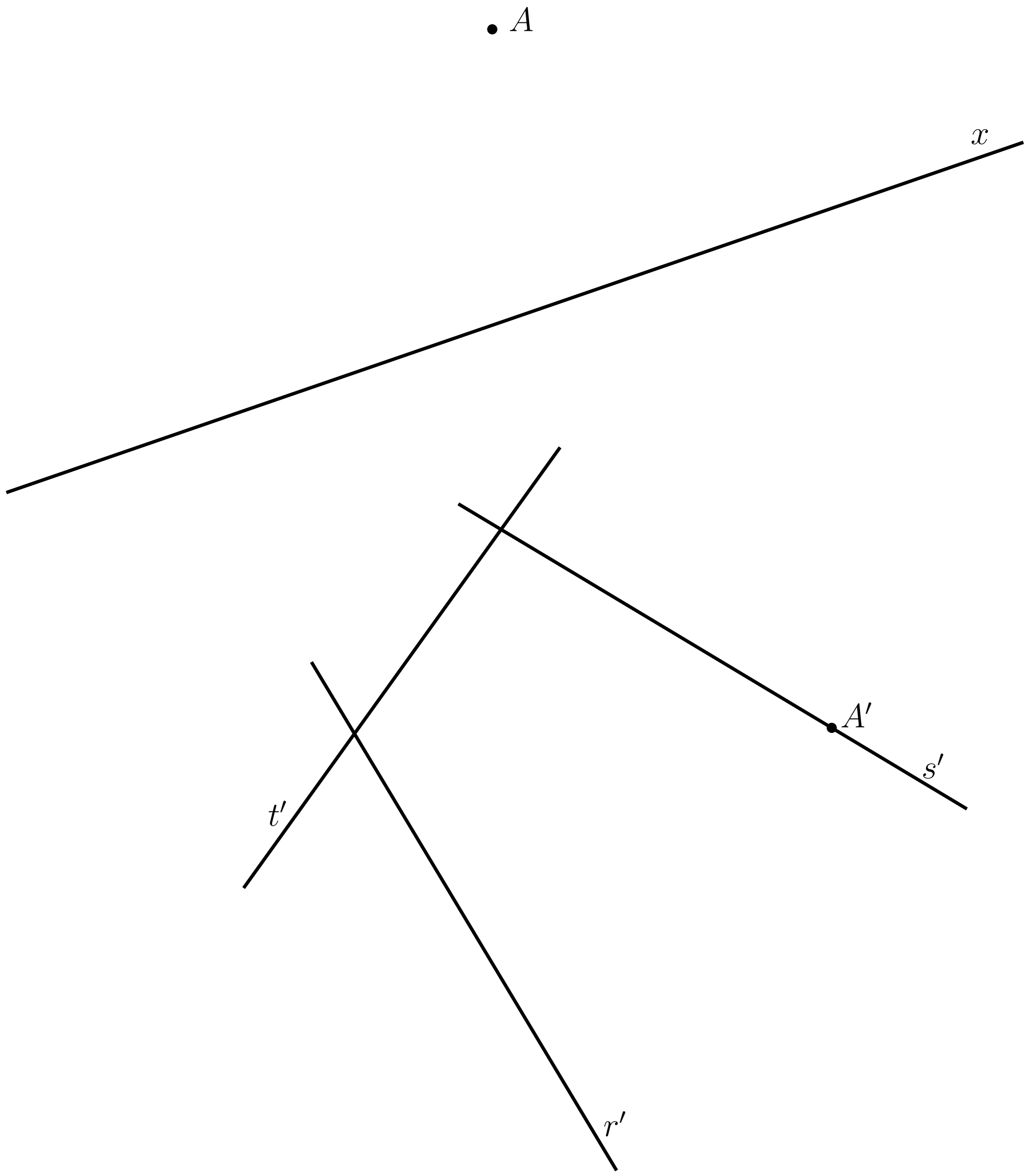


ITA 1984, Questão 20.

II.9 Vestibular de 1983

Questão 16:: As retas r', s' e t' são figuras afins das retas r, s e t. Determinar o raio da circunferência tangente às retas r, s e t, sabendo-se que os pontos A e A' são pontos afins e x é o eixo de afinidade.

(A) 20 mm. (B) 25 mm. (C) 30 mm. (D) 35 mm. (E) 42 mm.



ITA 1983, Questão 16.

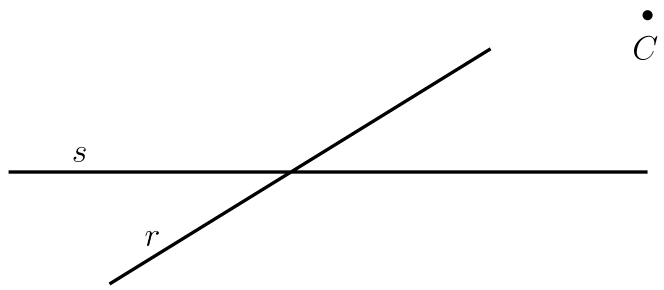
Questão 17:: Determinar o comprimento aproximado do lado oposto ao vértice A de um triângulo qualquer, sendo dados os lados ℓ_1 e ℓ_2 que definem o vértice A. É conhecido também o comprimento da bissetriz b_A, de origem em A.

- $m(\ell_1)$ = 50 mm $m(\ell_2)$ = 33 mm $m(b_A)$ = 22 mm

(A) 55 mm. (B) 70 mm. (C) 60 mm. (D) 45 mm. (E) 78 mm.

Questão 18:: São dadas as retas r e s e um ponto C. Construir um hexágono regular, tal que tenha o ponto C como centro da circunferência circunscrita e dois vértices opostos do hexágono estão um sobre a reta r e outro sobre a reta s. Determinar graficamente o lado do quadrado de área equivalente à do hexágono.

(A) 60 mm. (B) 45 mm. (C) 35 mm. (D) 40 mm. (E) 50 mm.



ITA 1983, Questão 18.

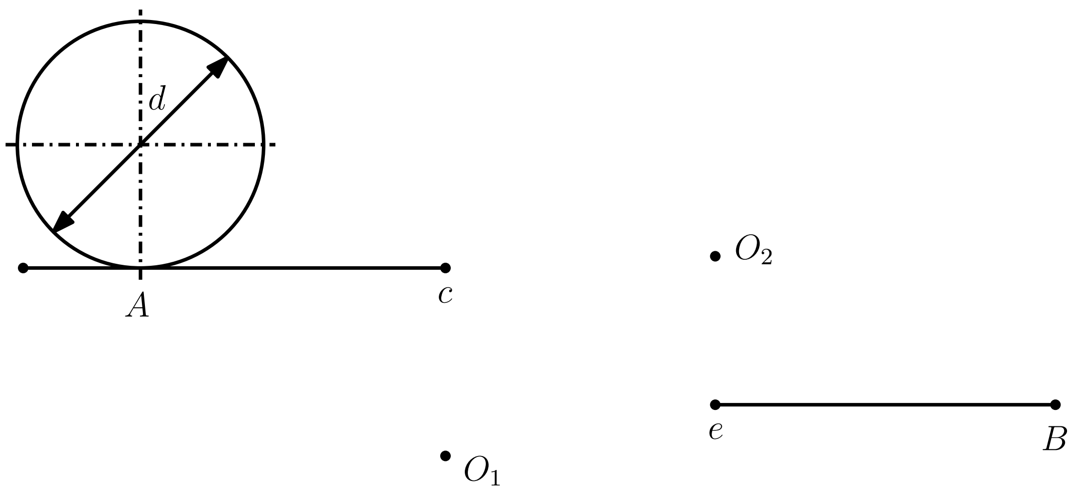
Questão 19:: Determinar graficamente a altura do trapézio $ABCD$, conhecendo-se:

- Base $m(\overline{AB})$ = 92 mm; Base $m(\overline{CD})$ = 55 mm.
- A diagonal $m(\overline{BD})$ é média proporcional dos segmentos $m(\overline{AB})$ e $m(\overline{CD})$.
- O ponto E é o ponto de concurso das retas suportes dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ e o ângulo $A\hat{E}B = 30^o$.
- Identificação dos pontos A, B, C e D no sentido anti-horário.

(A) 21 mm. (B) 26 mm. (C) 35 mm. (D) 56 mm. (E) 46 mm.

Questão 20:: Uma roda de diâmetro d está em repouso, apoiada sobre a semi-reta de origem c, no ponto A. Em dado instante é posta em movimento, girando, sem deslizar, até atingir o ponto B, onde pára. Sabendo-se que os pontos c e e são ligados por dois arcos de circunferência, de centros O_1 e O_2, e considerando que a roda, para completar o trajeto, deu duas voltas completas, determinar o valor aproximado de seu diâmetro. A solução terá que ser inteiramente gráfica.

(A) 30 mm. (B) 15 mm. (C) 20 mm. (D) 35 mm. (E) 40 mm.

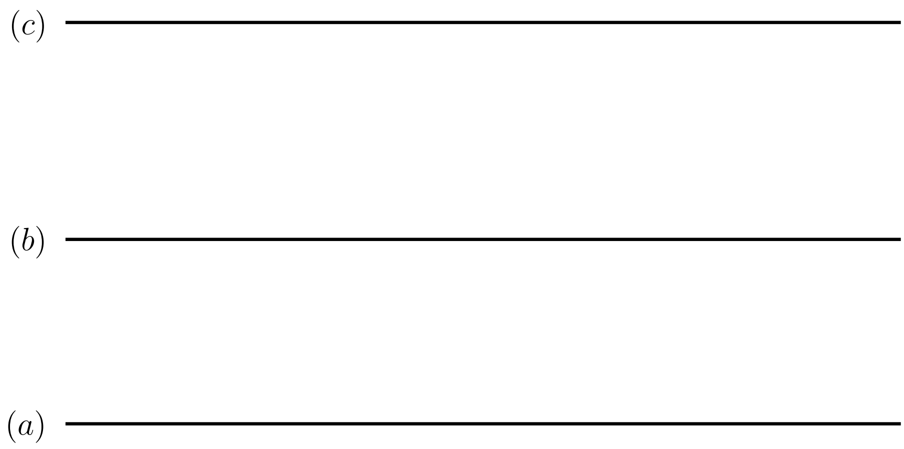


ITA 1983, Questão 20.

II.10 Vestibular de 1982

Questão 16: As retas a, b e c são lugares geométricos de três pontos, respectivamente, A, B e C, que pertencem a uma circunferência. Sabendo-se que nesta circunferência o arco $\widehat{AB}$ mede 120° e o arco $\widehat{BC}$ mede 60°, pergunta-se qual o valor de seu raio.

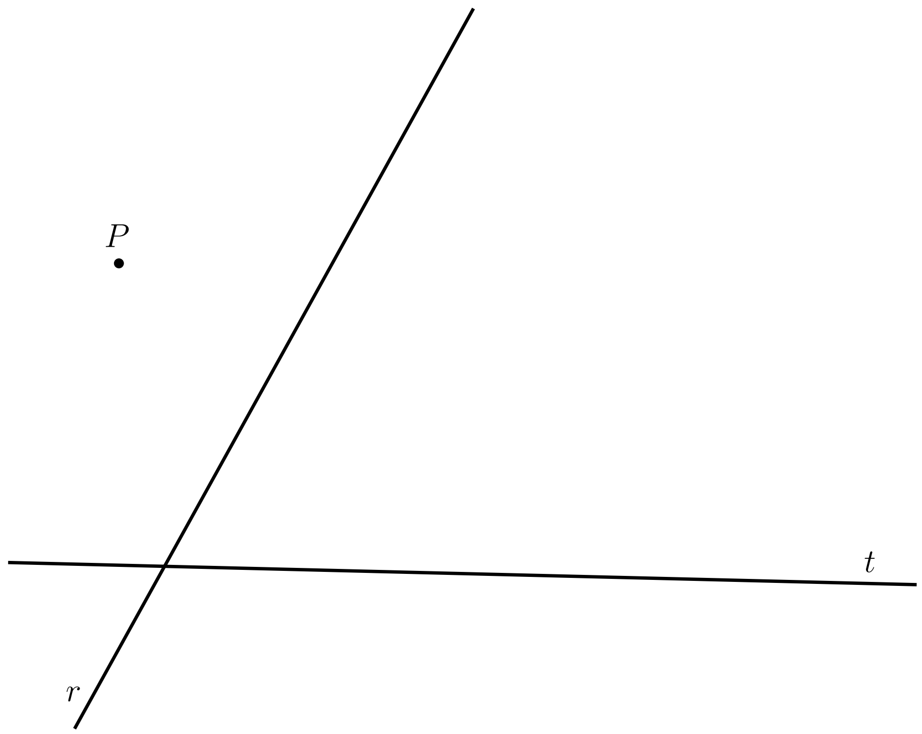
(A) 32 mm. (B) 37 mm. (C) 52 mm. (D) 47 mm. (E) 42 mm.



ITA 1982, Questão 16.

Questão 17: São dadas duas retas r e t e um ponto P. Determinar o raio da circunferência que passa por P, é tangente à reta t, sendo a reta r o lugar geométrico do centro O.

(A) 32 mm. (B) 19 mm. (C) 41 mm. (D) 25 mm. (E) 38 mm.



ITA 1982, Questão 17.

Questão 18: M_b e M_c são, respectivamente, os pontos médios dos lados b e c de um triângulo ABC. Sabendo-se que o ângulo do vértice A é igual a 60° e que a altura conduzida deste mesmo vértice A mede 42 mm, pergunta-se o valor do perímetro do triângulo.

(A) 115 mm. (B) 250 mm. (C) 126 mm. (D) 203 mm. (E) 227 mm.

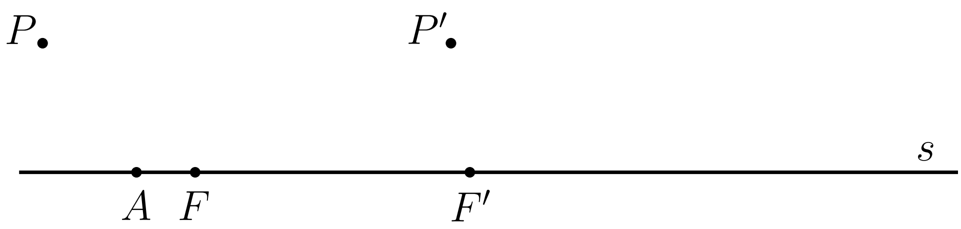
ITA 1982, Questão 18.

Questão 19: São dados do problema:

- O ponto P' pertence a uma elipse.
- O ponto F é, simultaneamente, foco desta elipse e de uma parábola.
- A reta s é suporte do eixo da elipse e do eixo da parábola.
- O ponto F' é o outro foco da elipse.
- O ponto A é o vértice da parábola.

Pede-se o menor ângulo formado pela tangente à parábola, passando pelo ponto P, e a tangente à elipse, passando pelo ponto P'.

(A) 50°. (B) 58°. (C) 27°. (D) 48°. (E) 13°.



ITA 1982, Questão 19.

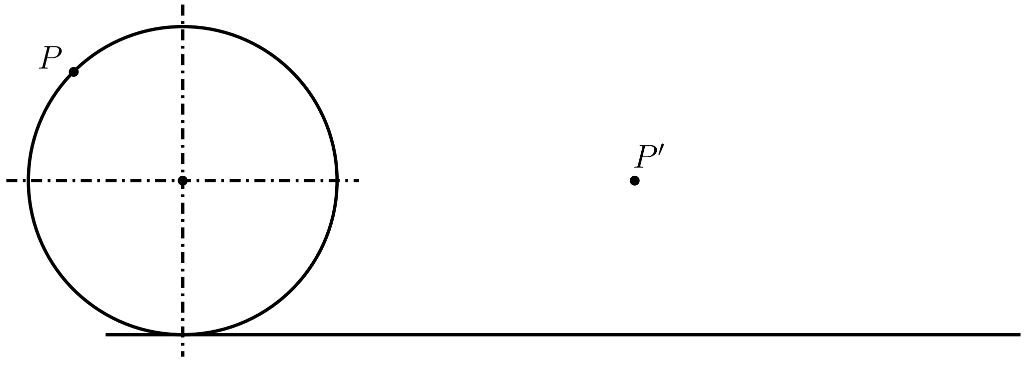
Questão 20: A um ajustador mecânico é fornecida uma chapa de aço, retangular. Pede-se o apótema do maior pentágono que pode ser riscado nesta chapa, sabendo-se que as dimensões desta são, respectivamente, a 3ª proporcional e a média proporcional dos valores 150 mm e 125 mm. A resposta deverá ser indicada na escala 1:$2{,}5$.

(A) 35 mm. (B) 43 mm. (C) 25 mm. (D) 17 mm. (E) 14 mm.

II.11 Vestibular de 1981

ITA 1981, Questão 16: São dados uma circunferência de raio igual a 20 mm, um ponto P na mesma, um ponto P' distante de seu centro e uma reta r, como mostra a figura abaixo. Rolando a circunferência sem escorregar sobre a reta, partindo do ponto P, desenvolver 315° no sentido horário. Determinar a distância do centro da circunferência até o ponto P', quando a mesma completar o ângulo dado.

(A) 28 mm (B) 22 mm (C) 50 mm (D) 41 mm (E) 33 mm



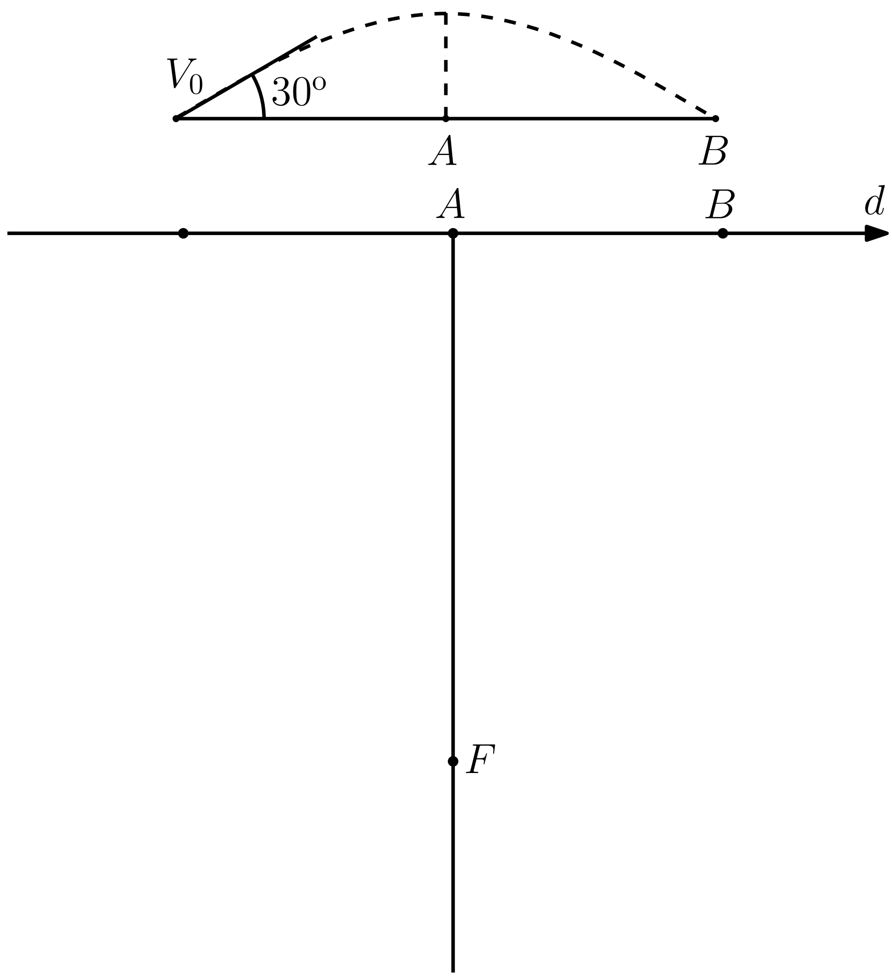
ITA 1981, Questão 16.

ITA 1981, Questão 17: Determinar graficamente o avanço de um parafuso, por volta, conhecendo-se:
- Ângulo da hélice da rosca igual a 18°.
- Diâmetro nominal do parafuso igual a 35 mm.

(A) 40 mm (B) 48 mm (C) 45 mm (D) 36 mm (E) 30 mm

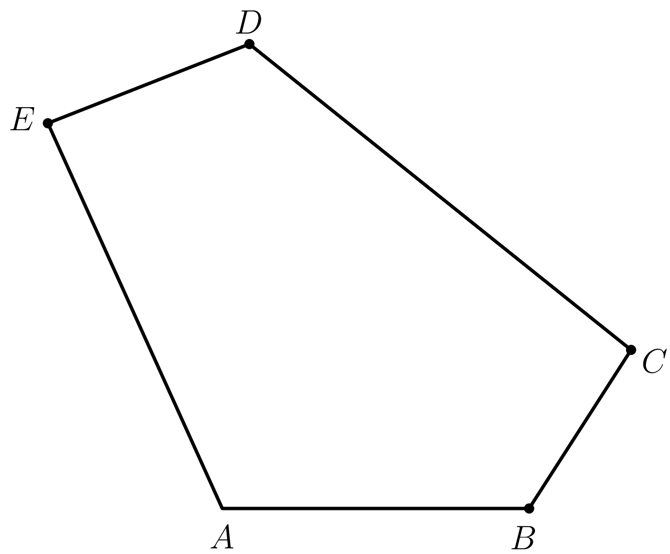
ITA 1981, Questão 18: Um projétil é lançado com uma velocidade inicial V_0 formando um ângulo de 30° com a horizontal, descrevendo um movimento parabólico. Determinar graficamente (valor aproximado) a altura máxima atingida pelo projétil, sendo dados:
- AB: 6800 metros (metade do alcance do projétil).
- F: foco da parábola.
- d: diretriz da parábola.
- Escala: 1 cm = 2000 metros.

(A) 1150 metros (B) 2000 metros (C) 2500 metros
(D) 2750 metros (E) 3000 metros



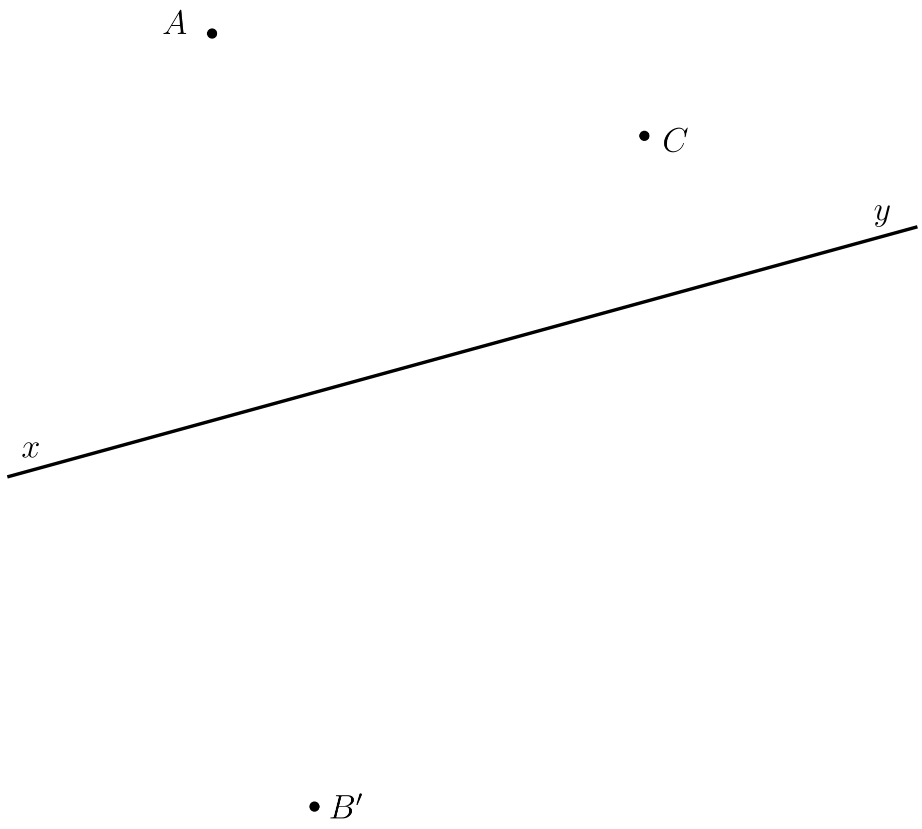
ITA 1981, Questão 18.

ITA 1981, Questão 19: Determinar o perímetro do trapézio de bases AB e EF equivalente ao pentágono $ABCDE$.
(A) 215 mm (B) 210 mm (C) 244 mm (D) 225 mm (E) 220 mm



ITA 1981, Questão 19.

ITA 1981, Questão 20: Achar a área, em milímetros quadrados, da figura afim do quadrado $ABCD$ (sentido horário), do qual conhecemos sua diagonal AC e o ponto B', afim do vértice B. A reta xy é o eixo de afinidade.
(A) 1220 mm^2 (B) 1678 mm^2 (C) 1125 mm^2 (D) 1530 mm^2 (E) 1350 mm^2

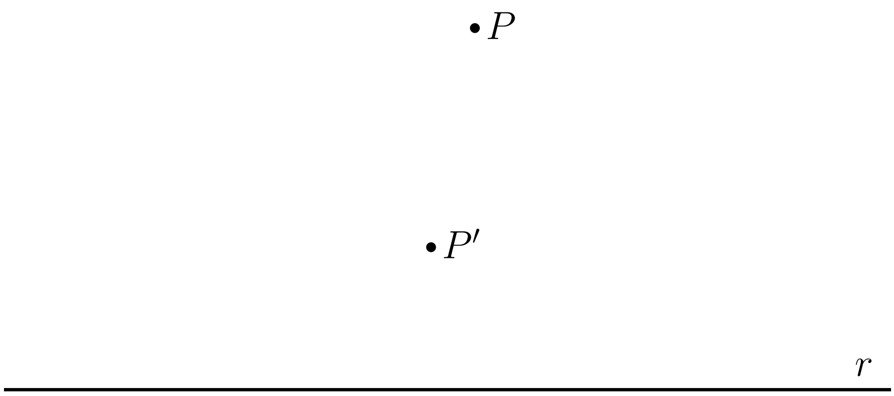


ITA 1981, Questão 20.

II.12 Vestibular de 1980

Questão 16: São dados dois pontos P e P' e uma reta r. Determinar a soma dos raios das circunferências que contêm os pontos e são tangentes à reta.

(A) 60 mm. (B) 65 mm. (C) 81 mm. (D) 74 mm. (E) 69 mm.



ITA 1980, Questão 16.

Questão 17: Um compressor centrífugo é acionado por um motor elétrico, sendo usada uma correia chata, suposta inteiramente tensa e de espessura desprezível. Sabendo-se que:

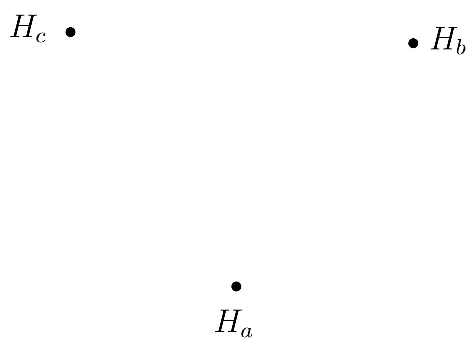
- A polia do motor é de raio r_1 e de centro C_1.
- A polia do compressor é de raio r_2 e de centro C_2.
- $m(r_1)$ = 200 mm, $m(r_2)$ = 400 mm, $m(\overline{C_1C_2})$ = 1000 mm.

Pede-se determinar o comprimento real da correia, sendo a escala 1:10.

(A) 3820 mm. (B) 4020 mm. (C) 3940 mm. (D) 3860 mm. (E) 4000 mm.

Questão 18: Determinar o comprimento da mediana em relação ao vértice B de um triângulo ABC, do qual conhecemos os pés das alturas H_a, H_b e H_c, sabendo-se que o ângulo $\hat{A}$ é obtuso.

(A) 56 mm. (B) 61 mm. (C) 72 mm. (D) 75 mm. (E) 80 mm.



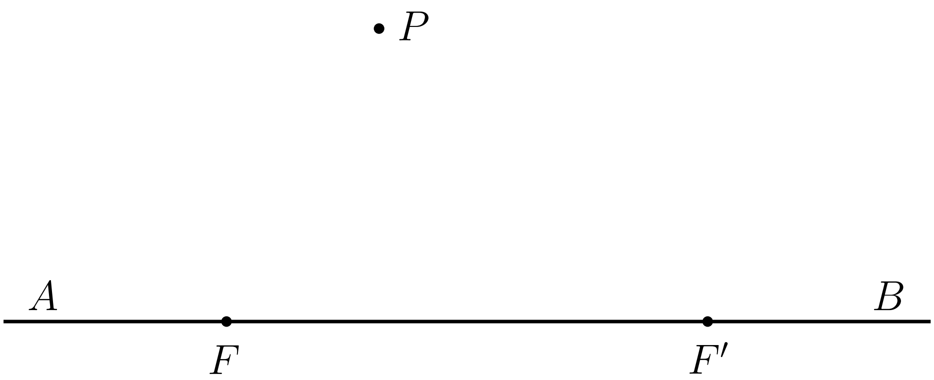
ITA 1980, Questão 18.

Questão 19: Os lados e a base de um triângulo isósceles são os segmentos áureos da média proporcional de dois segmentos que medem, respectivamente, 60 e 90 mm. Determinar o semi-perímetro deste triângulo, considerando o menor segmento como a base.

(A) 50 mm. (B) 55 mm. (C) 70 mm. (D) 64 mm. (E) 59 mm.

Questão 20: Dado o eixo $\overline{AB}$ de uma hipérbole regular, os focos F e F', bem como um ponto P, como mostra a figura, determinar, aproximadamente, o menor ângulo formado pelas retas que serão tangentes aos ramos da hipérbole e que contêm o ponto P.

(A) 48º. (B) 53º. (C) 58º. (D) 60º. (E) 63º.

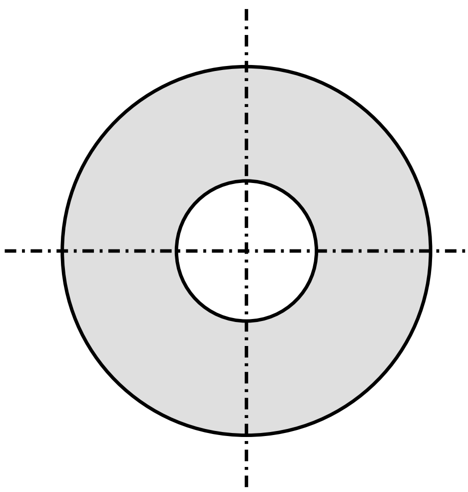


ITA 1980, Questão 20.

II.13 Vestibular de 1979

Questão 11: Determinar, por construção geométrica, o comprimento da diagonal de um quadrado de área equivalente à da coroa da figura 3 representada a seguir.

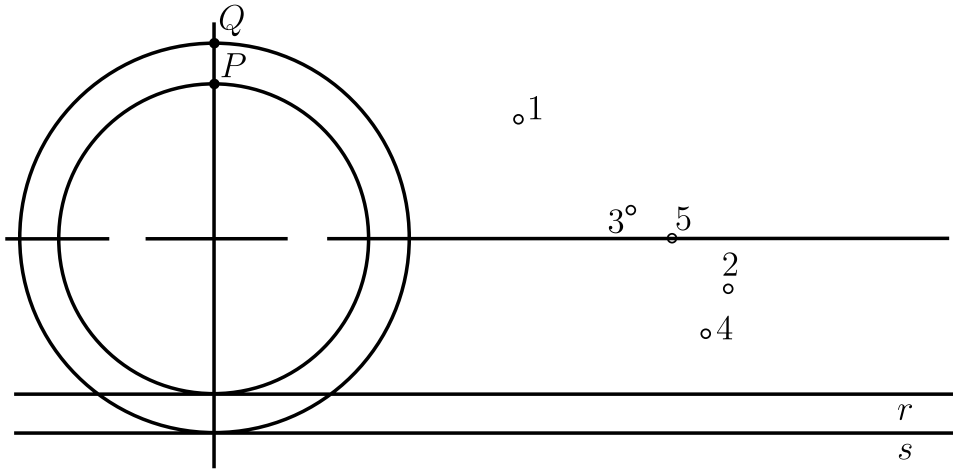
(A) 47 mm. (B) 57 mm. (C) 45 mm. (D) 50 mm. (E) 62 mm.



ITA 1979, Questão 11.

Questão 12: São dadas duas circunferências, uma com raio igual a 20 mm e outra com 25 mm, dois pontos P e Q e duas retas r e s, conforme a figura 4 a seguir. As circunferências desenvolvem meia volta sobre as retas, sem escorregar, no sentido horário, partindo dos pontos P e Q, descrevendo duas curvas cíclicas, sendo uma encurtada e outra alongada. Pede-se determinar o ponto de interseção das duas curvas.

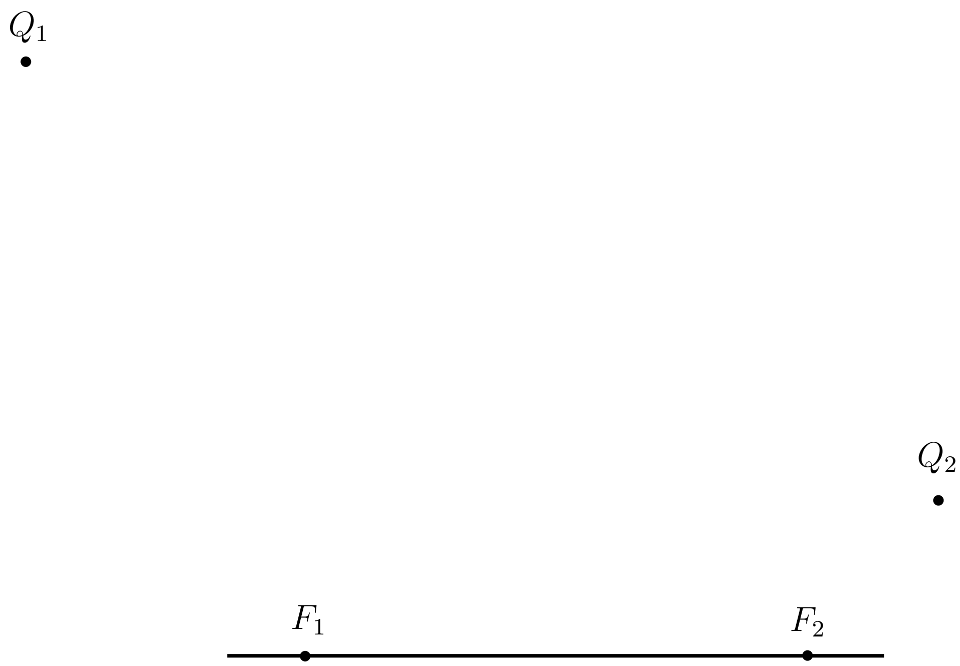
(A) 2. (B) 4. (C) 5. (D) 1. (E) 3.



ITA 1979, Questão 12.

Questão 13: Dados o eixo maior $\overline{AB}$ de uma elipse, os focos F_1 e F_2, bem como dois pontos Q_1 e Q_2, conforme a figura 5, pertencentes ao círculo diretor, determinar o ângulo formado por duas retas tangentes à elipse.

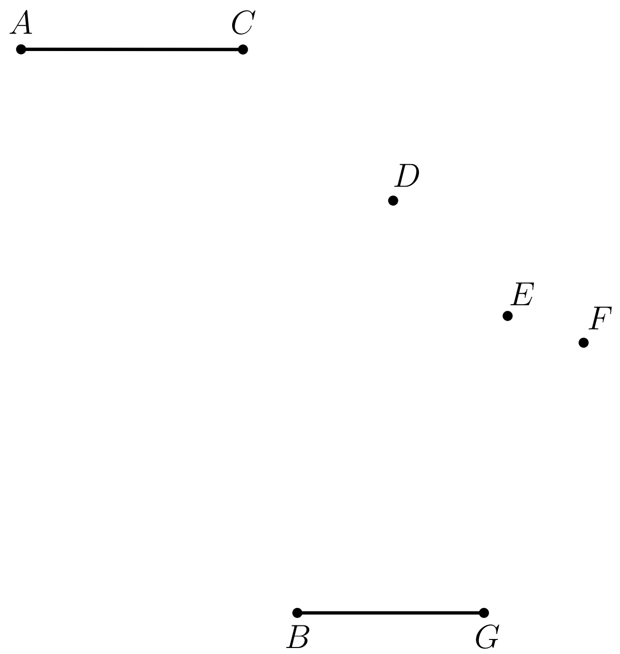
(A) 75°. (B) 90°. (C) 80°. (D) 85°. (E) 70°.



ITA 1979, Questão 13.

Questão 14: Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BG}$ são partes de um duto, representado por seu eixo e que, do ponto C ao ponto G, é encurvado em quatro arcos de circunferência que concordam nos pontos C, D, E, F e G, conforme a figura a seguir. Pede-se o comprimento do duto, no desenho na escala 1:$2{,}5$.

(A) 430 mm. (B) 380 mm. (C) 530 mm. (D) 330 mm. (E) 480 mm.



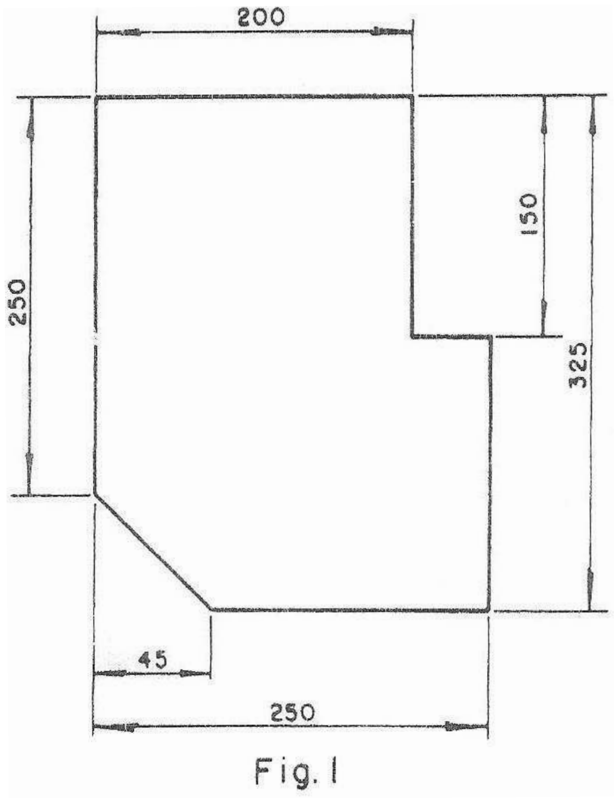
ITA 1979, Questão 14.

Questão 15: Determinar a soma dos raios de duas circunferências inscritas num triângulo ABC, tangentes aos lados deste e entre elas, sendo dado o ângulo $\hat{A} = 35^{\circ}$, a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, igual a 96 mm, e a mediana relativa ao lado $\overline{AC}$, igual a 60 mm.

(A) 45 mm. (B) 39 mm. (C) 28 mm. (D) 34 mm. (E) 40 mm.

II.14 Vestibular de 1976

Questão 01: Dizer em que escala foi desenhada a vista da Fig. 1.
(A) 1:1. (B) 2:1. (C) 5:1. (D) 1:5. (E) N.D.R.A.



ITA 1976, Questão 01.

Questão 02: Dada a vista de uma peça (Fig. 2), determinar o número de cotas que faltam para ser confeccionada a peça. (A espessura da chapa é considerada dada)

(A) 1. (B) 5. (C) 3. (D) 4. (E) N.D.R.A.

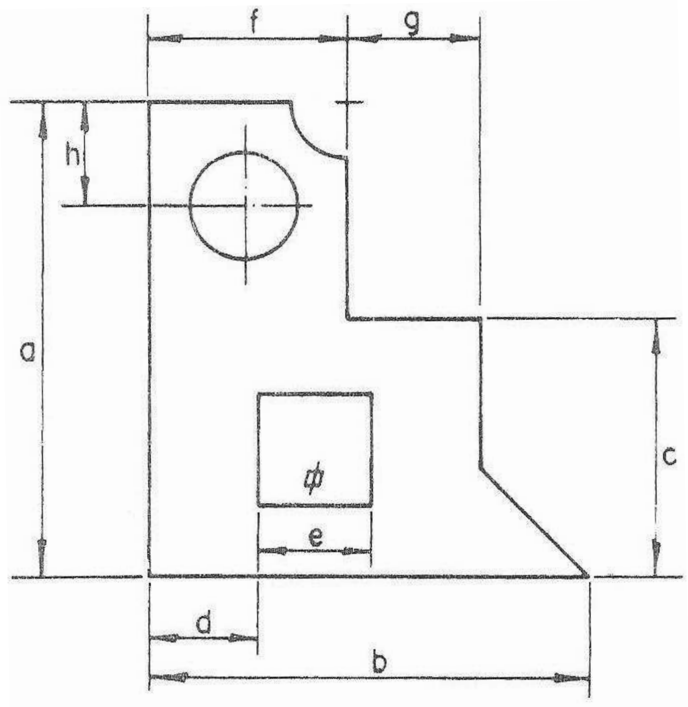


Fig. 2

ITA 1976, Questão 02.

Questão 03: São dados quatro (4) pontos P, Q, M, N. Pede-se determinar a diagonal de um quadrado que tenha seus lados passando por P, Q, M, N. (Cada lado contém somente um ponto)

(A) 160 mm. (B) 50 mm. (C) 65 mm. (D) 56 mm. (E) N.D.R.A.

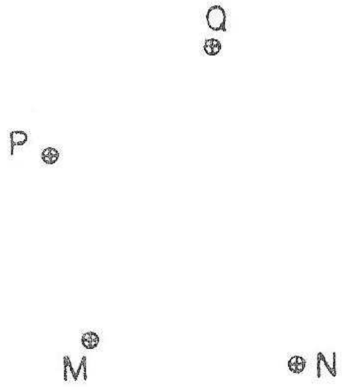


Fig. 3

ITA 1976, Questão 03.

Questão 04: Dada a perspectiva de um cubo de aresta a (Fig. 4), dizer em que perspectiva foi desenhada.

(A) Dimétrica. (B) Isométrica. (C) Paralela. (D) Gabinete. (E) N.D.R.A.

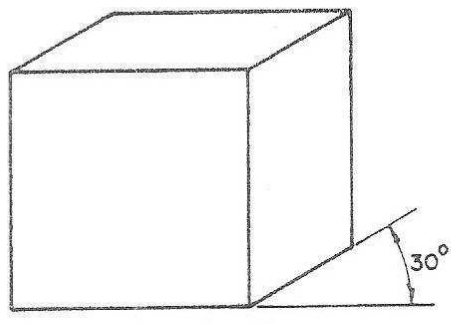


Fig. 4

ITA 1976, Questão 04.

Questão 05: Dado o apótema de um pentágono regular, igual a 20 mm, determinar a hipotenusa de um triângulo com área igual à do pentágono dado, sabendo-se que a altura do triângulo é de 38 mm.

(A) 85 mm. (B) 95 mm. (C) 80 mm. (D) 76 mm. (E) N.D.R.A.

Questão 06: Dados uma circunferência de raio igual a 20 mm, um ponto P na mesma e uma reta r, conforme Fig. 6, a circunferência rola sem escorregar sobre a reta, partindo do ponto P. Determinar a curva cíclica.

(A) 4,3,2,1. (B) 5,6,7,8. (C) 1,2,3,4. (D) 8,7,6,5. (E) N.D.R.A.

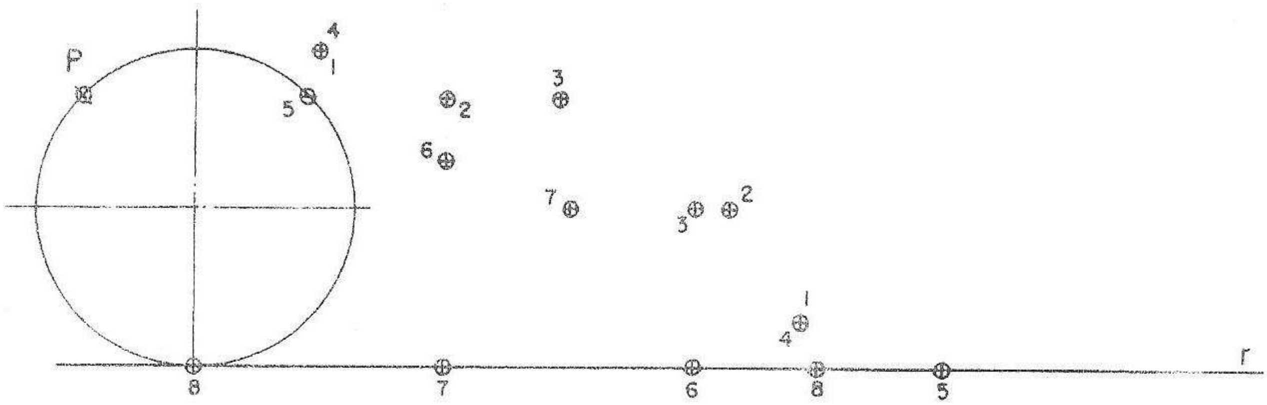


Fig. 6

ITA 1976, Questão 06.

Questão 07: Dados: o eixo xy, o vértice V e um ponto P de uma parábola (Fig. 7), calcular aproximadamente a área entre o ramo superior da parábola, o eixo xy e uma reta que passa por P e é perpendicular ao eixo xy.

(A) 1100 mm^2. (B) 1925 mm^2. (C) 962 mm^2. (D) 1165 mm^2. (E) N.D.R.A.

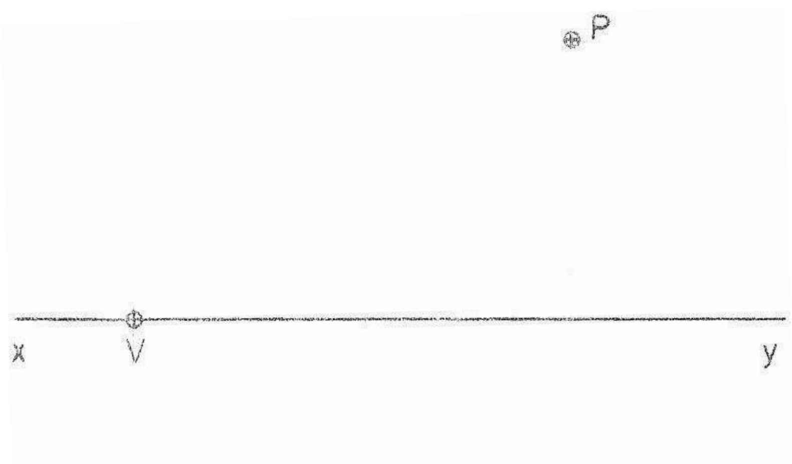
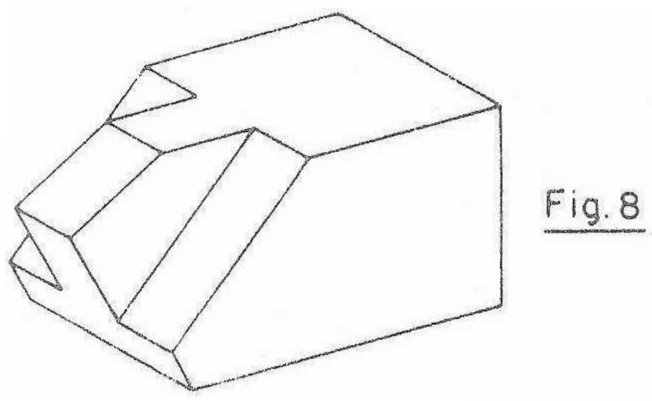


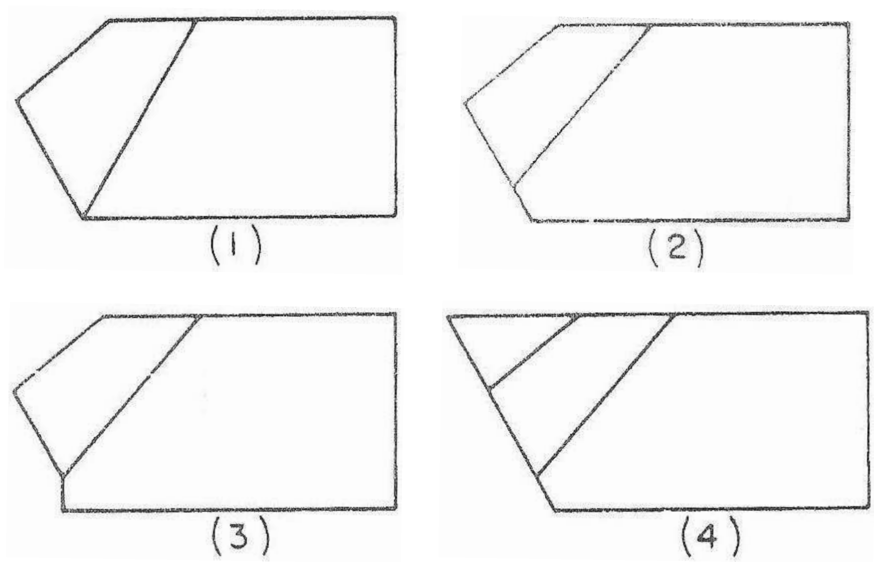
Fig. 7

ITA 1976, Questão 07.

Questão 08: Dada a perspectiva da Fig. 8, determinar a elevação correspondente ao primeiro diedro.
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) N.D.R.A.



ITA 1976, Questão 08.



Questão 09: Dada uma pirâmide de base quadrada e interceptada por um plano, conforme Fig. 9, determinar a figura da interseção.

(A) Quadrado. (B) Triângulo. (C) Retângulo. (D) Trapézio. (E) N.D.R.A.

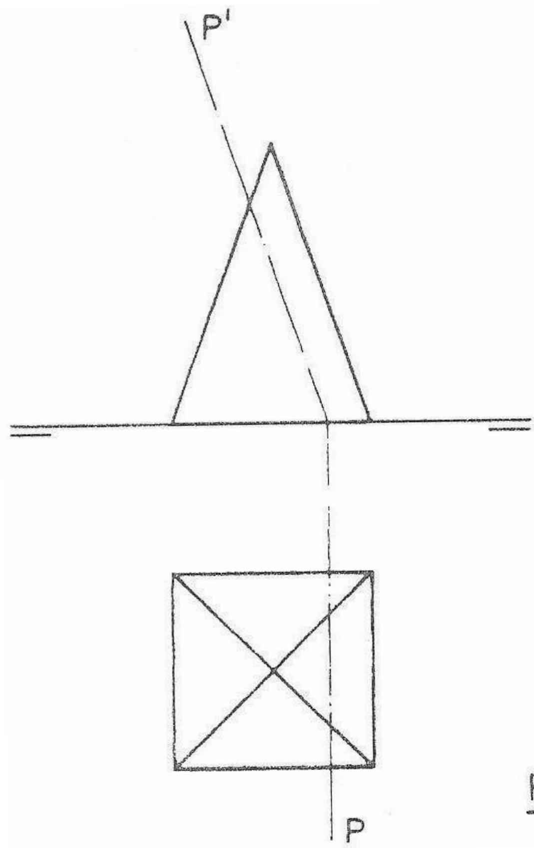
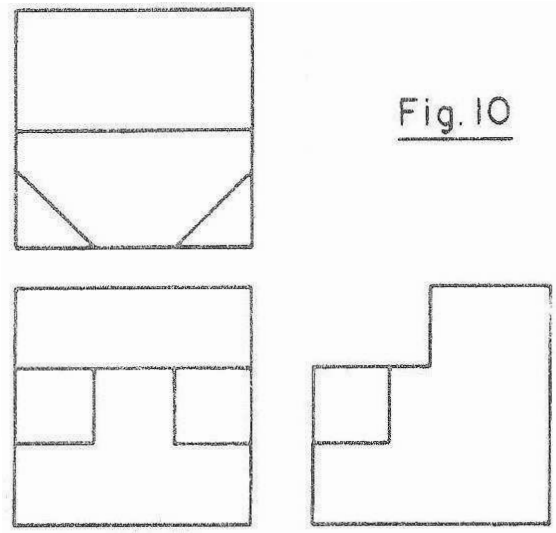


Fig. 9

ITA 1976, Questão 09.

Questão 10: Dadas as projeções ortogonais da Fig. 10, determinar em qual dos diedros foi desenhada a peça.

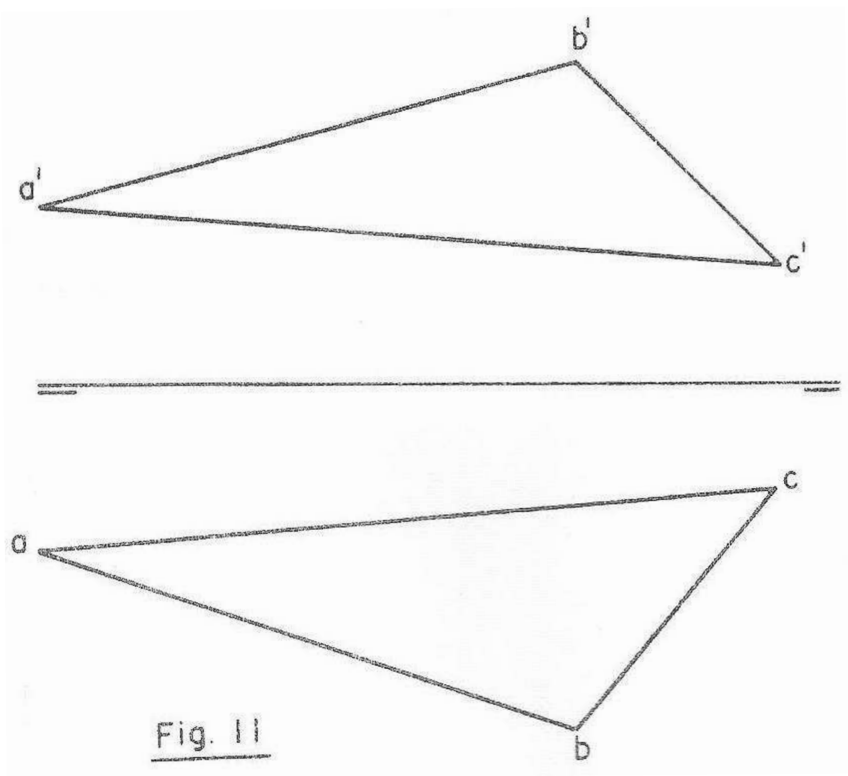
(A) 2$^{\text{o}}$. (B) 3$^{\text{o}}$. (C) 1$^{\text{o}}$. (D) 4$^{\text{o}}$. (E) N.D.R.A.



ITA 1976, Questão 10.

Questão 11: Dadas a projeção vertical e a projeção horizontal de um triângulo (Fig. 11), achar o valor de sua altura em relação a AC.

(A) 30 mm. (B) 32 mm. (C) 34 mm. (D) 36 mm. (E) N.D.R.A.



ITA 1976, Questão 11.

Questão 12: Dados os focos de uma elipse regular e um ponto pertencente à mesma (Fig. 12), achar o valor de seu eixo menor.

(A) 70 mm. (B) 72 mm. (C) 74 mm. (D) 76 mm. (E) N.D.R.A.

Fig. 12

ITA 1976, Questão 12.

Questão 13: Dado um heptágono regular de lado igual a 20 mm (Fig. 13), achar o comprimento retificado de uma circunferência de círculo cuja área seja igual à do heptágono dado.

(A) 130 mm. (B) 135 mm. (C) 140 mm. (D) 145 mm. (E) N.D.R.A.

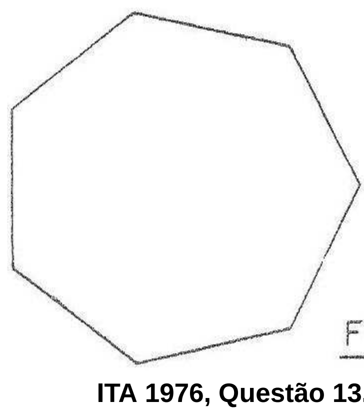


Fig. 13

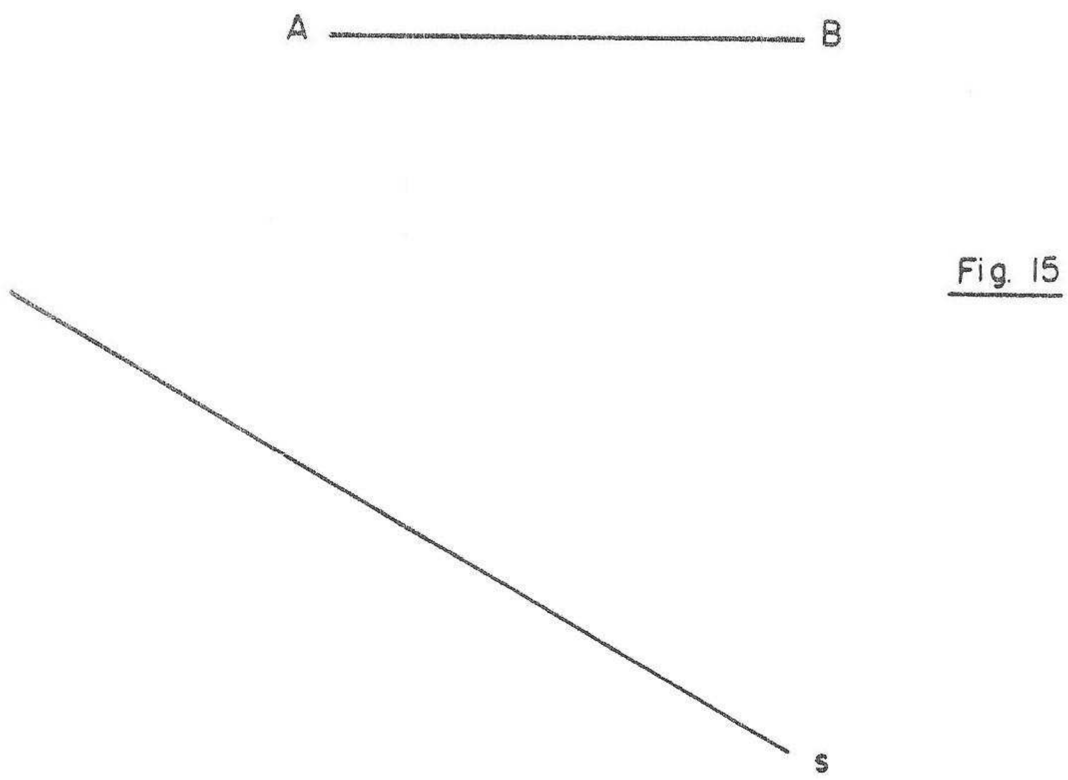
ITA 1976, Questão 13.

Questão 14: Tendo-se duas polias com seus centros distanciados de 10 m, sendo o raio da maior igual a 4 m e o raio da menor igual a 1 m, qual deve ser o comprimento de correia necessário para interligar as polias?

(A) 36 m. (B) 36.5 m. (C) 37 m. (D) 37.5 m. (E) N.D.R.A.

Questão 15: Dada a corda AB de uma circunferência e uma reta s tangente à mesma (Fig. 15), qual o valor de se diâmetro?

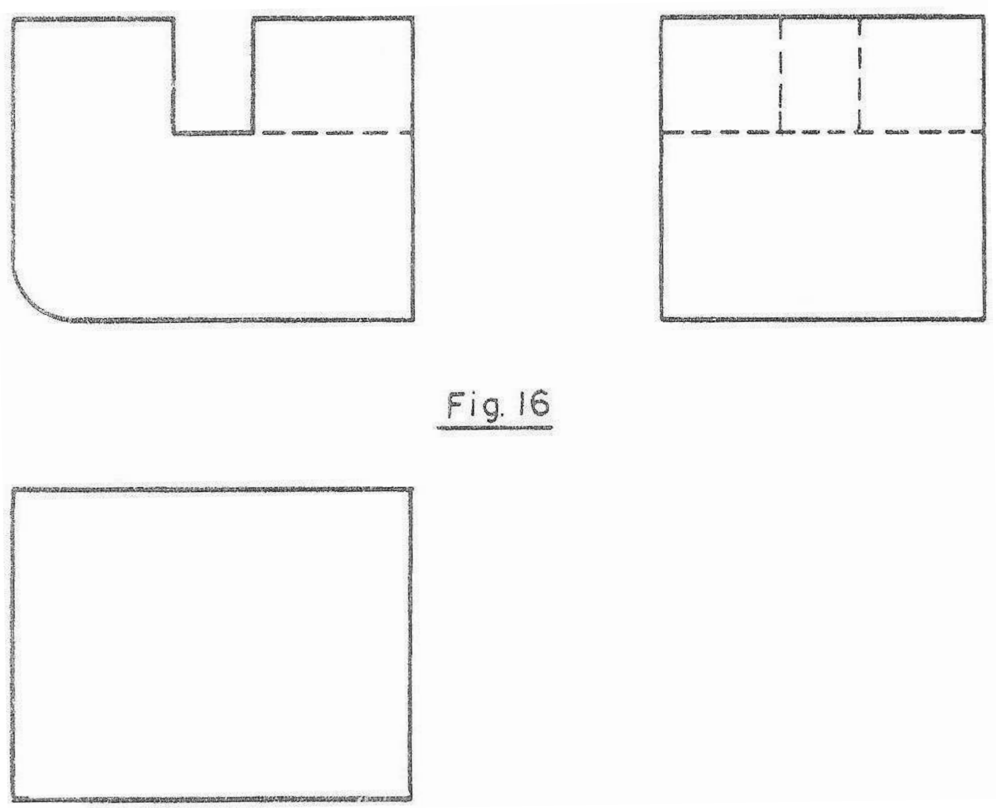
(A) 70 mm. (B) 75 mm. (C) 80 mm. (D) 85 mm. (E) N.D.R.A.



ITA 1976, Questão 15.

Questão 16: Dadas as projeções ortogonais no primeiro diedro (Fig. 16), quantas linhas faltam para completar a planta?

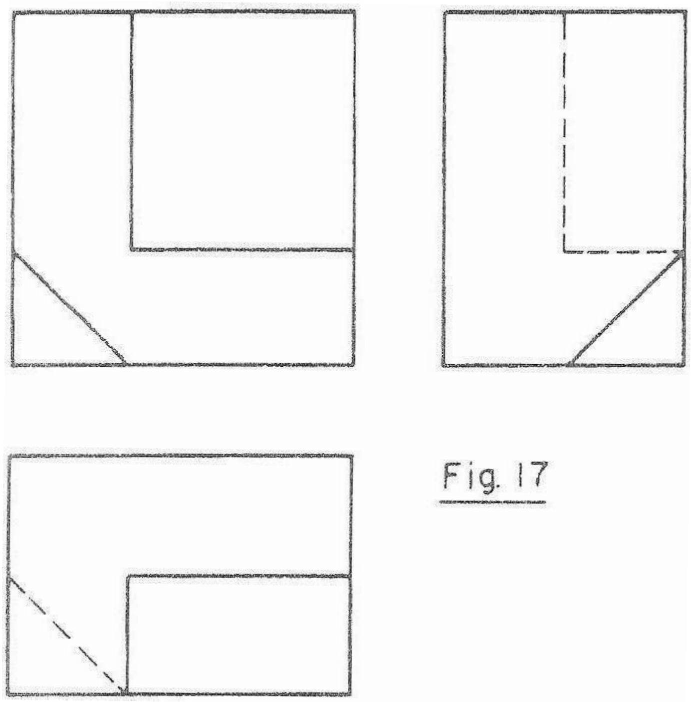
(A) 1. (B) 3. (C) 5. (D) 7. (E) N.D.R.A.



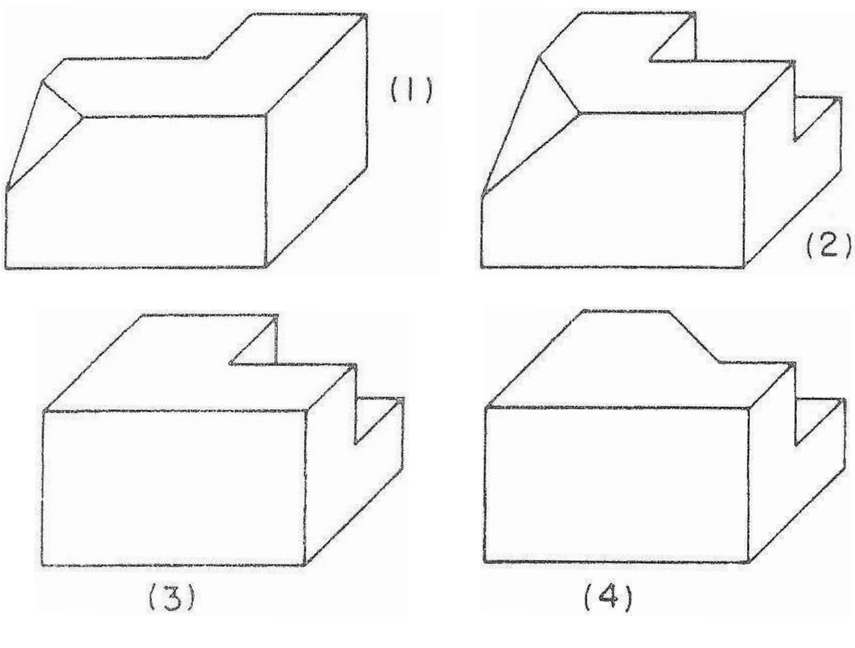
ITA 1976, Questão 16.

Questão 17: Dadas as projeções ortogonais no primeiro diedro (Fig. 17), qual das perspectivas corresponde às vistas dadas?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) N.D.R.A.

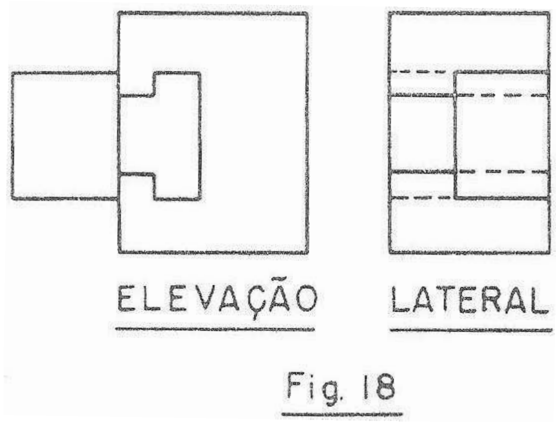


ITA 1976, Questão 11.

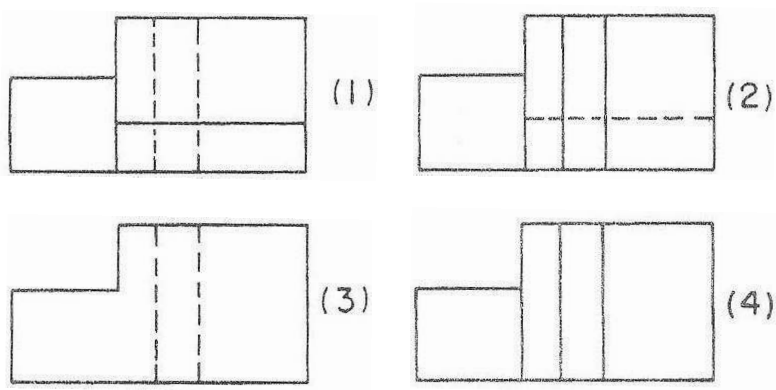


Questão 18: Dadas as projeções ortogonais, no primeiro diedro, da elevação e da vista lateral (Fig. 18), achar a vista de planta correspondente.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) N.D.R.A.

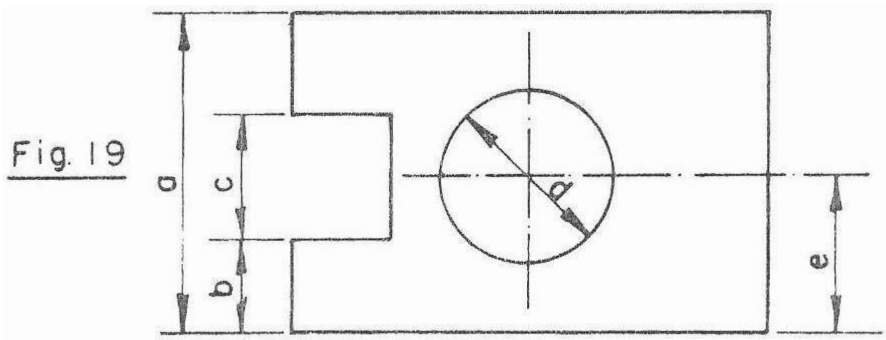


ITA 1976, Questão 18.



Questão 19: Sendo dados a, b, c, d, e, quantas cotas faltam para completar a vista da Fig. 19?

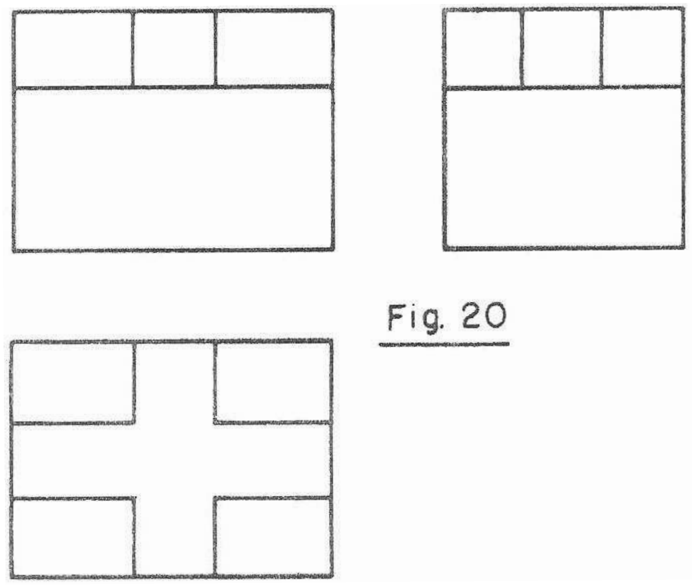
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) N.D.R.A.



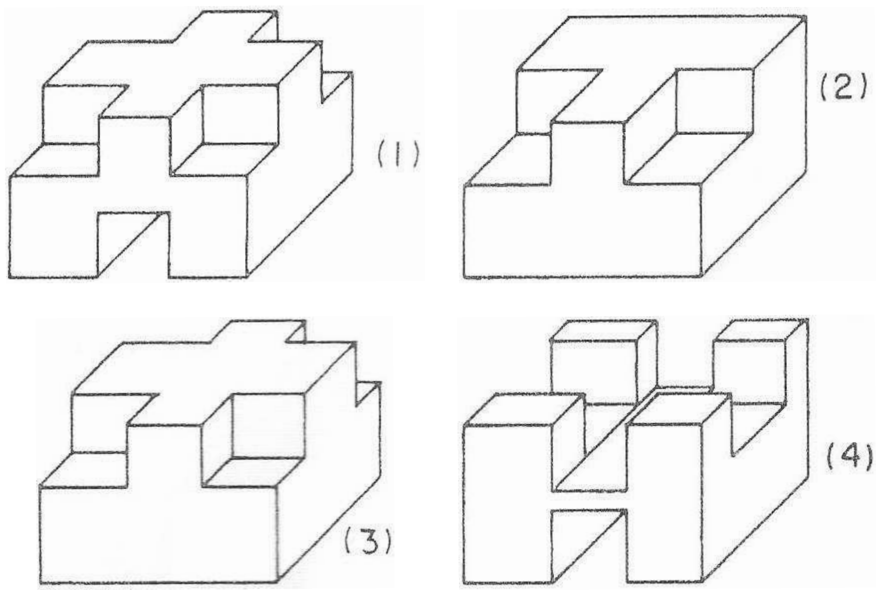
ITA 1976, Questão 19.

Questão 20: Dadas as projeções ortogonais no primeiro diedro (Fig. 20), qual das perspectivas melhor as representa?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) N.D.R.A.



ITA 1976, Questão 20.



Questão 21: Dadas duas vistas ortogonais, no primeiro diedro, de uma peça desenhada em escala 1:5 (Fig. 21), achar o volume do furo de forma trapezoidal interno da peça.

(A) 19370 mm^3. (B) 1937 mm^3. (C) 9685 mm^3. (D) 119370 mm^3. (E) N.D.R.A.

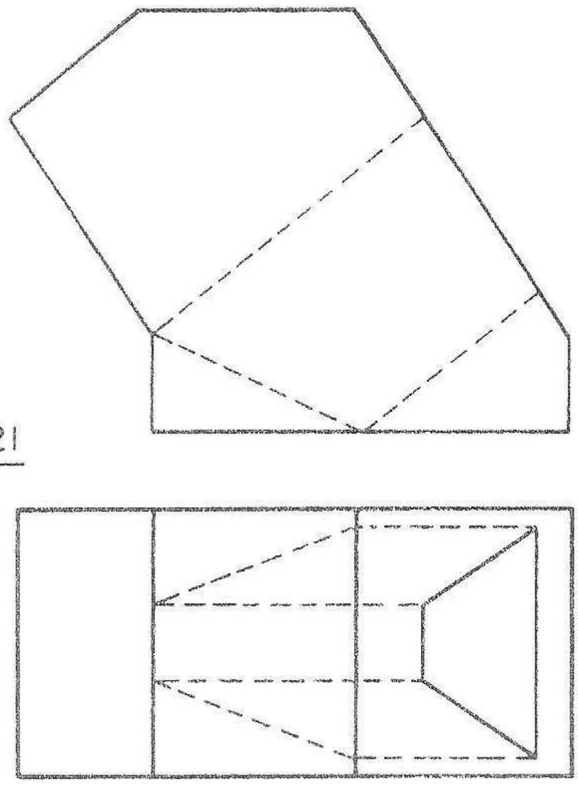


Fig. 21

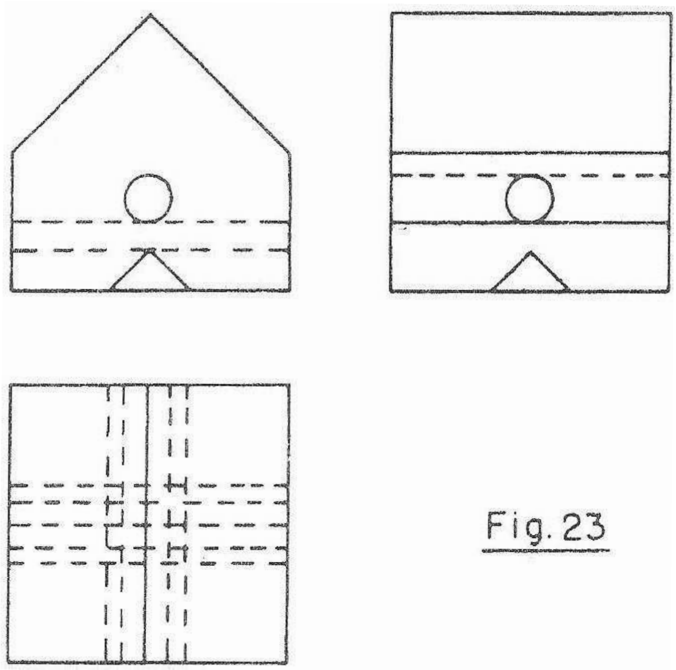
ITA 1976, Questão 21.

Questão 22: Tendo–se uma mesa de bilhar com 2,00 metros de comprimento]e 1,00 metro de largura, e uma bola bem no centro, qual deve ser o ângulo de uma tacada em relação à largura para que a bola ricocheteie quatro vezes antes de cair na caçapa?

(A) 80°. (B) 10°. (C) 12°. (D) 78°. (E) N.D.R.A.

Questão 23: Dadas as projeções no primeiro diedro (Fig. 22), quantos erros de linhas existem na elevação e na vista lateral?

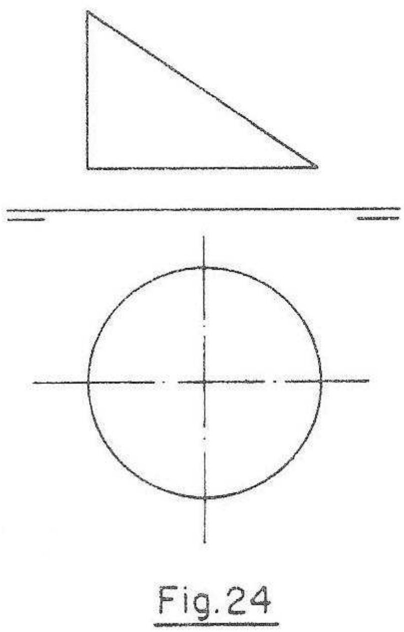
(A) 5. (B) 2. (C) 7. (D) 3. (E) N.D.R.A.



ITA 1976, Questão 23.

Questão 24: Planificar o tubo de parece fina (Fig. 24) e determinar a área aproximada da superfície planificada.

(A) 410 mm^2. (B) 205 mm^2. (C) 1840 mm^2. (D) 920 mm^2. (E) N.D.R.A.



ITA 1976, Questão 24.

Questão 25: As plantas A, B, C, D são projeções ortogonais, no plano horizontal, de telhados cujas perspectivas estão dadas em (1), (2), (3), (4). Dizer qual a sequência que dá a concordância correta das plantas com as perspectivas.

(A) A(1), B(2), C(3), D(4). (B) A(1), D(4), A(1), C(4). (C) B(3), D(2), A(1), C(4).
(D) A(4), B(3), C(1), D(2). (E) N.D.R.A.

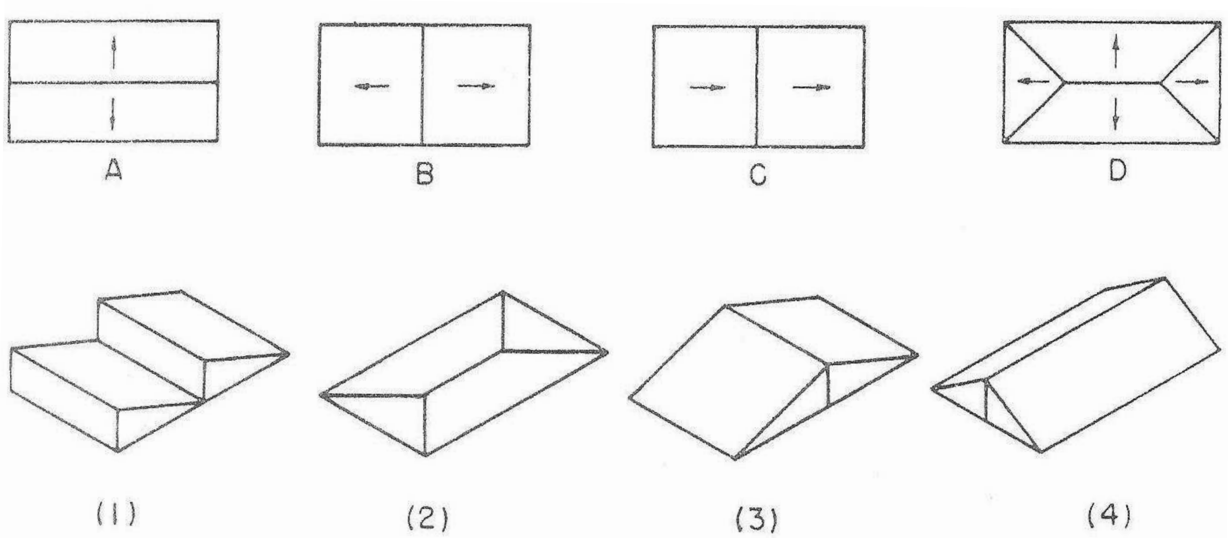


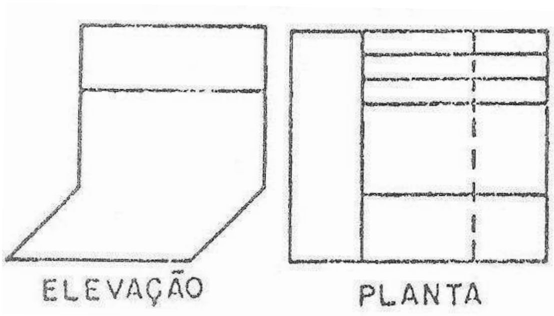
Fig. 25

ITA 1976, Questão 25.

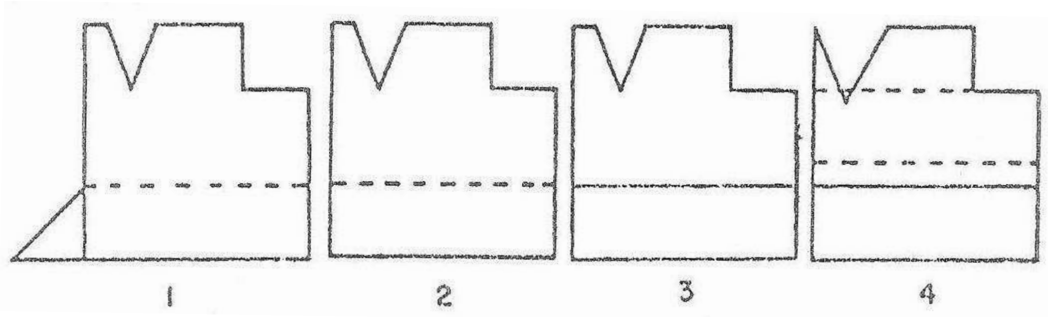
II.15 Vestibular de 1975

Questão 01: Dadas as planta e elevação no primeiro diedro, determinar a vista lateral esquerda correspondente.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) Nenhuma.

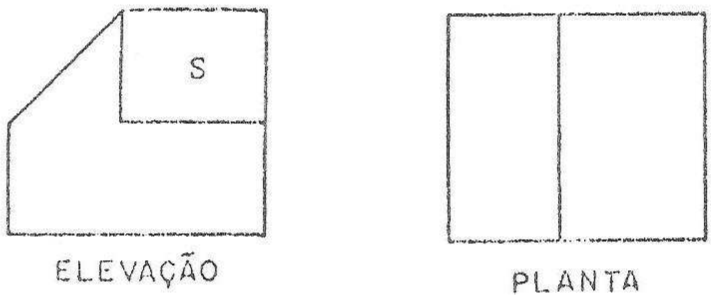


ITA 1975, Questão 01.



Questão 02: Determinar a área da superfície S, dadas as planta e elevação, no primeiro diedro.

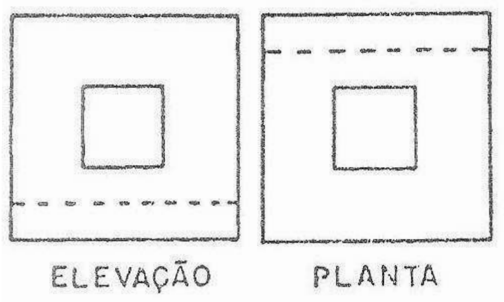
(A) 620 mm^2. (B) 504 mm^2. (C) 334 mm^2. (D) 558 mm^2. (E) 420 mm^2.



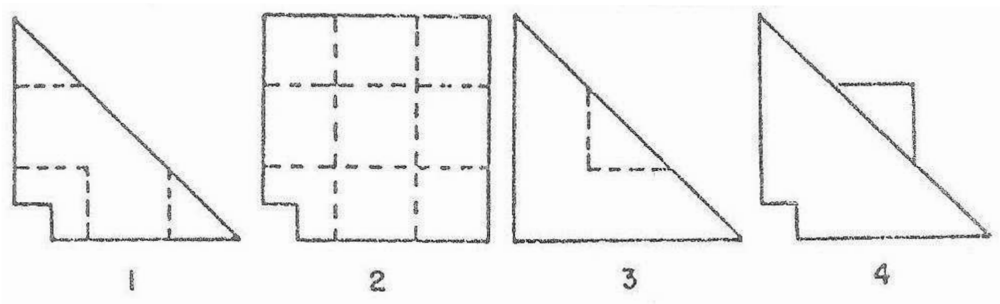
ITA 1975, Questão 02.

Questão 03: Dadas as projeções ortogonais no primeiro diedro, planta e elevação, determinar a vista lateral correspondente.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) Nenhuma.

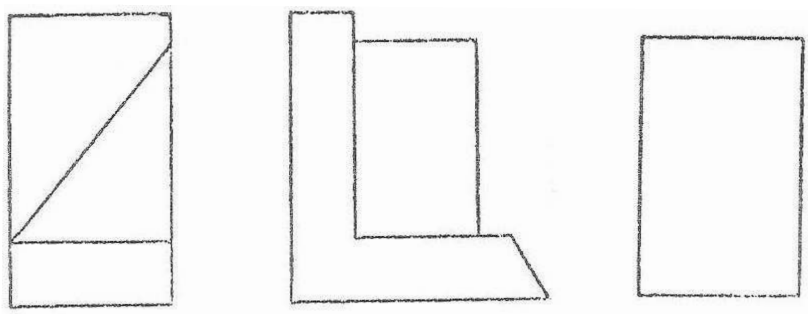


ITA 1975, Questão 03.



Questão 04: Dadas as projeções no primeiro diedro, quantas linhas faltam para completar a planta?

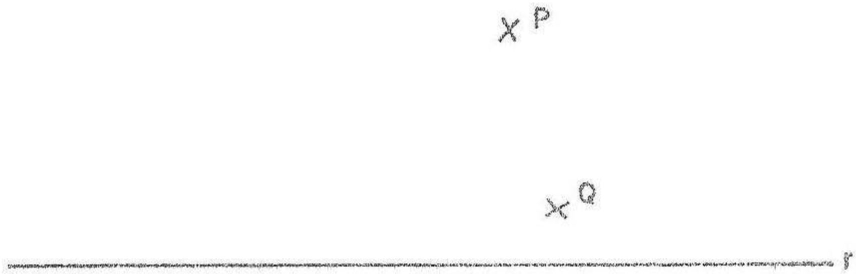
(A) 3 linhas. (B) 4 linhas. (C) 6 linhas. (D) 7 linhas. (E) Nenhuma.



ITA 1975, Questão 04.

Questão 05: Dados r, P e Q, achar o raio da <u>m</u>enor circunferência que passa pelos dois pontos e tangencia a reta r.

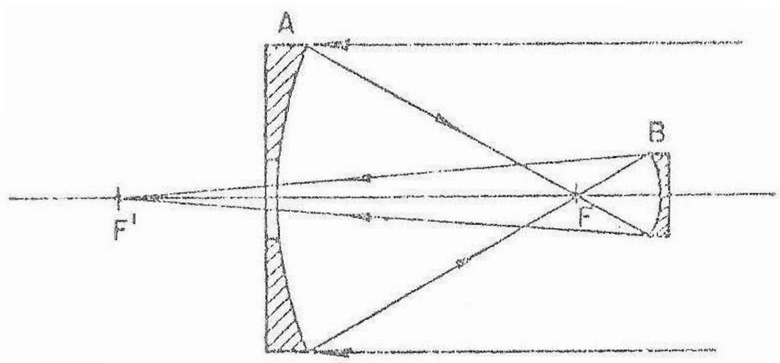
(A) 20 mm. (B) 18 mm. (C) 22 mm. (D) 15 mm. (E) 13 mm.



ITA 1975, Questão 05.

Questão 06: Um espelho parabólico A recebe um feixe de raios paralelos. Além de seu plano focal F, estes são interceptados por um espelho côncavo B, como mostra a figura, de forma que todos os raios emergentes de B concorrem num só ponto F'. Determinar o perfil de concavidade deste segundo espelho.

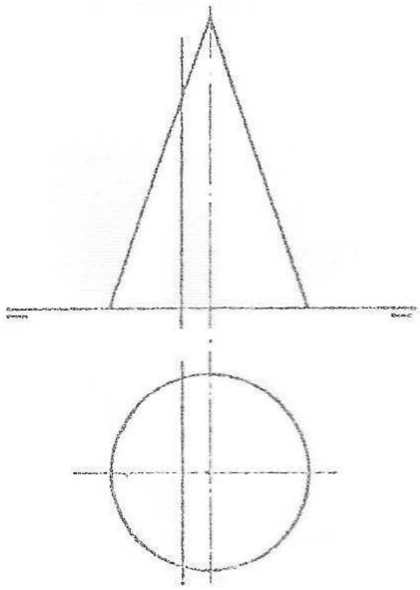
(A) Parábola. (B) Elipse. (C) Triângulo. (D) Hipérbole. (E) Nenhuma.



ITA 1975, Questão 06.

Questão 07: Um cone de base circular é interceptado por um plano conforme a figura. Determinar a forma da curva resultante da interseção.

(A) Círculo. (B) Elipse. (C) Triângulo. (D) Hipérbole. (E) Nenhuma.



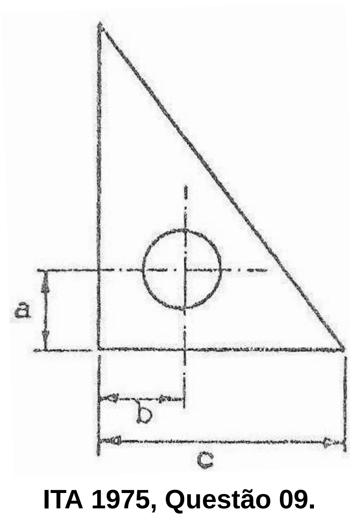
ITA 1975, Questão 07.

Questão 08: Determinar a área verdadeira aproximada da superfície limitada pela curva da questão anterior.

(A) 484 mm^2. (B) 500 mm^2. (C) 299 mm^2. (D) 300 mm^2. (E) 360 mm^2.

Questão 09: Foi dada a um mecânico uma chapa de certa espessura para confecção da peça abaixo (ver figura). Conservando a espessura da chapa, quantas cotas faltam no desenho para que ele confeccione a mesma? (a, b e c são dados.)

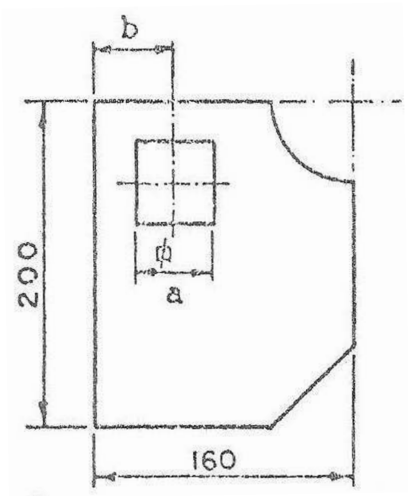
(A) 4 cotas. (B) 3 cotas. (C) 2 cotas. (D) 1 cota. (E) Nenhuma.



ITA 1975, Questão 09.

Questão 10: Em que escala foi desenhada a figura?

(A) 1:1 (B) 1:2 (C) 2:1 (D) 5:1 (E) 1:5



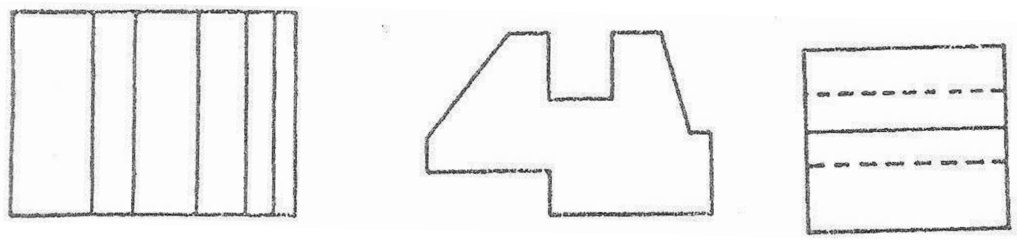
ITA 1975, Questão 10.

Questão 11: Na figura plana da questão anterior, sendo dados a e b, quantas cotas faltam para completar o desenho?

(A) 1 cota. (B) 2 cotas. (C) 3 cotas. (D) 4 cotas. (E) 5 cotas.

Questão 12: Dadas as projeções ortogonais da figura, determinar em qual dos diedros foi desenhada a peça.

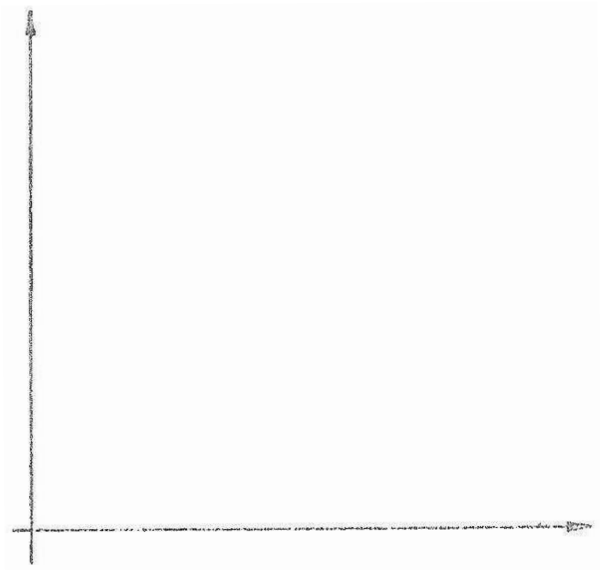
(A) 1^o diedro. (B) 2^o diedro. (C) 3^o diedro. (D) 4^o diedro. (E) Nenhuma.



ITA 1975, Questão 12.

Questão 13: Desenhar a curva $y = 0{,}2x^2$ para valores $x = 0$ até $x = 5$ cm (escala 1:1). Calcular a área aproximada entre a curva e o eixo dos x.

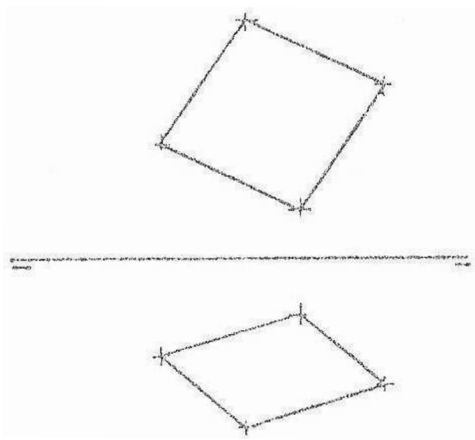
(A) 1000 mm^2. (B) 830 mm^2. (C) 750 mm^2. (D) 900 mm^2. (E) 1200 mm^2.



ITA 1975, Questão 13.

Questão 14: Dadas as projeções ortogonais de uma superfície retangular, determinar a área aproximada desta superfície.

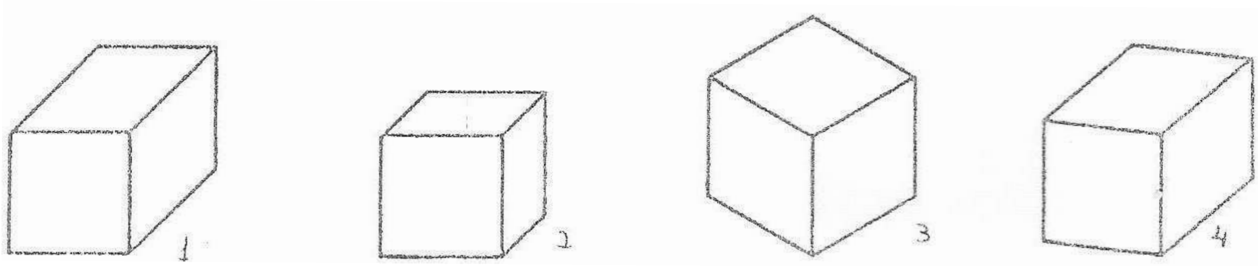
(A) 500 mm^2. (B) 300 mm^2. (C) 320 mm^2. (D) 480 mm^2. (E) 400 mm^2.



ITA 1975, Questão 14.

Questão 15: Dadas as perspectivas de um cubo, dizer qual delas corresponde à perspectiva Gabinete.

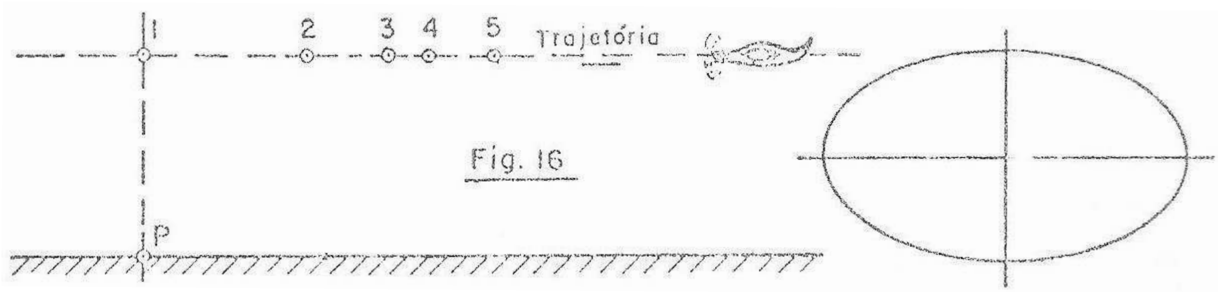
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) Nenhuma.



ITA 1975, Questão 15.

Questão 16: O ponto P é o centro de uma piscina de forma circular. Um avião voa em linha reta e passa pelo centro da piscina. Em que ponto da trajetória o pilôto vê a piscina proporcional à elipse dada?

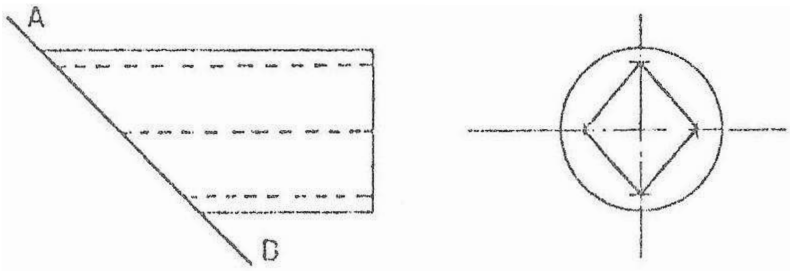
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.



ITA 1975, Questão 16.

Questão 17: Determinar a área do furo, dada pela interseção do plano AB.

(A) 157 mm^2. (B) 288 mm^2. (C) 196 mm^2. (D) 100 mm^2. (E) 280 mm^2.



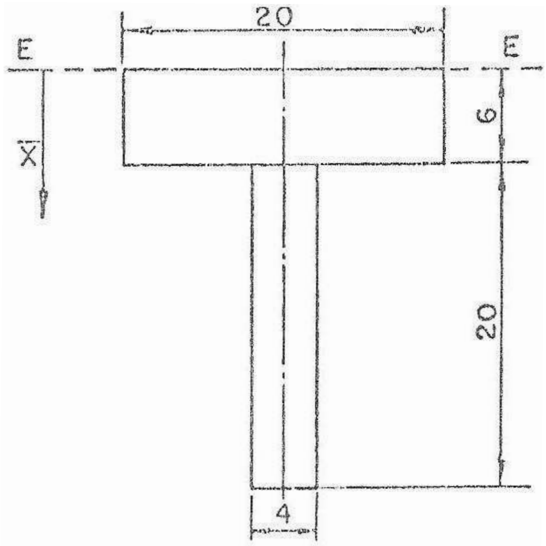
ITA 1975, Questão 17.

Questão 18: Uma esfera foi cortada pelo plano a. Sabendo-se que o diâmetro da superfície recortada mede 200 mm e a distância entre este plano e um outro plano b tangente à esfera e paralelo ao primeiro mede 40 mm. Pede-se o raio da esfera aproximado.

(A) $R = 130$ mm. (B) $R = 150$ mm. (C) $R = 100$ mm. (D) $R = 145$ mm. (E) $R = 132$ mm.

Questão 19: Determinar a distância X até o centro de gravidade G a partir do eixo EE.

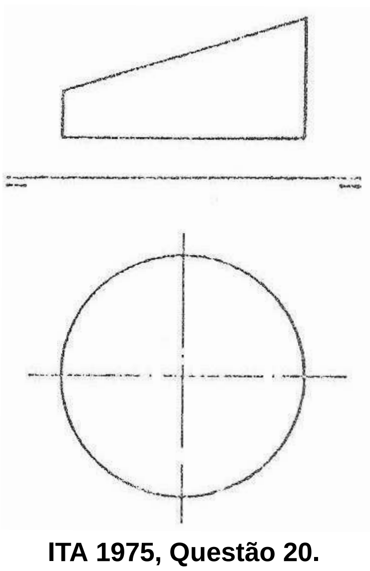
(A) 10 mm. (B) 8,2 mm. (C) 12 mm. (D) 9,2 mm. (E) 11 mm.



ITA 1975, Questão 19.

Questão 20: Planificar o tudo de parede fina e determinar a área aproximada da superfície planificada.

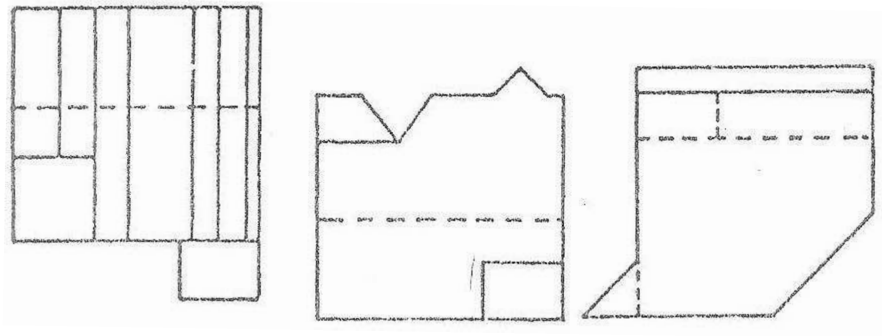
(A) 989 mm^2. (B) 1009 mm^2. (C) 806 mm^2. (D) 603 mm^2. (E) 900 mm^2.



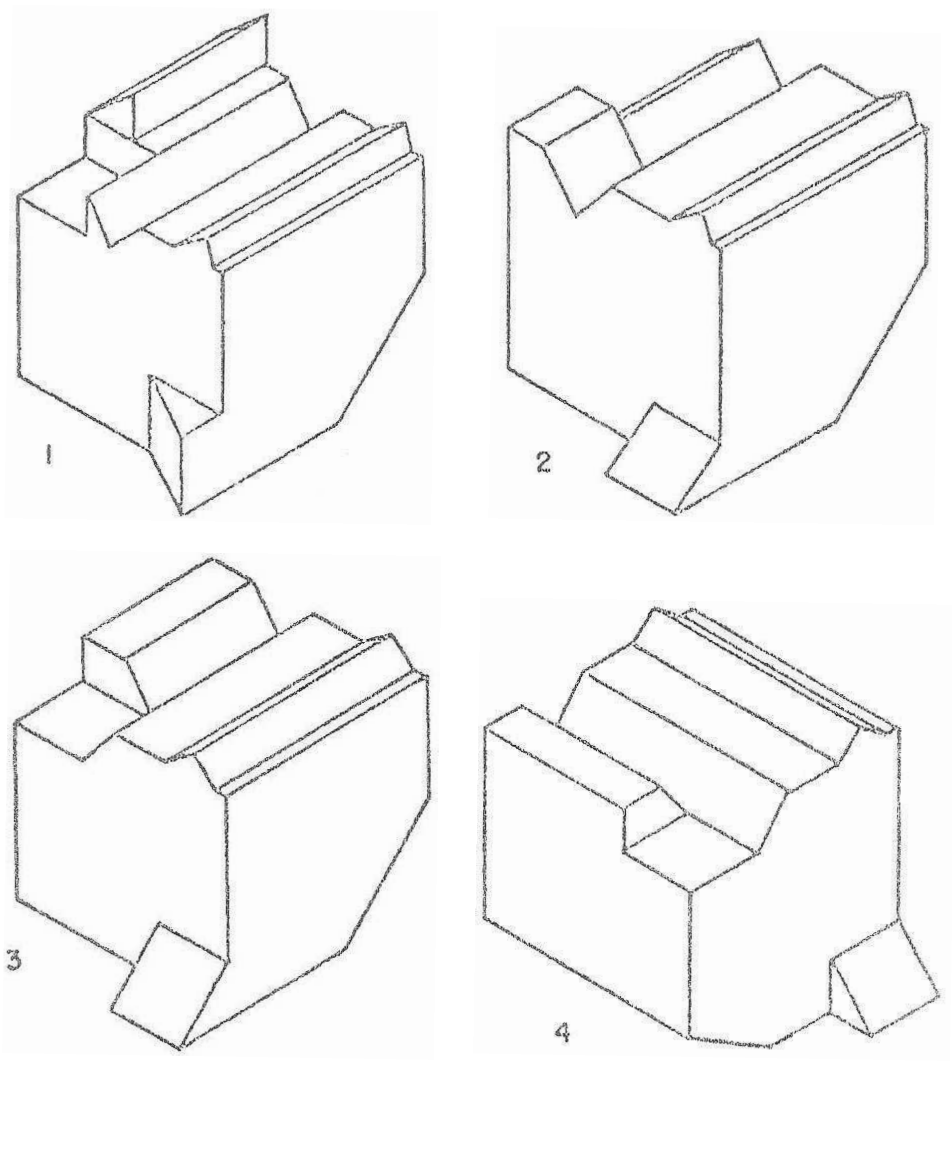
ITA 1975, Questão 20.

Questão 21: Dadas as projeções x, y, z de uma peça no terceiro diedro, indicar a perspectiva que melhor a representa.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) Nenhuma.

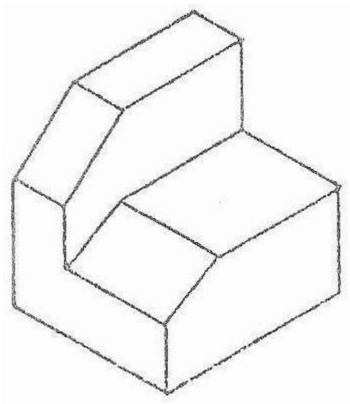


ITA 1975, Questão 21.

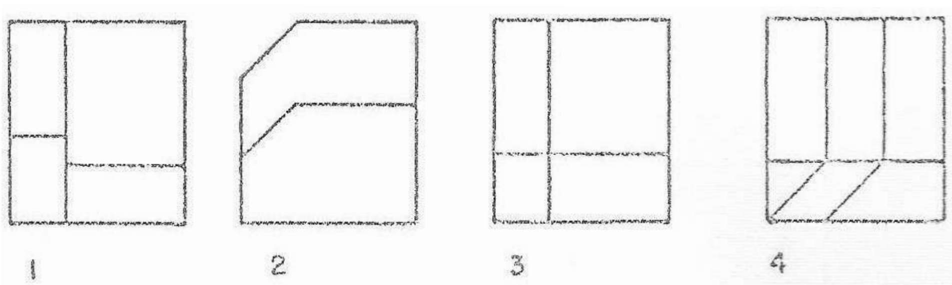


Questão 22: Dada a perspectiva de uma peça no primeiro diedro, indicar qual é a planta correspondente.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) Nenhuma.

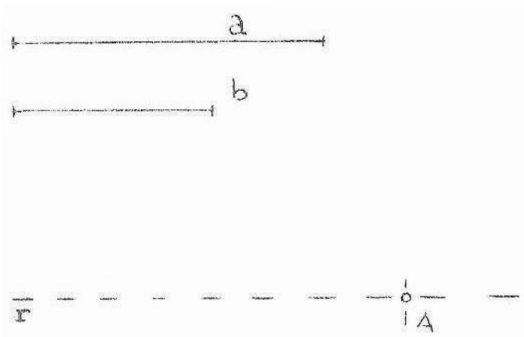


ITA 1975, Questão 22.



Questão 23: Partindo-se do ponto A, no sentido anti-horário, medem-se o ângulo α_1 e a distância a, obtendo-se o ponto B; a seguir, o ângulo α_2 (externo) e o lado b, obtendo-se o ponto C; medindo-se agora o ângulo α_3, tem-se a interseção D com a reta r. Pede-se a distância $d = DA$.
$\alpha_1 = 120^o \quad \alpha_2 = 140^o \quad \alpha_3 = 60^o$

(A) 25 mm. (B) 5 mm. (C) 20 mm. (D) 15 mm. (E) 12 mm.



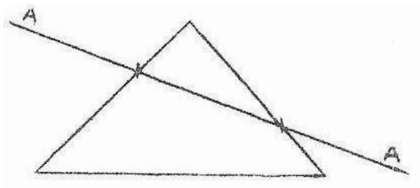
ITA 1975, Questão 23.

Questão 24: Qual é o ângulo α_4 da questão anterior? (Questão 23).

(A) 40$^{\text{o}}$. (B) 48$^{\text{o}}$. (C) 130$^{\text{o}}$. (D) 60$^{\text{o}}$. (E) 90$^{\text{o}}$.

Questão 25: Uma pirâmide de base triangular é recortada pelo plano $A - A$. Determinar a área verdadeira da seção hachurada.

(A) 130 mm^2. (B) 135 mm^2. (C) 120 mm^2. (D) 112 mm^2. (E) 100 mm^2.

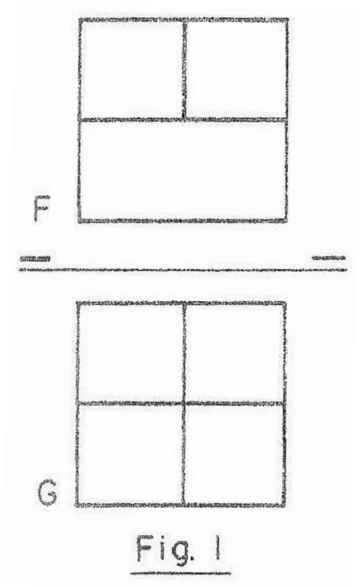


ITA 1975, Questão 25.

II.16 Vestibular de 1974

Questões 01 e 02: Dadas as duas projeções ortogonais FG e RS no primeiro diedro (Fig. 1 e Fig. 2), indicar a vista lateral correspondente.

Fig. 1:
(A) FG 1. (B) FG 2. (C) FG 3. (D) FG 4. (E) Nenhuma destas.



ITA 1974, Questão 01.

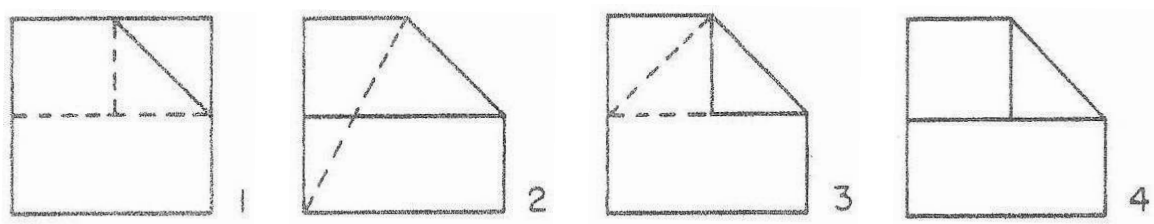
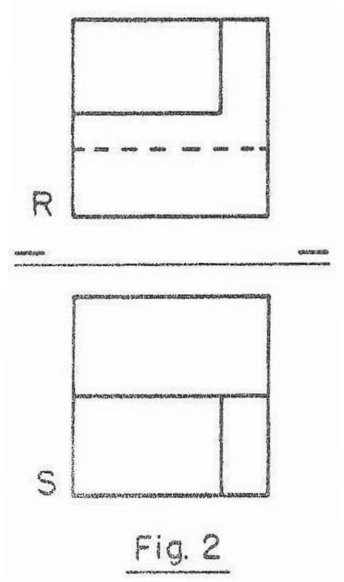
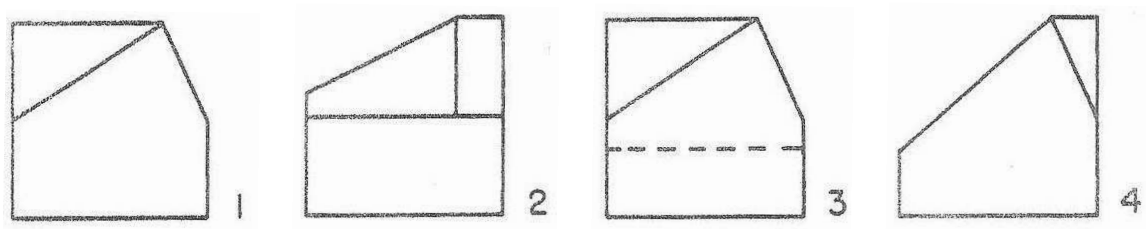


Fig. 2:
(A) RS 1. (B) RS 2. (C) RS 3. (D) RS 4. (E) Nenhuma destas.

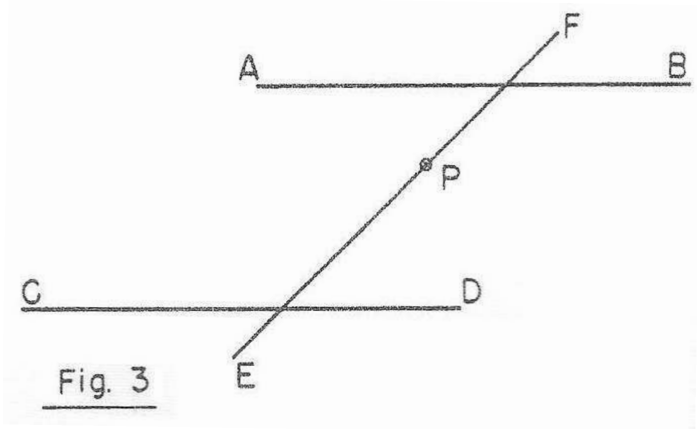


ITA 1974, Questão 02.



Questão 03: Traçar a curva reversa tangente às linhas AB e CD e a secante EF passando pelo ponto P. Determinar o comprimento do raio do arco de concordância maior. (Fig. 3)

(A) 54 mm. (B) 62 mm. (C) 70 mm. (D) 72 mm. (E) 76 mm.



ITA 1974, Questão 03.

Questão 04: Dadas as projeções ortogonais G e E no primeiro diedro, achar a vista lateral esquerda correspondente. (Fig. 4)

(A) GE 1. (B) GE 2. (C) GE 3. (D) GE 4. (E) Nenhuma destas.

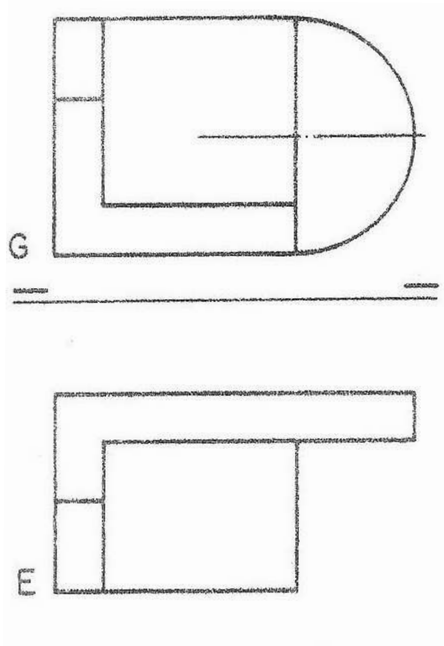
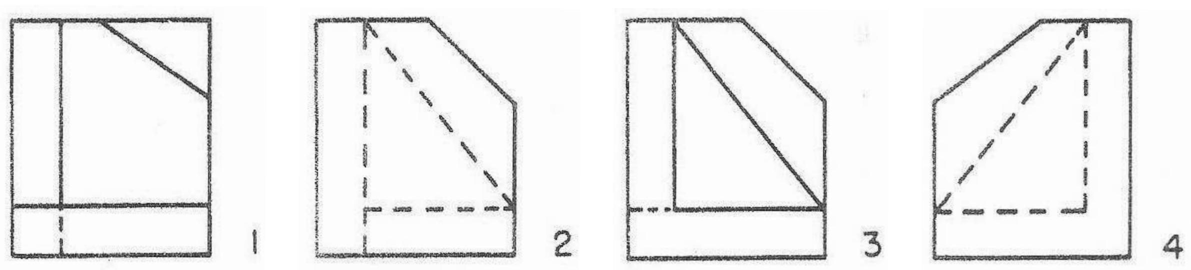


Fig. 4

ITA 1974, Questão 04.



Questão 05: Dadas a elevação K e a lateral L, no primeiro diedro, achar a planta correspondente. (Fig. 5)

(A) KL 1. (B) KL 2. (C) KL 3. (D) KL 4. (E) Nenhuma destas.

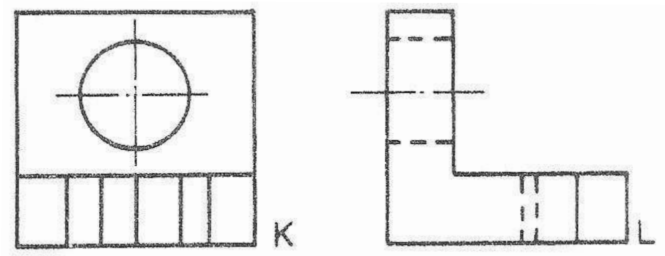
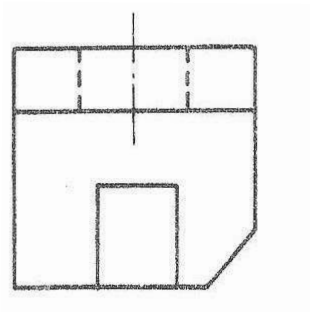
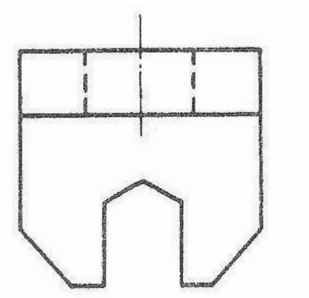


Fig. 5

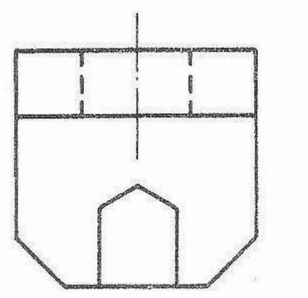
ITA 1974, Questão 05.



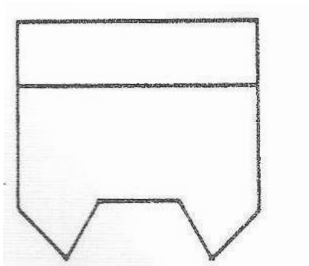
1



2



3



4

Questão 06: Dadas as projeções IJ no terceiro diedro, achar a vista lateral correspondente. (Fig. 6)
(A) IJ 1. (B) IJ 2. (C) IJ 3. (D) IJ 4. (E) IJ 5.

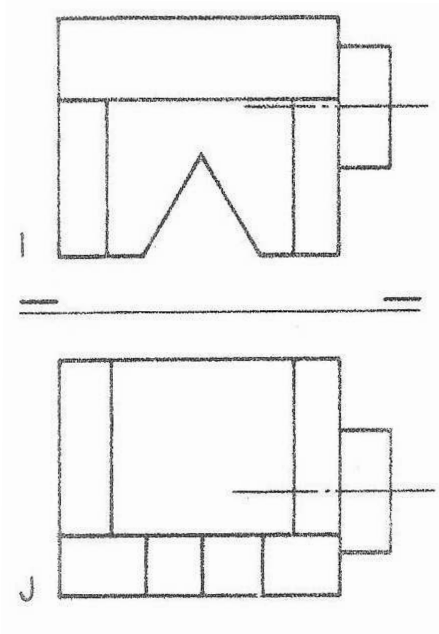
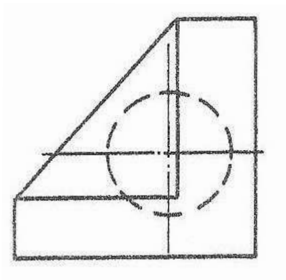
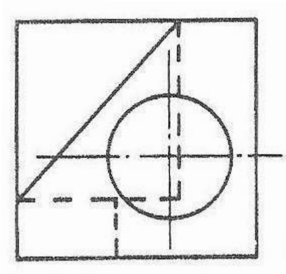
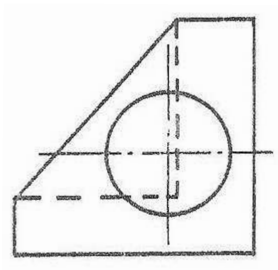


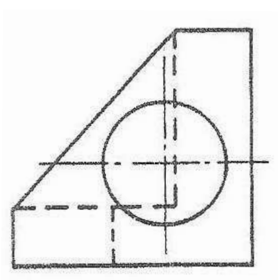
Fig. 6

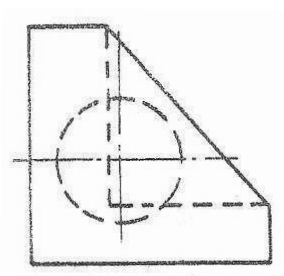
ITA 1974, Questão 06.


1


2

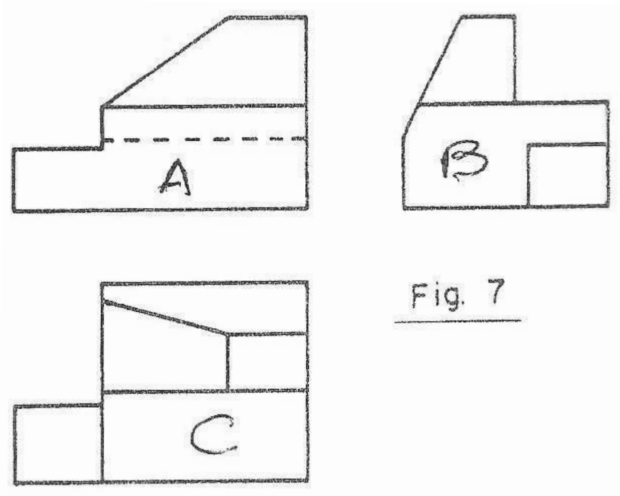

3


4

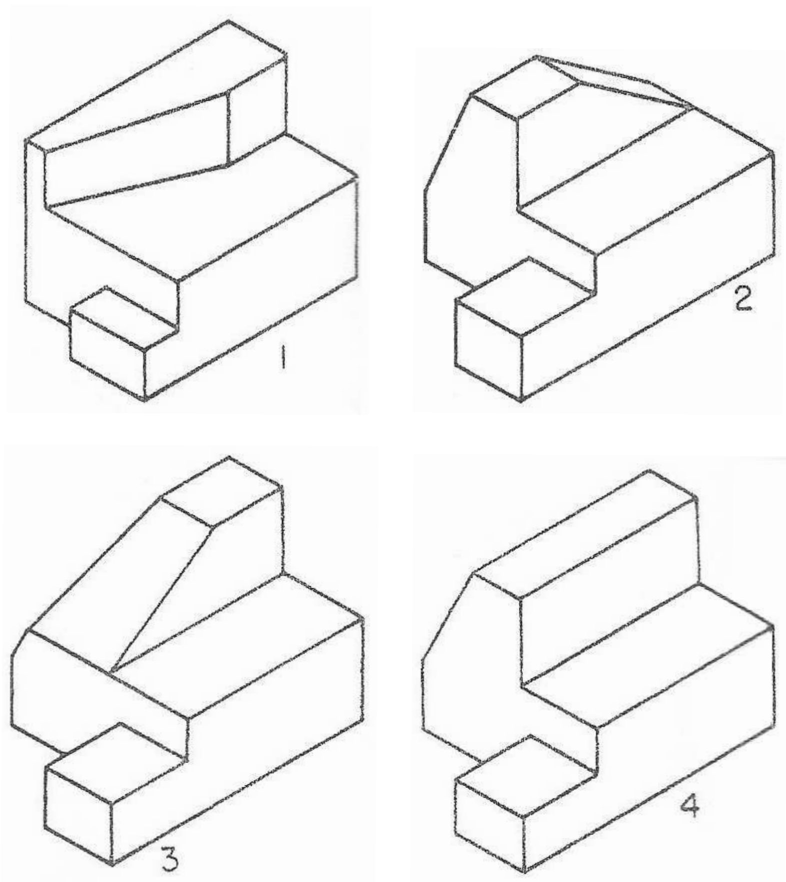

5

Questão 07: Dadas as projeções ortogonais ABC no primeiro diedro, indicar a perspectiva que melhor as representam.

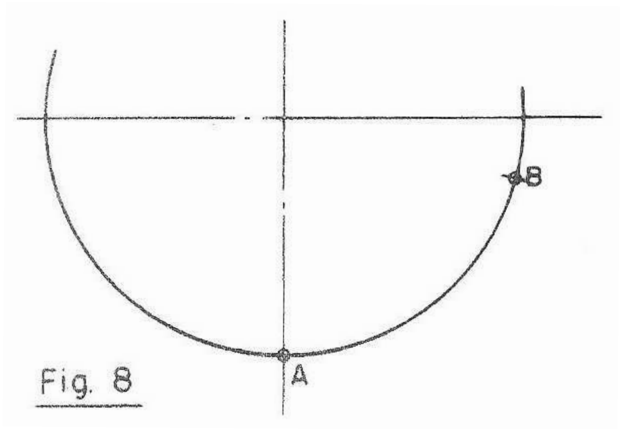
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) Nenhuma destas.



ITA 1974, Questão 07.

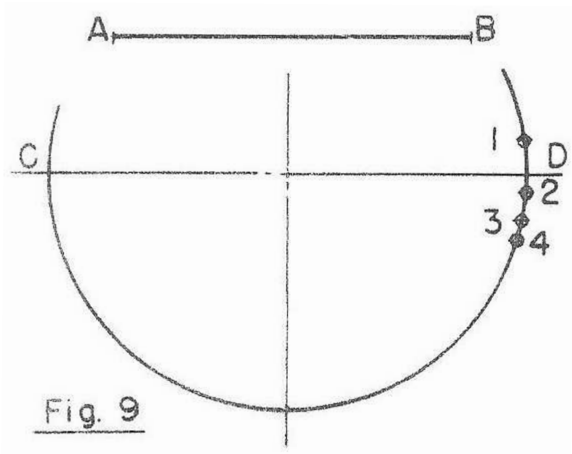


Questão 08: Determinar o comprimento aproximado do arco de circunferência AB. (Fig. 8)
(A) 29 mm. (B) 33 mm. (C) 36 mm. (D) 40 mm. (E) 44 mm.



ITA 1974, Questão 08.

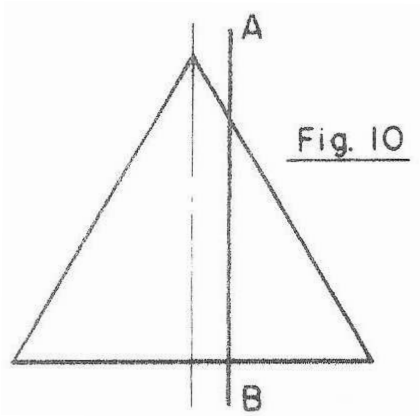
Questão 09: Marcar sobre o arco de circunferência CD o comprimento da reta AB. (Fig. 9)
(A) Em 1. (B) Em 2. (C) Em 3. (D) Em 4. (E) Em nenhuma destas marcas.



ITA 1974, Questão 09.

Questão 10: Intersectando um cone circular reto por um plano AB paralelo ao seu eixo, obtém-se a seção cônica seguinte: (Fig. 10)

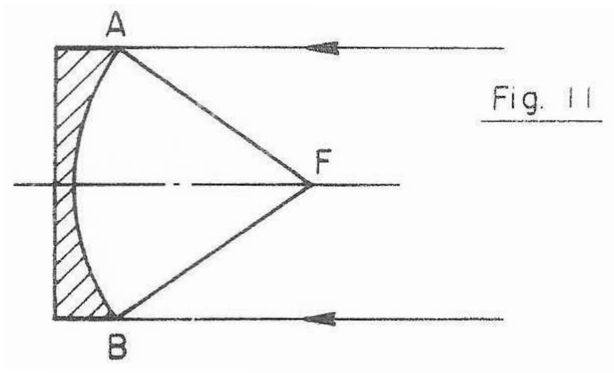
(A) Um círculo. (B) Uma parábola. (C) Uma elipse. (D) Uma hipérbole. (E) Nenhuma destas.



ITA 1974, Questão 10.

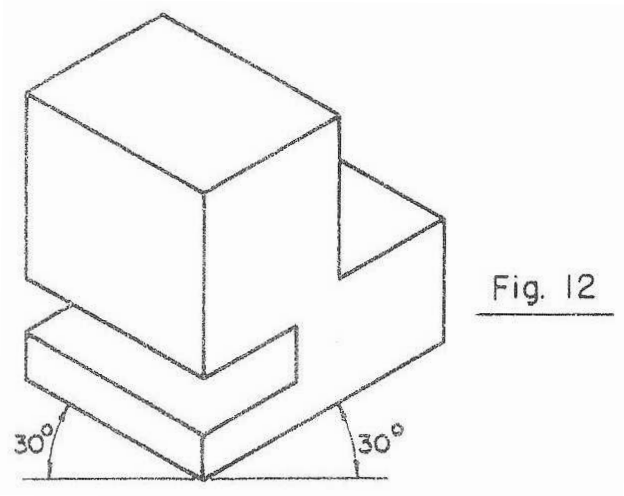
Questão 11: Um feixe de raios luminosos paralelos incide sobre a superfície côncava AB. Qual deve ser o perfil da seção para que os raios emergentes passem todos pelo ponto F? (Fig. 11)

(A) Um círculo. (B) Uma parábola. (C) Uma elipse. (D) Uma hipérbole. (E) Nenhuma destas.



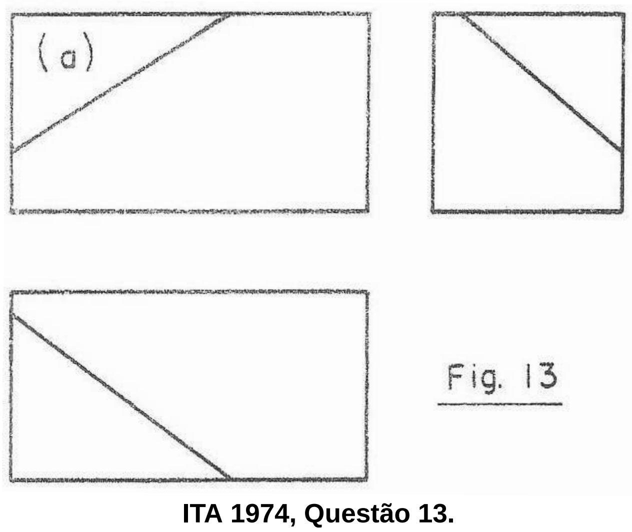
ITA 1974, Questão 11.

Questão 12: A peça da Fig. 12 acha-se representada en perspectiva:
(A) Cavaleira. (B) Dimétrica. (C) Gabinete. (D) Bimétrica. (E) Isométrica.



ITA 1974, Questão 12.

Questão 13: Dadas as três projeções de uma peça (Fig. 13), determinar a área da superfície reversa (a).
(A) 405 mm^2. (B) 470 mm^2. (C) 575 mm^2. (D) 635 mm^2. (E) 780 mm^2.



ITA 1974, Questão 13.

Questão 14: Uma chapa fina conforme desenho da Fig. 14 contém dois furos. Quantas cotas (dimensões) faltam para posicionar os eixos dos furos?

(A) 4 cotas. (B) 3 cotas. (C) 2 cotas. (D) 1 cota. (E) Nenhuma.

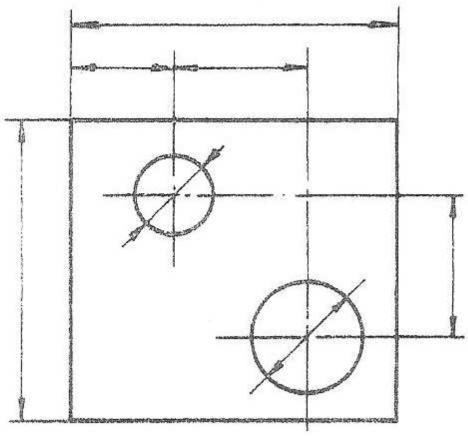


Fig. 14

ITA 1974, Questão 14.

Questão 15: Quantas linhas faltam para completar a elevação da planta? (Fig. 15)

(A) 1 linha. (B) 2 linhas. (C) 3 linhas. (D) 4 linhas. (E) Nenhuma.

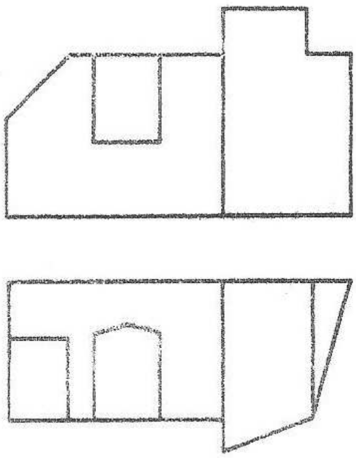


Fig. 15

ITA 1974, Questão 15.

Questão 16: Quantas linhas faltam para completar a vista lateral esquerda da peça? (Fig. 16)

(A) 1 linha. (B) 2 linhas. (C) 3 linhas. (D) 4 linhas. (E) Nenhuma.

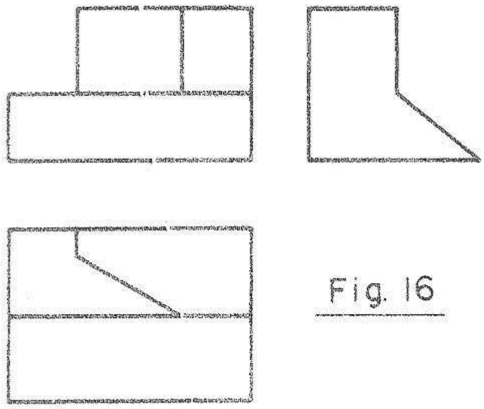


Fig. 16

ITA 1974, Questão 16.

Questão 17: Dadas as projeções $M - N$ no primeiro diedro, determinar a área da seção recortada pelo plano AB. (Fig. 17)

(A) 465 mm^2. (B) 535 mm^2. (C) 575 mm^2. (D) 650 mm^2. (E) 755 mm^2.

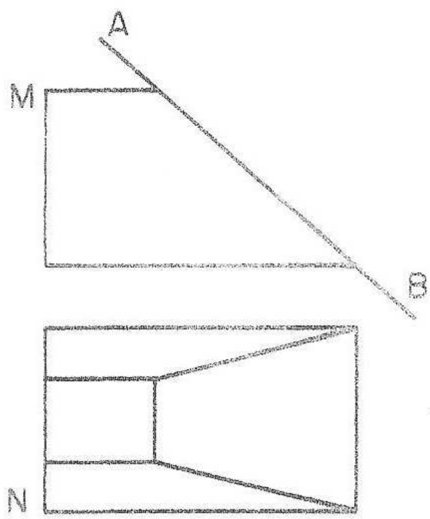
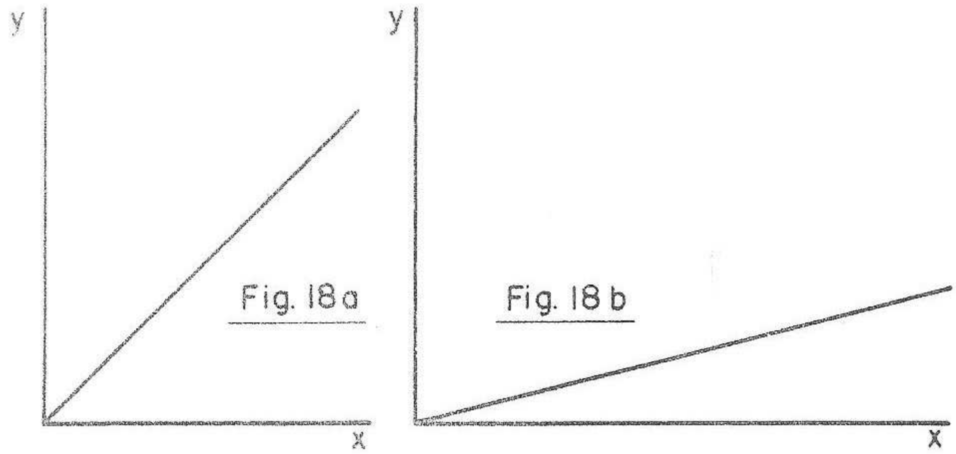


Fig. 17

ITA 1974, Questão 17.

Questão 18: Para facilitar a paginação de um diagrama foram substituídas as escalas das coordenadas da Fig. 18a pela da Fig.18b. Determinar as escalas escolhidas.

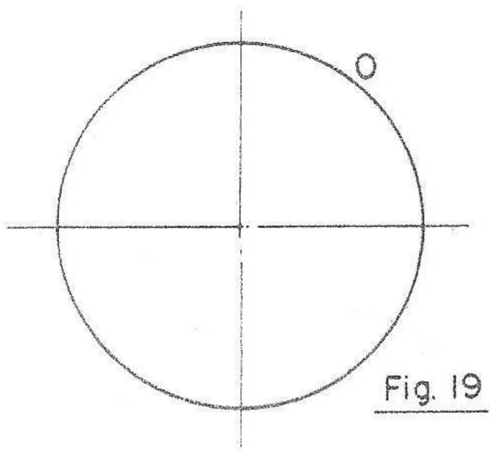
	Abscissa	Ordenada
(A)	1:1,5	1,5:1.
(B)	1:2	2:1.
(C)	2:1	1:2.
(D)	3:1	1:2.
(E)	1:3	2,5:1.



ITA 1974, Questão 18.

Questão 19: Inscrever um pentágono regular na circunferência O (Fig. 19). Determinar o comprimento de seu apótema.

(A) 17,5 mm. (B) 18,5 mm. (C) 19,5 mm. (D) 21,0 mm. (E) 22,5 mm.



ITA 1974, Questão 19.

Questão 20: Construir o pentágono regular conhecendo-se o seu lado AB. Determinar o diâmetro do círculo inscrito. (Fig. 20)

(A) 25 mm. (B) 30 mm. (C) 35 mm. (D) 40 mm. (E) 43 mm.

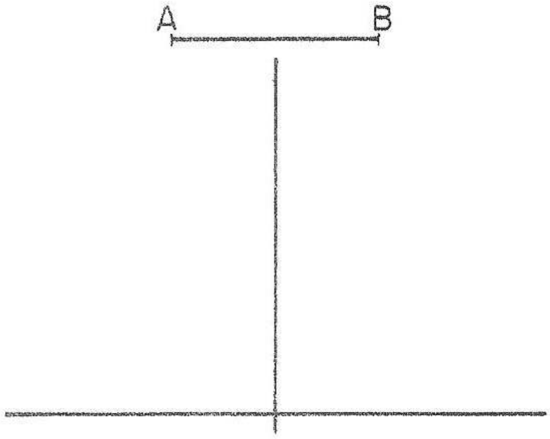


Fig. 20

ITA 1974, Questão 20.

Questão 21: Uma hélice de 6 cm de passo é traçada sobre uma superfície cilíndrica. Começando em O, a curva passa pelo ponto: (Fig. 21)

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

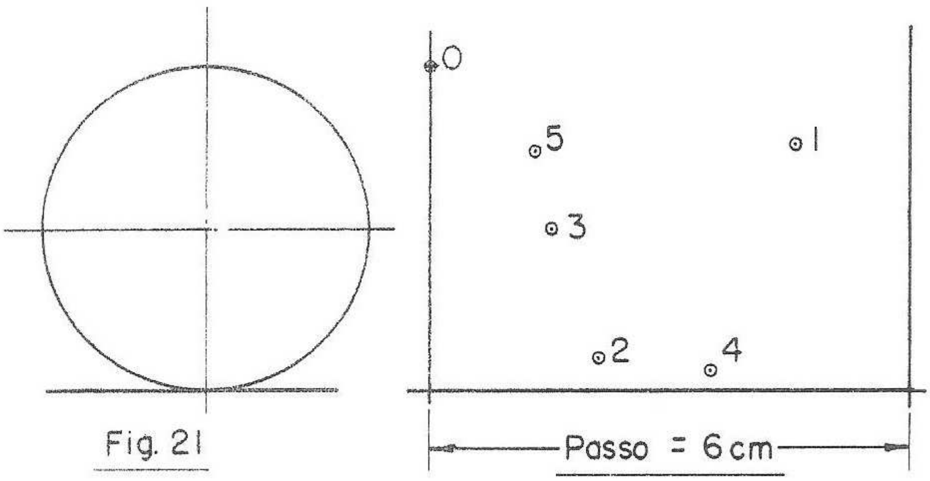


Fig. 21

ITA 1974, Questão 21.

Questão 22: Traçar a evolvente do círculo O partindo de C. Determinar o ponto de cruzamento P entre a curva e a reta AB tangente ao círculo em M e perpendicular a MC (Fig. 22). O ponto acha-se em:
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

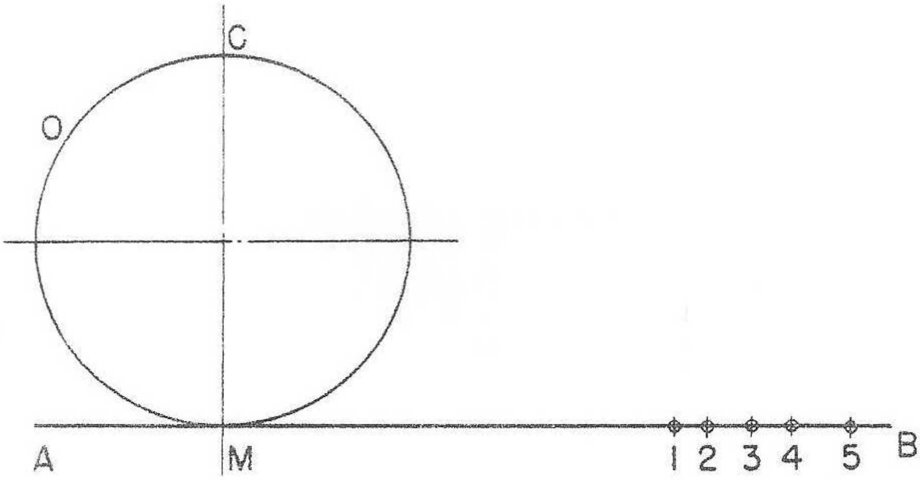


Fig. 22

ITA 1974, Questão 22.

Questão 23: Determinar a área do triângulo ABC dado pelas suas projeções vertical e horizontal. (Fig. 23)
(A) 1215 mm^2. (B) 975 mm^2. (C) 800 mm^2. (D) 625 mm^2. (E) 515 mm^2.

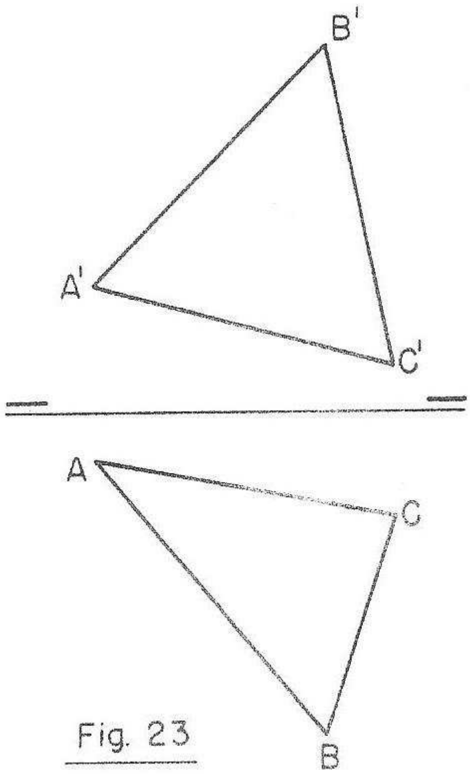


Fig. 23

ITA 1974, Questão 23.

Questões 24 e 25: Determinar as áreas intersectadas do prisma reto A pelo segundo prisma reto B. (Fig. 24)

(A) 380 mm^2. (B) 420 mm^2. (C) 600 mm^2. (D) 875 mm^2. (E) 1100 mm^2.

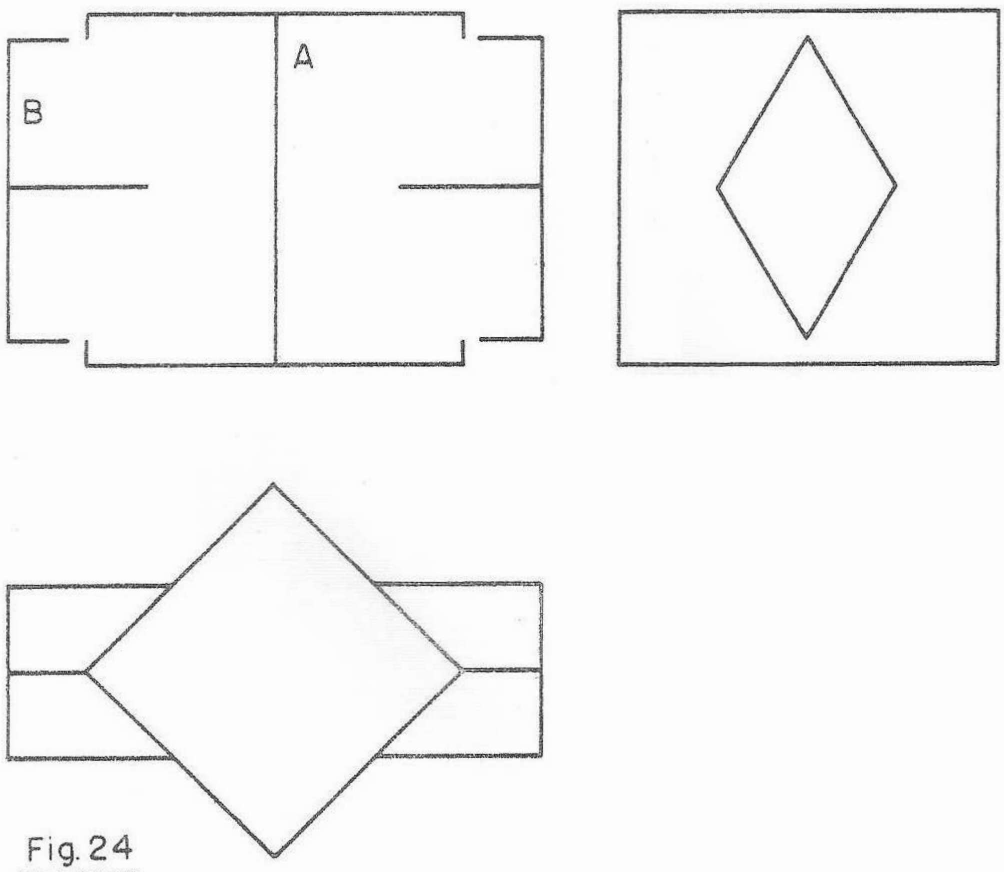
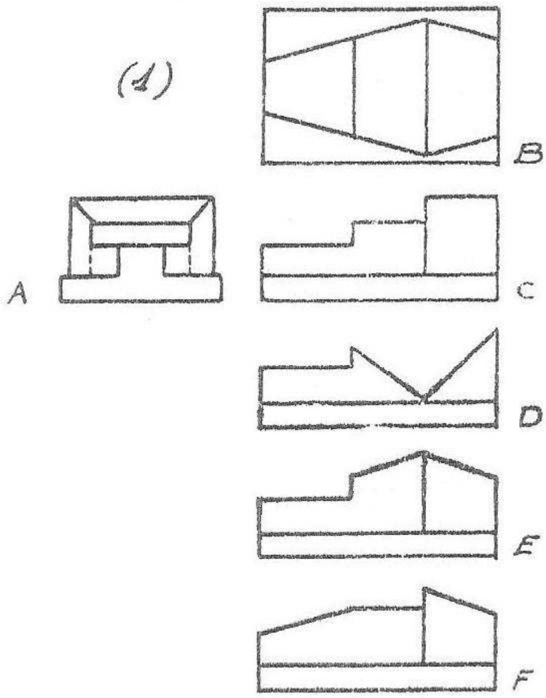


Fig. 24

ITA 1974, Questões 24 e 25.

II.17 Vestibular de 1973

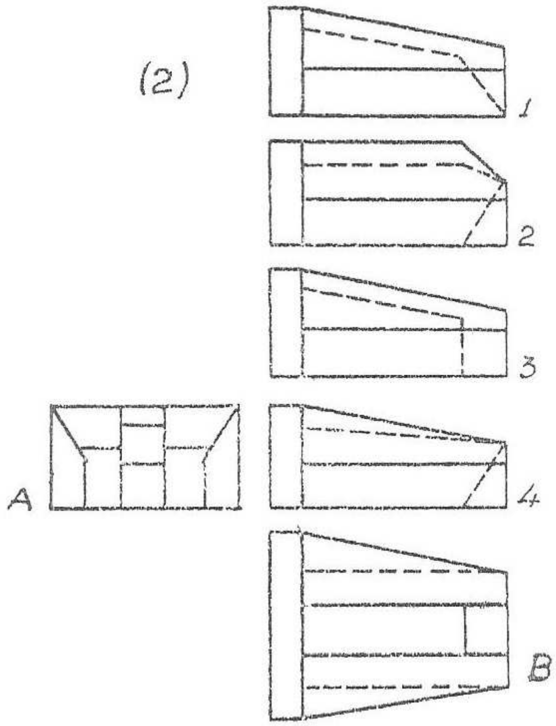
Questão 01: Dadas as projeções A e B no terceiro diedro, pede-se a elevação correspondente. (Fig. 1)
(A) ABC. (B) ABD. (C) ABE. (D) ABF. (E) Nenhuma.



ITA 1973, Questão 01.

Questão 02: Dadas as projeções lateral A e horizontal B, de uma peça, no primeiro diedro, achar a elevação correspondente. (Fig. 2)

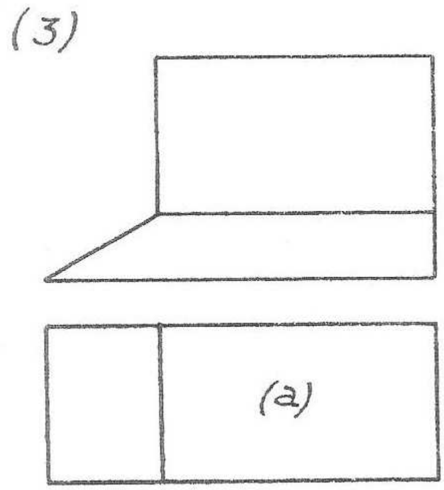
(A) $AB1$. (B) $AB2$. (C) $AB3$. (D) $AB4$. (E) Nenhuma.



ITA 1973, Questão 02.

Questão 03: Considerando as duas projeções ortogonais no primeiro diedro abaixo, determinar a área do plano a. (Fig. 3)

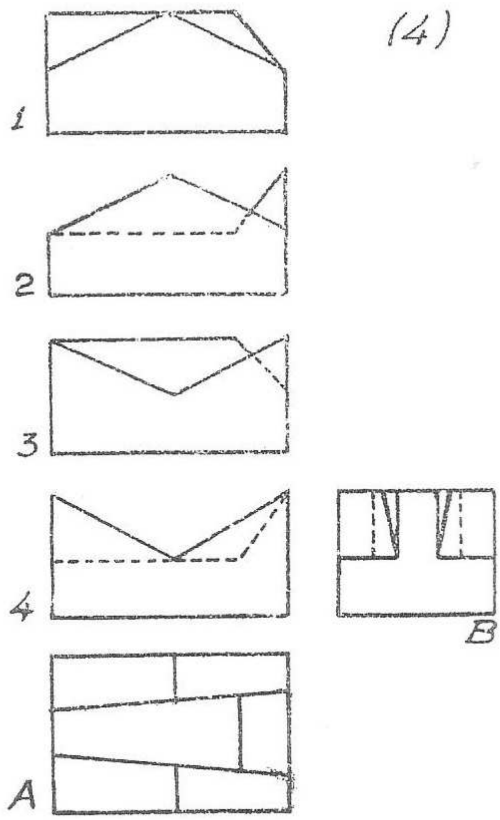
(A) 613 mm^2. (B) 820 mm^2. (C) 1.015 mm^2. (D) 1.202 mm^2. (E) 1.410 mm^2.



ITA 1973, Questão 03.

Questão 04: Dadas as projeções horizontal A e lateral B, no primeiro diedro, de uma peça, achar a elevação correspondente. (Fig. 4)

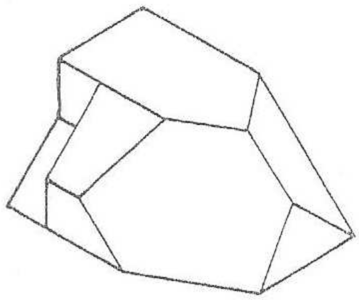
(A) $AB1$. (B) $AB2$. (C) $AB3$. (D) $AB4$. (E) Nenhuma.



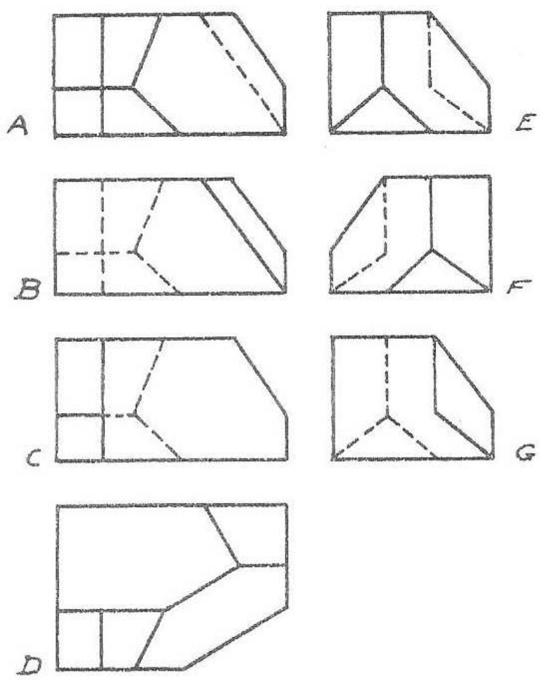
ITA 1973, Questão 04.

Questão 05: Dada, em perspectiva, a peça abaixo, indicar quais as vistas que melhor a representam, no primeiro diedro.

(A) DAG. (B) DBF. (C) DCE. (D) DAB. (E) Nenhuma.



ITA 1973, Questão 05.



Questão 06: Um raio de luz emergente do ponto A incide sobre a superfície de um espelho côncavo em B ou em C. Após a reflexão, corta o eixo de revolução em D. Pede-se o perfil da superfície. (Fig. 6)

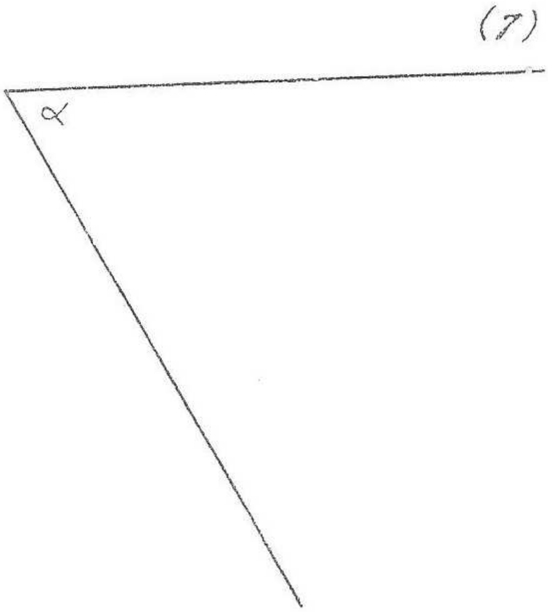
(A) Uma parábola. (B) Uma hipérbole. (C) Um círculo. (D) Uma elipse. (E) Nenhuma destas.

(6)

ITA 1973, Questão 06.

Questão 07: Dados o ângulo α, a altura h igual a 35 mm de um triângulo e o perímetro p igual a 134 mm, construir o triângulo e determinar a sua superfície. (Fig. 7)

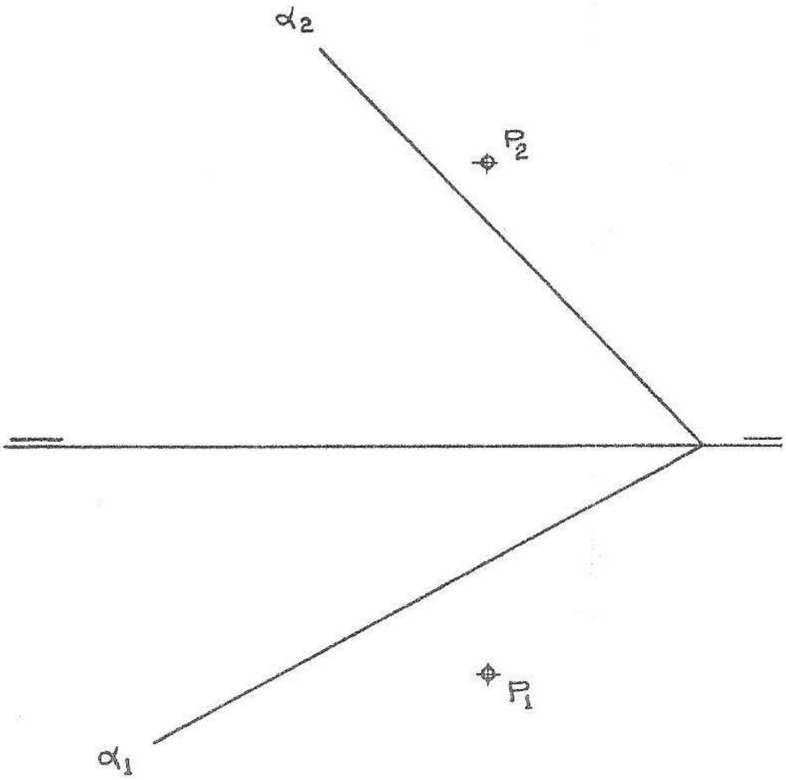
(A) 612 mm^2. (B) 805 mm^2. (C) 916 mm^2. (D) 1.050 mm^2. (E) 1.105 mm^2.



ITA 1973, Questão 07.

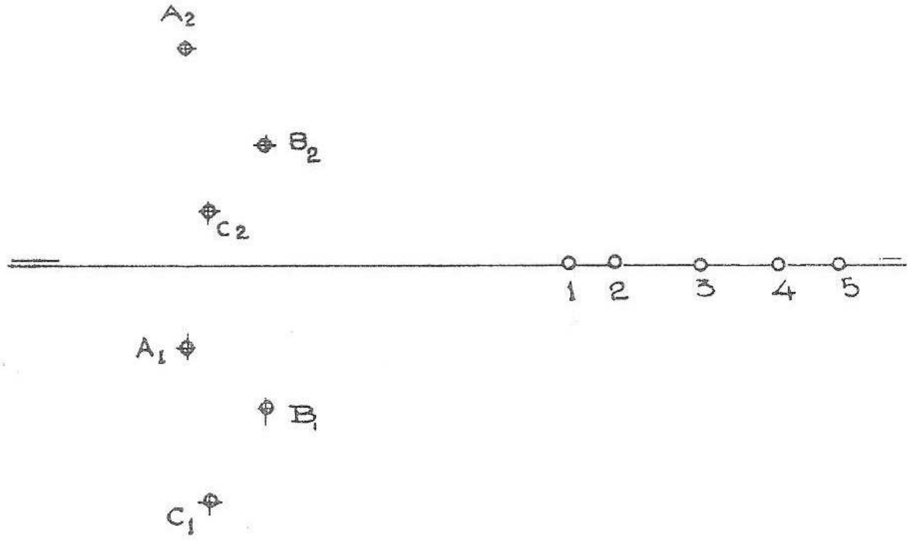
Questão 08: Dados os traços do plano α e as projeções de um ponto P, achar sua distância ao plano.

(A) 18 mm. (B) 20 mm. (C) 23 mm. (D) 26 mm. (E) 33 mm.



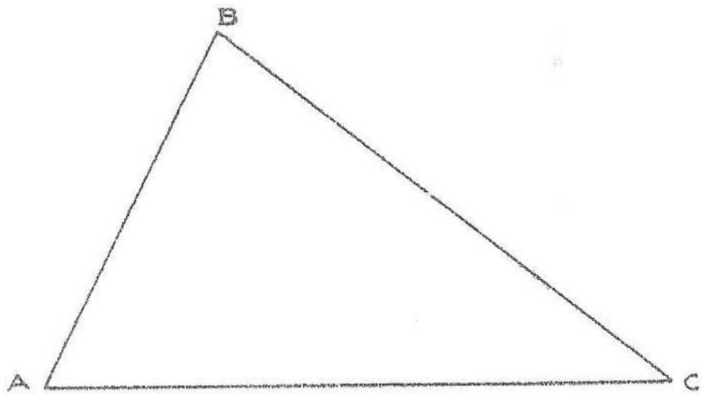
ITA 1973, Questão 08.

Questão 09: Dados 3 pontos ABC, os traços do plano definido por ABC encontram-se em:
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.



ITA 1973, Questão 09.

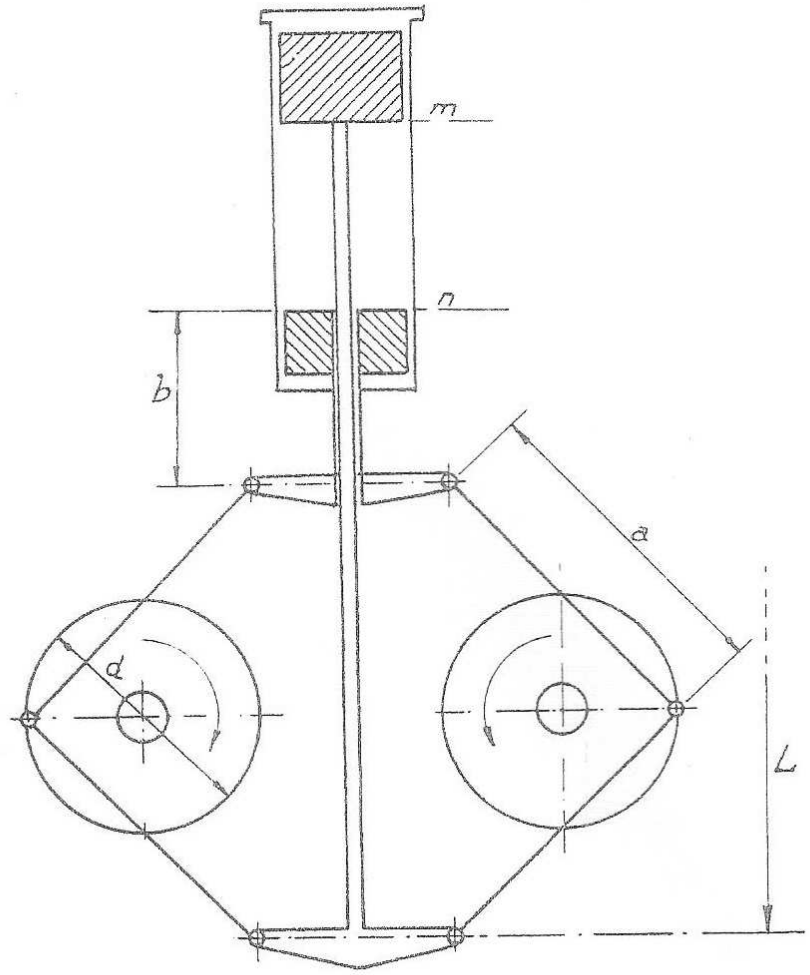
Questão 10: Inscrever no triângulo ABC o quadrado de área máxima.
(A) 320 mm^2. (B) 450 mm^2. (C) 575 mm^2. (D) 1784 mm^2. (E) 1.114 mm^2.



ITA 1973, Questão 10.

Questão 11: Um sistema biela-manivela de um motor Stirling tem um mecanismo como mostra a figura. Dados a, b e o diâmetro d, pede-se o comprimento L da haste central para que a distância entre os dois pistões m e n seja nula.

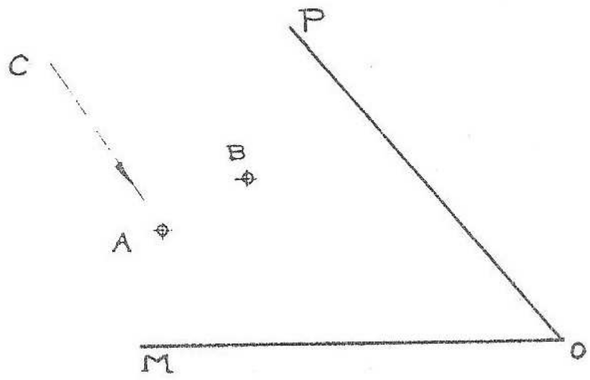
(A) 80 mm. (B) 103 mm. (C) 125 mm. (D) 138 mm. (E) Nenhuma destas.



ITA 1973, Questão 11.

Questão 12: Uma esfera de aço saindo do ponto A na direção CA incide sobre a parede perfeitamente elástica MO. Rebota na parede PO, a qual a envia ao ponto B. Pede-se a distância percorrida pela esfera.

(A) 50 mm. (B) 62 mm. (C) 67 mm. (D) 72 mm. (E) 75 mm.



ITA 1973, Questão 12.

Questão 13: Dadas a hipotenusa igual a 40 mm e a soma dos catetos igual a 53 mm, a superfície do triângulo retângulo construído tem área de:

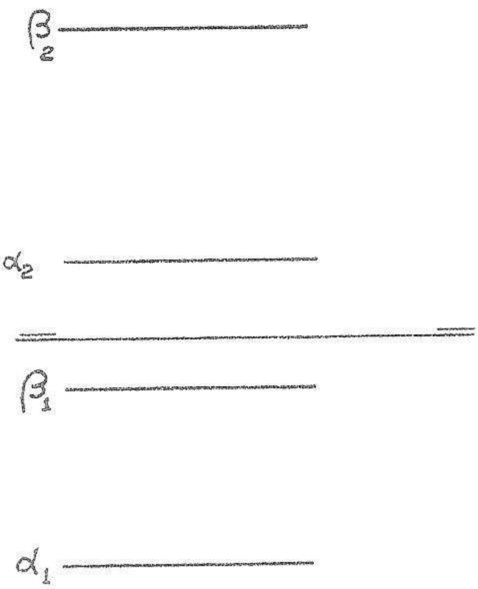
(A) 292 mm^2. (B) 306 mm^2. (C) 356 mm^2. (D) 612 mm^2. (E) Nenhuma destas.

Questão 14: Dados os pontos A, B, C, D, construir um quadrado com vértice N, P, Q, R, que tenha seus lados passando por A, B, C, D. O perímetro deste é:

(A) 90 mm. (B) 128 mm. (C) 160 mm. (D) 215 mm. (E) 354 mm.

ITA 1973, Questão 14.

Questão 15: Dados dois planos α e β paralelos à LT, achar um plano γ também paralelo à LT que intersecte os dois outros e forme com eles ângulos iguais. Pede-se cota e afastamento dos traços deste novo plano.

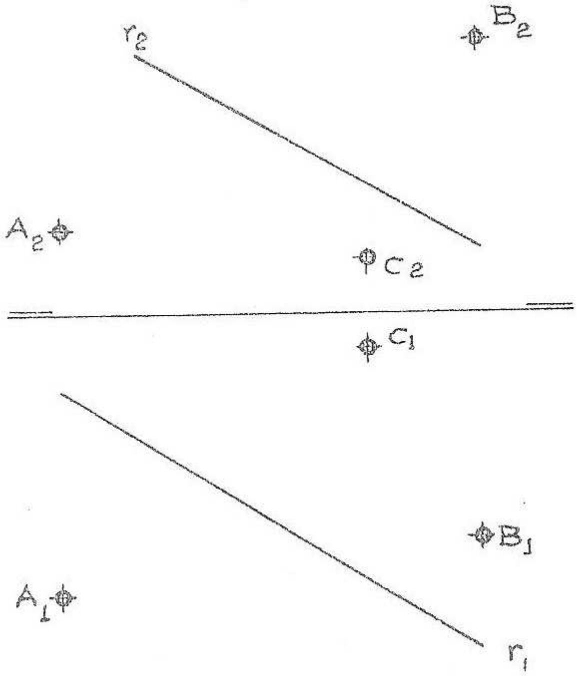


ITA 1973, Questão 15.

	Cota	Afastamento
(A)	16 mm	11 mm.
(B)	15 mm	13 mm.
(C)	9 mm	12 mm.
(D)	12 mm	15 mm.
(E)	18 mm	12 mm.

Questão 16: Dadas as projeções de 3 pontos ABC pertencentes a um plano e de uma reta r, determinar a cota do ponto onde a reta fura o plano.

(A) 18 mm. (B) 22 mm. (C) 24 mm. (D) 28 mm. (E) 37 mm.



ITA 1973, Questão 16.

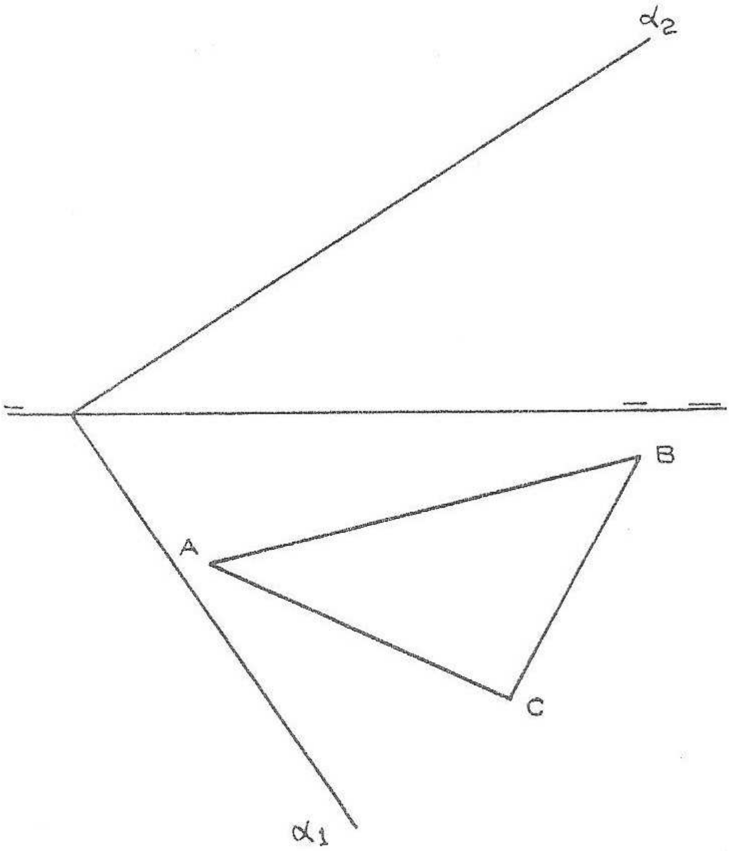
Questão 17: Duas retas de perfil AB e CD intersectam-se num ponto. Determinar o ângulo que fazem entre si.

(A) 60°. (B) 81°. (C) 90°. (D) 120°. (E) 136°.

ITA 1973, Questão 17.

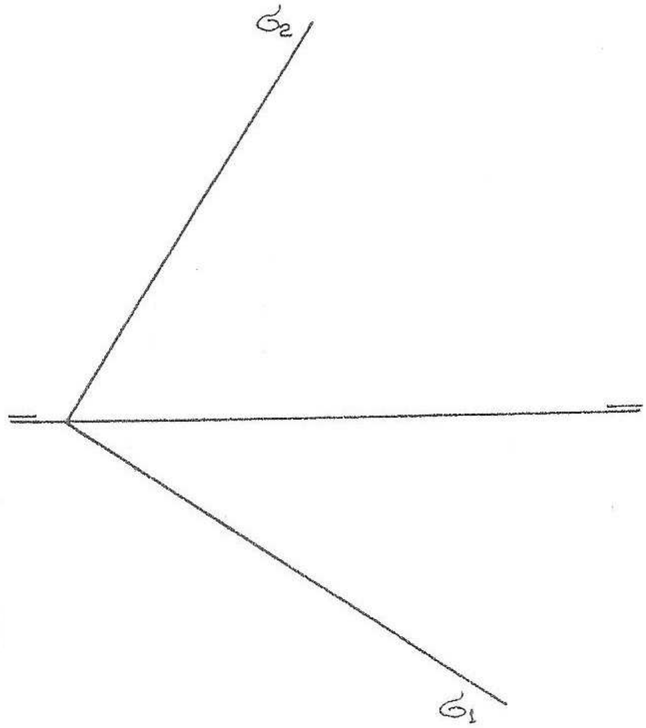
Questão 18: Dada a projeção de um prisma reto de 50 mm de altura assente no PH. Pede-se o perímetro da projeção vertical da seção recortada pelo plano α.

(A) 120 mm. (B) 128 mm. (C) 131 mm. (D) 150 mm. (E) Nenhum destes.



ITA 1973, Questão 18.

Questão 19: Achar a VG dos ângulos que o plano σ, dado pelos traços, forma com o PH e com o PV.

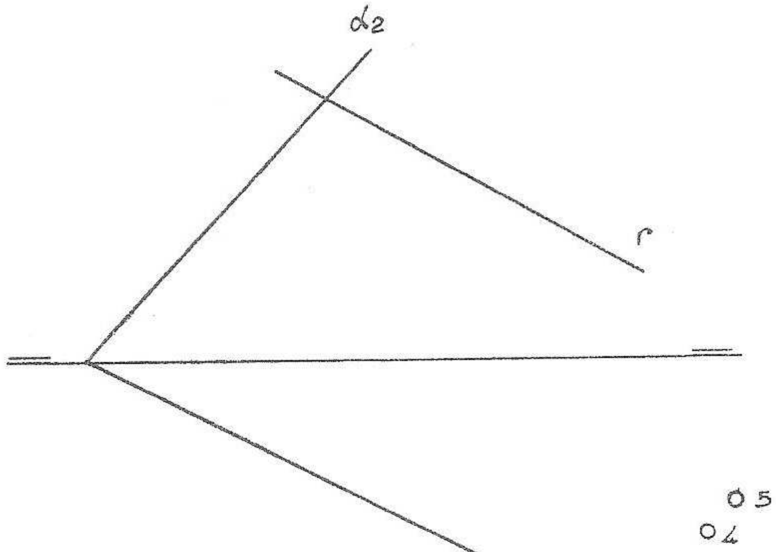


	PH	PV
(A)	45º	60º.
(B)	50º	72º.
(C)	41º	61º.
(D)	32º	85º.
(E)	38º	71º.

ITA 1973, Questão 19.

Questão 20: Determinar a projeção horizontal da reta r de forma que pertença ao plano α. A reta passa pelo ponto:

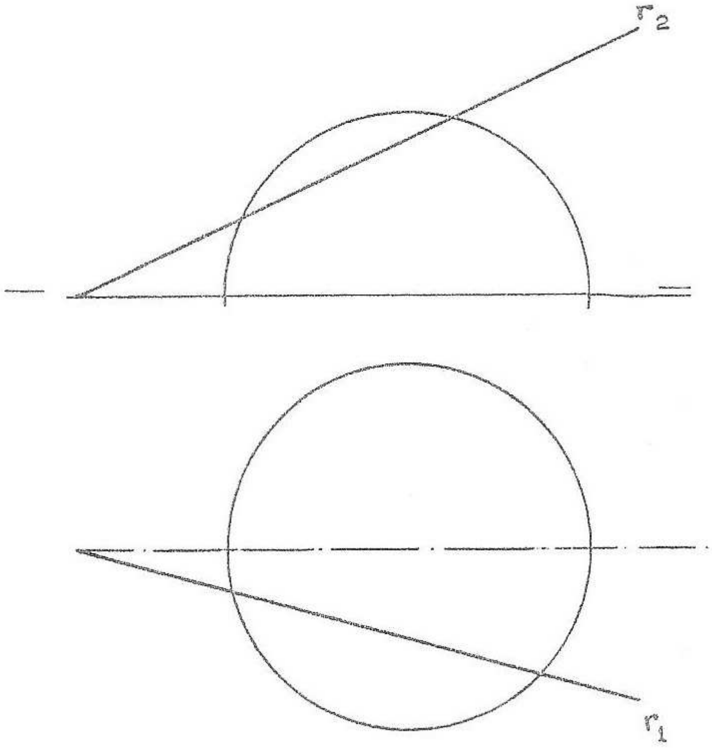
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.



ITA 1973, Questão 20.

Questão 21: Dadas as projeções de uma esfera e de uma barra secante r, determinar a VG da penetração na projeção horizontal.

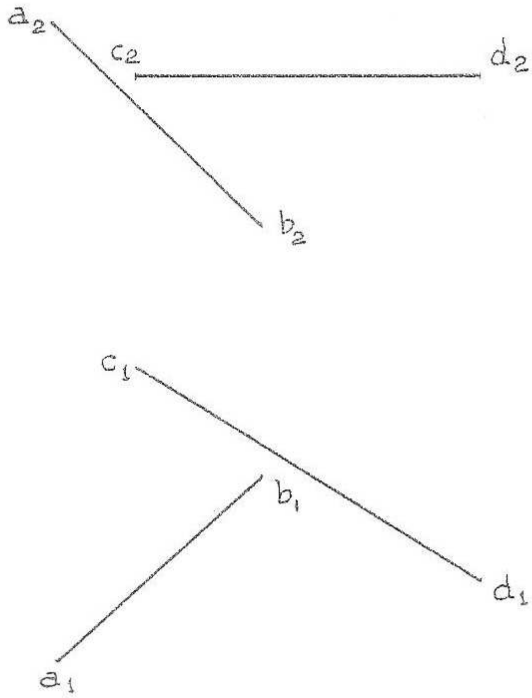
(A) 15 mm. (B) 19 mm. (C) 25 mm. (D) 28 mm. (E) 34 mm.



ITA 1973, Questão 21.

Questão 22: Numa seção de pintura, existem dois tubos de ar comprimido onde se deseja colocar uma braçadeira. Pede-se a VG da menor distância entre os tubos.

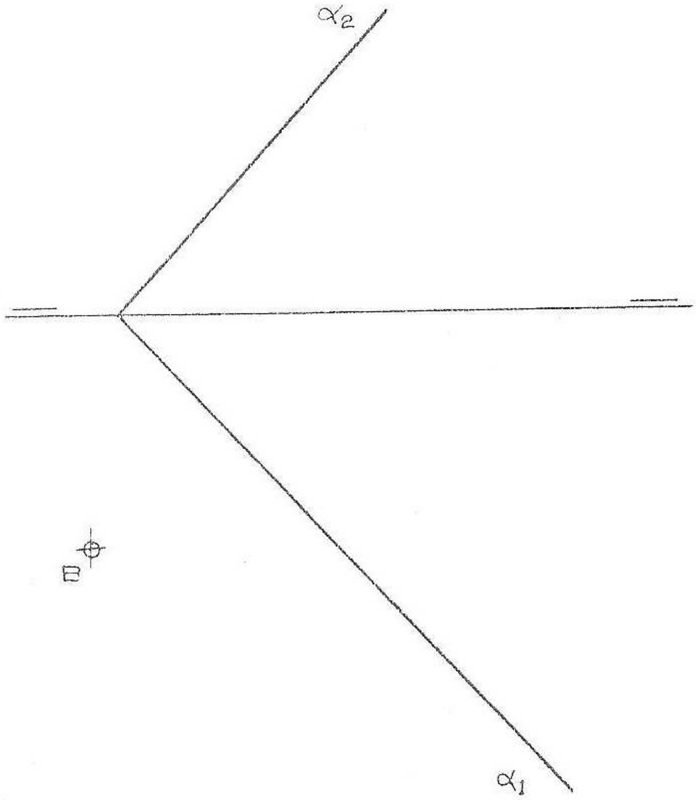
(A) 14 mm. (B) 18 mm. (C) 22 mm. (D) 26 mm. (E) Nenhuma destas.



ITA 1973, Questão 22.

Questões 23 e 24: Determinar o perímetro da projeção vertical de um triângulo isósceles ABC situado no plano α. É conhecido o rebatimento do ponto B no PH. A base BC mede 25 mm, sendo que a cota de C é maior do que a de B. O vértice A tem cota nula e a figura está situada no primeiro diedro.

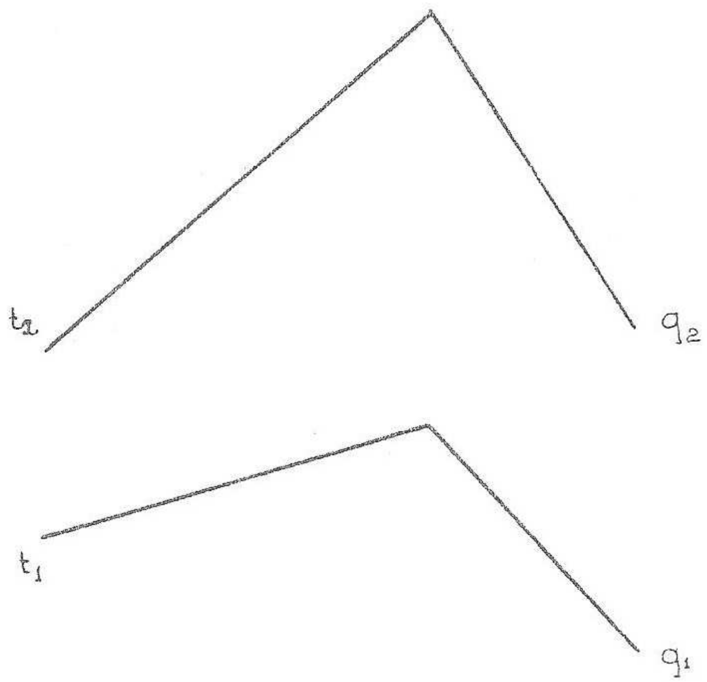
(A) 95 mm. (B) 115 mm. (C) 120 mm. (D) 135 mm. (E) 145 mm.



ITA 1973, Questões 23 e 24.

Questão 25: Um projeto de tubulação apresenta as projeções ortogonais de dois canos t e q. Pede-se determinar o ângulo formado pelos dois canos.

(A) 72^o. (B) 80^o. (C) 93^o. (D) 100^o. (E) 104^o.

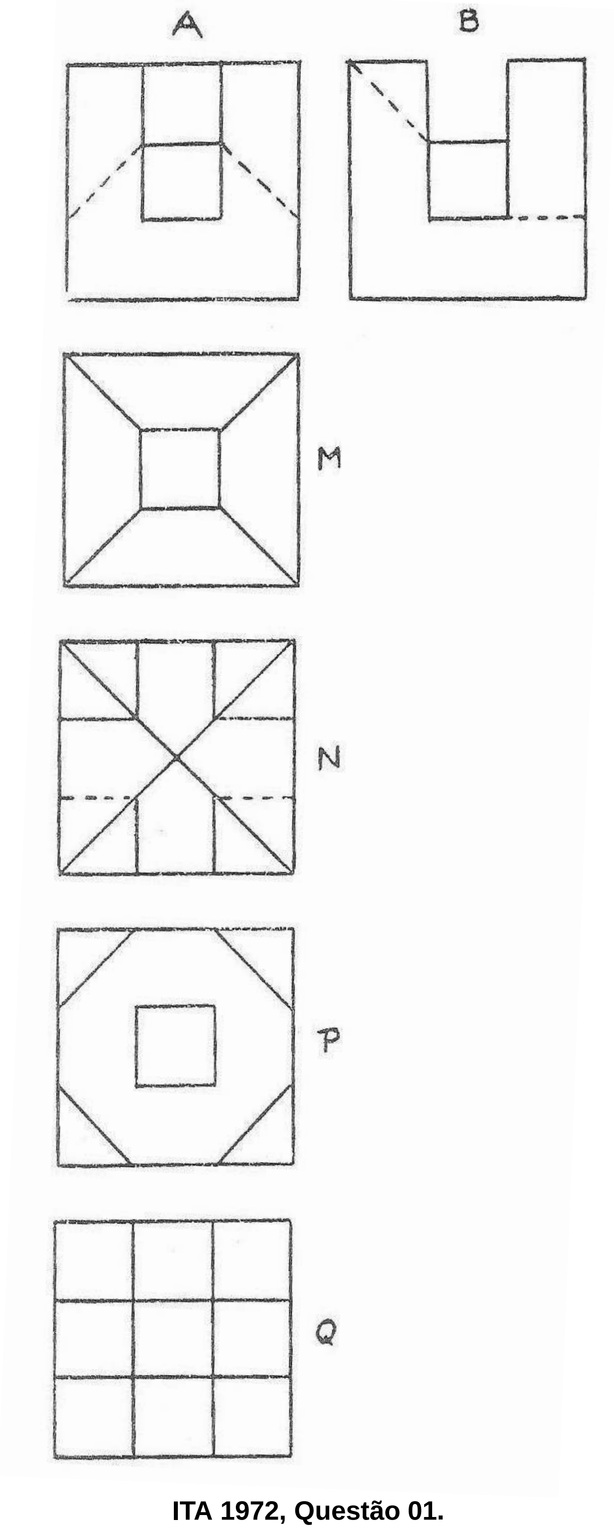


ITA 1973, Questão 25.

II.18 Vestibular de 1972

Questão 01: Sendo A e B as vistas de frente e lateral esquerda, respectivamente, de uma peça no 1º diedro, indique a vista superior correspondente.

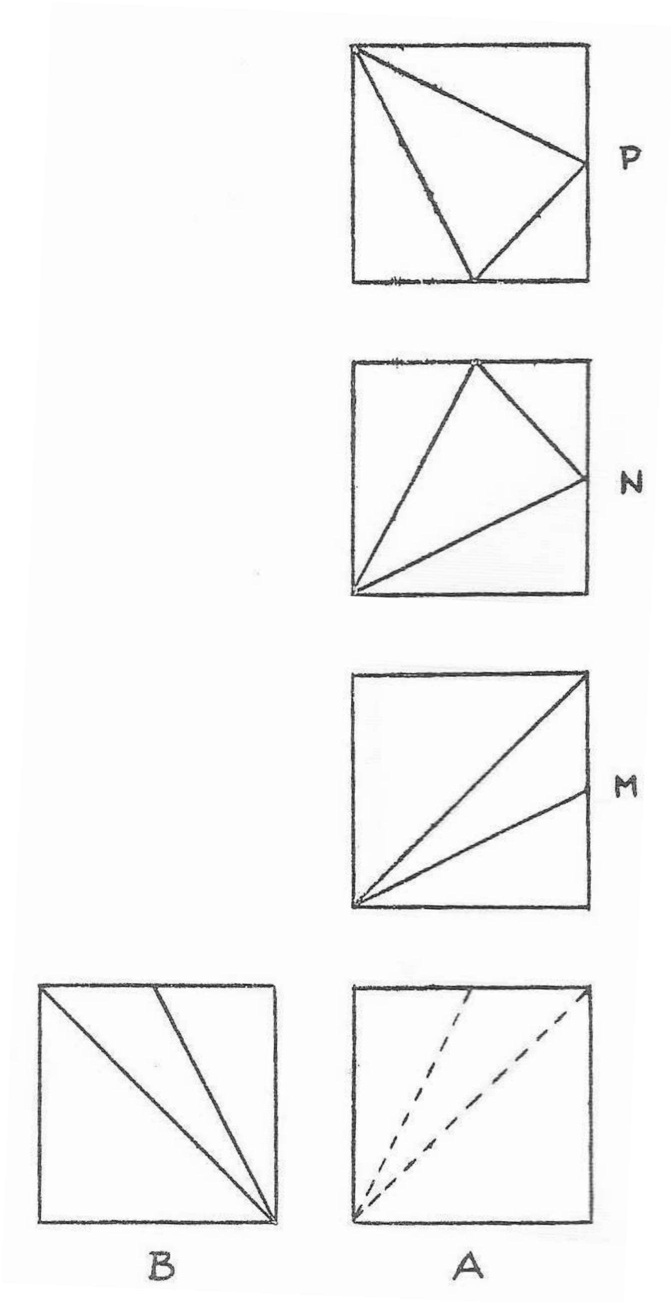
(A) M. (B) N. (C) P. (D) Q. (E) Nenhuma delas.



ITA 1972, Questão 01.

Questão 02: Sendo A e B as vistas de frente e lateral esquerda, respectivamente, de uma peça no 3º diedro, indique a vista superior correspondente.

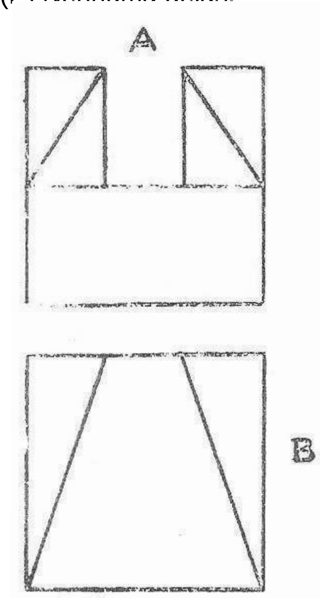
(A) M. (B) N. (C) P. (D) Q. (E) Nenhuma delas.



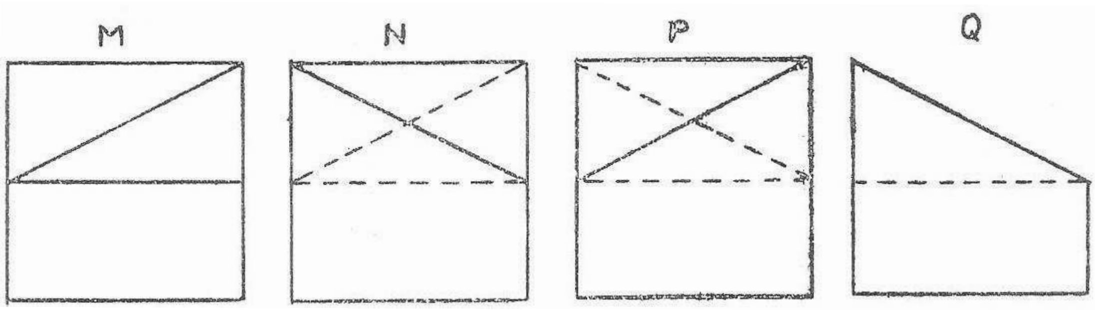
ITA 1972, Questão 02.

Questão 03: Sendo A e B as vistas de frente e superior, respectivamente, de uma peça no 1^{o} diedro, indique a vista lateral esquerda correspondente.

(A) M. (B) N. (C) P. (D) Q. (E) Nenhuma delas.

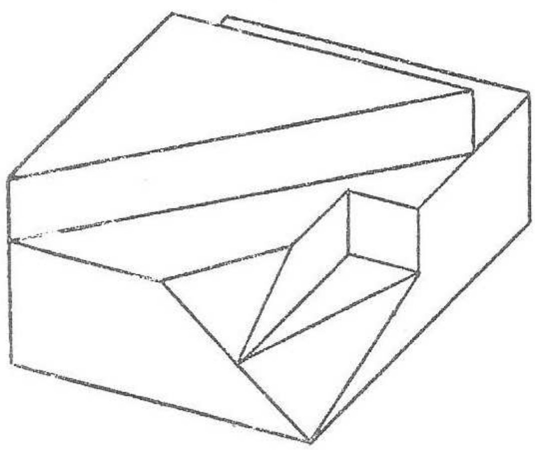


ITA 1972, Questão 03.



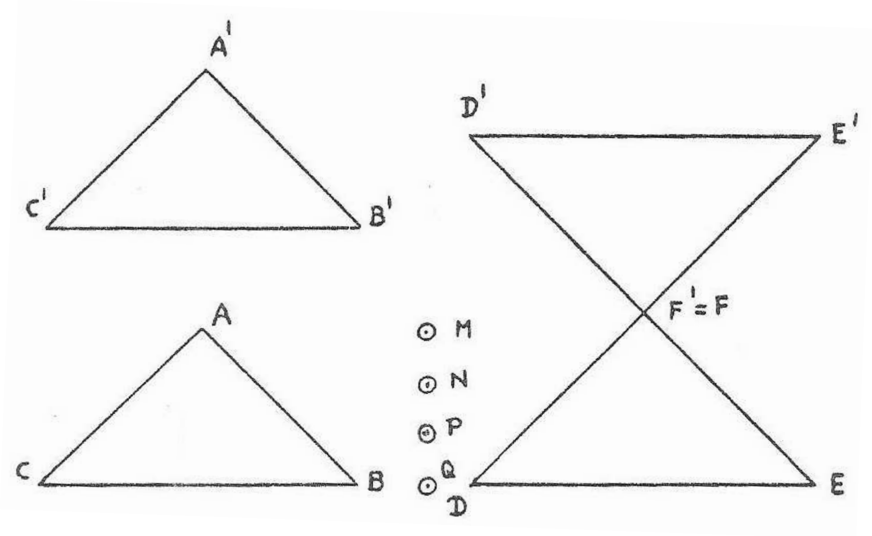
Questão 04: Dada a peça em perspectiva, indique qual o conjunto de vistas que melhor a representam, no 1^{o} diedro.

(A) ABF. (B) ACE. (C) ABE. (D) ACF. (E) ADG.



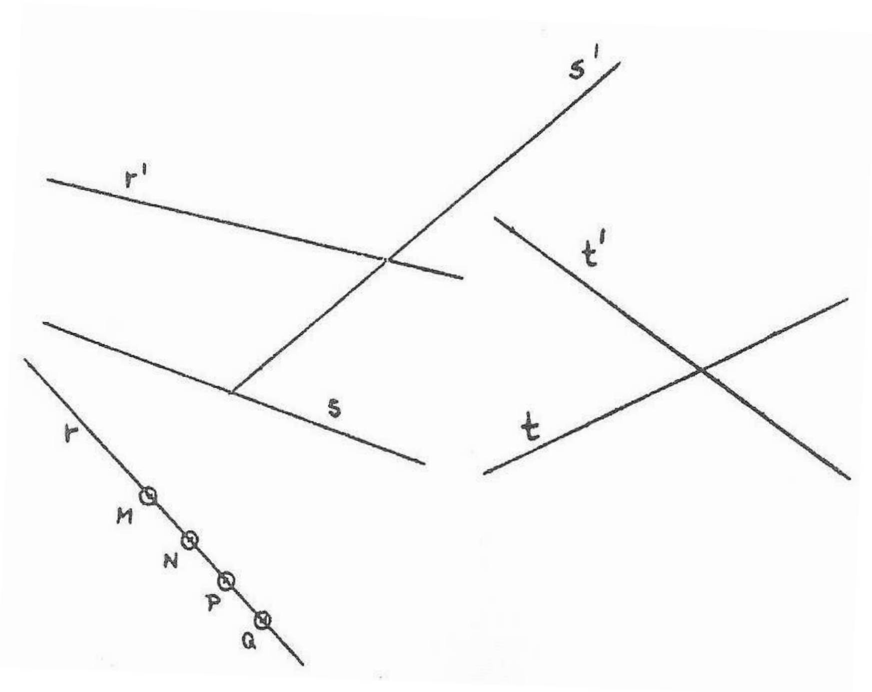
ITA 1972, Questão 04.

Questão 05: A interseção dos planos definidos por ABC e DEF passa pelo ponto:
(A) M. (B) N. (C) P. (D) Q. (E) Nenhum destes.



ITA 1972, Questão 05.

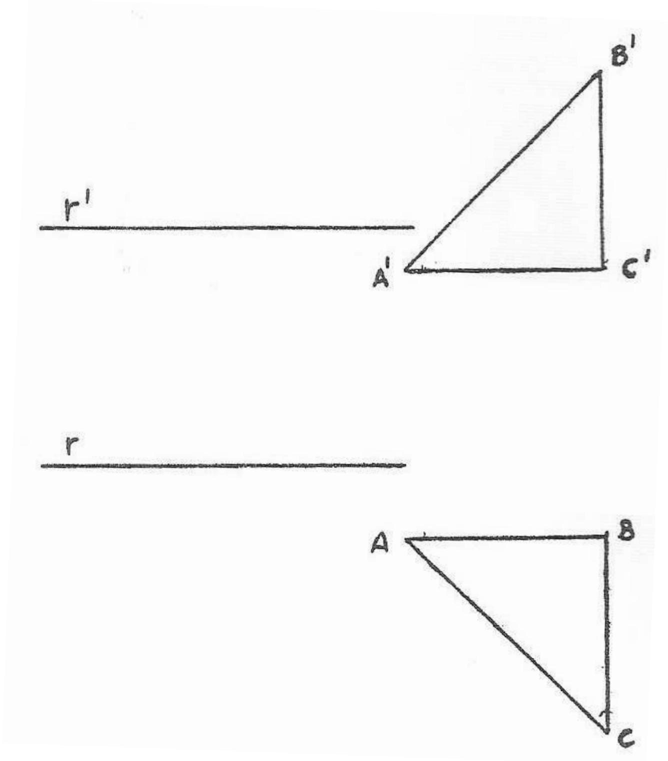
Questão 06: A reta r fura o plano definido por s e t no ponto:
(A) M. (B) N. (C) P. (D) Q. (E) Nenhum destes.



ITA 1972, Questão 06.

Questão 07: A verdadeira grandeza do ângulo que a reta r faz com o plano ABC vale:

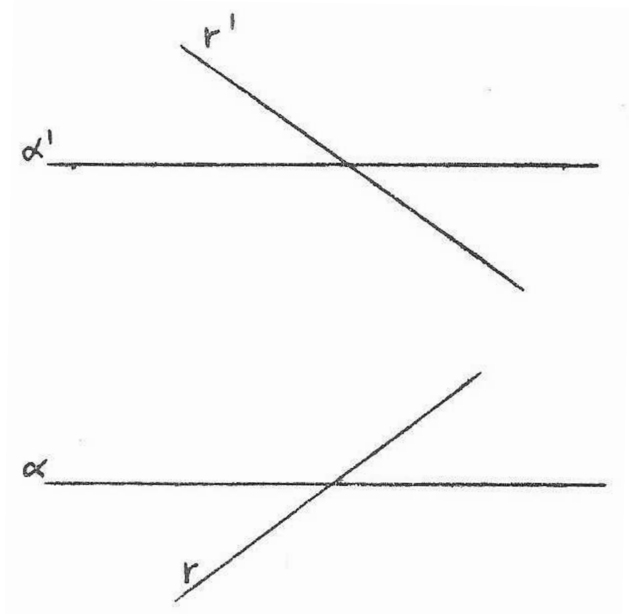
(A) 36$^{\text{o}}$. (B) 54$^{\text{o}}$. (C) Nenhum destes. (D) 20$^{\text{o}}$. (E) 70$^{\text{o}}$.



ITA 1972, Questão 07.

Questão 08: Dado o plano α e a reta r, achar a verdadeira grandeza do ângulo que a reta faz com o plano.

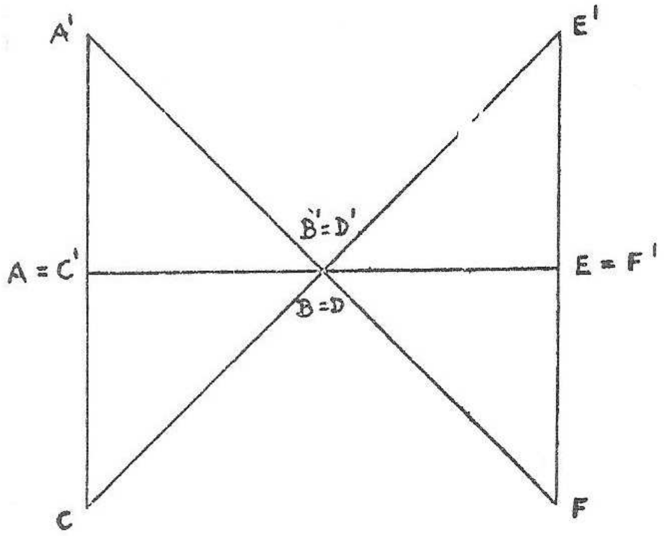
(A) 43$^{\text{o}}$. (B) 62$^{\text{o}}$. (C) 84$^{\text{o}}$. (D) Nenhum destes. (E) 27$^{\text{o}}$.



ITA 1972, Questão 08.

Questão 09: Determine a verdadeira grandeza do ângulo que os planos ABC e DEF fazem entre si, no 1º diedro.

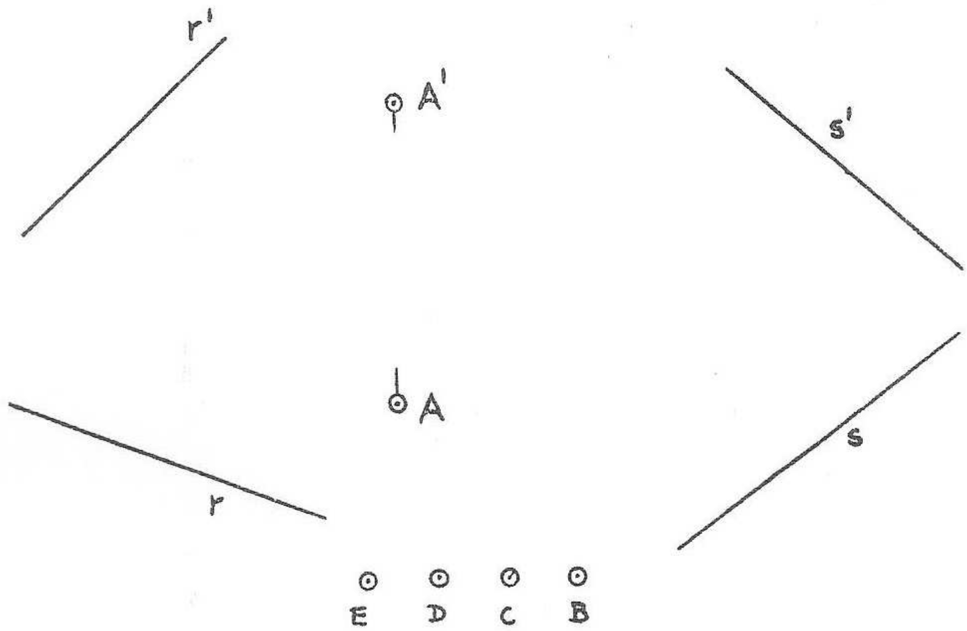
(A) 25º. (B) Nenhum destes. (C) 72º. (D) 108º. (E) 155º.



ITA 1972, Questão 09.

Questão 10: Dados o ponto A e as retas r e s, qual é a reta ortogonal às duas retas dadas?

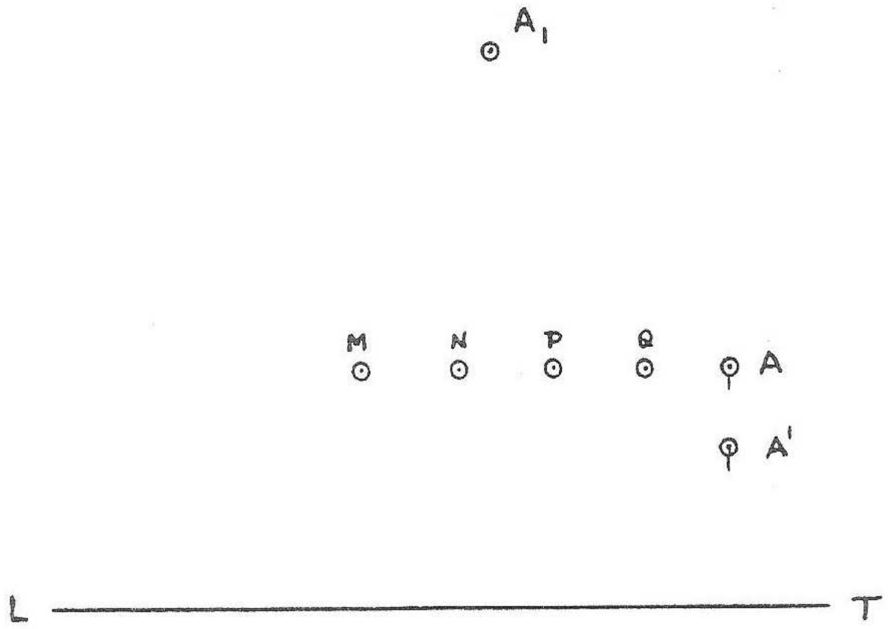
(A) AB. (B) AC. (C) AD. (D) AE. (E) Nenhuma delas.



ITA 1972, Questão 10.

Questão 11: Dado um ponto A pertencente a um plano α e dado o seu rebatimento A_1 sobre o PH, determine os traços do plano α. Pode-se afirmar que a projeção vertical de α passa pelo ponto:

(A) M. (B) N. (C) P. (D) Q. (E) Nenhum destes.



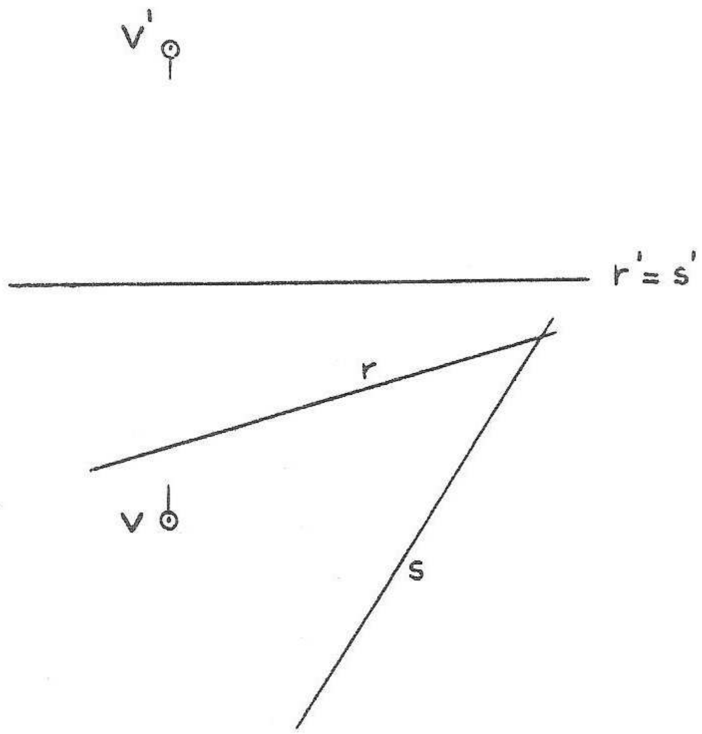
ITA 1972, Questão 11.

Questão 12: No problema anterior, o ângulo que os traços do plano formam no espaço do 1º diedro vale:

(A) 22º. (B) 54º. (C) 76º. (D) 105º. (E) 134º.

Questão 13: Represente o tetraedro regular $VABC$ cuja base ABC pretence ao PH. Sabe-se que A equidista de r e s, pertencentes também ao PH, e tem a menor abscissa possível. Pode-se afirmar que a aresta tem um comprimento de:

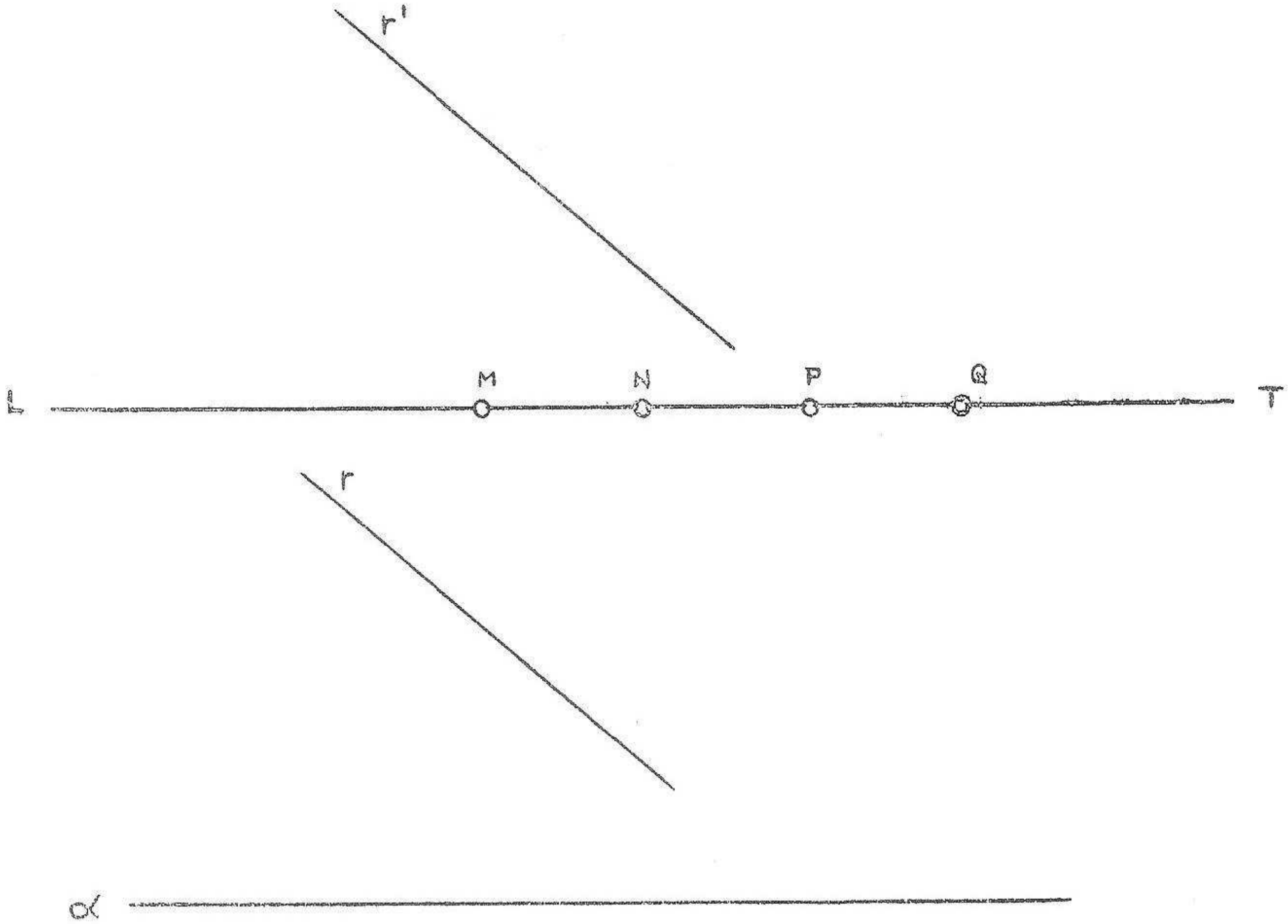
(A) 23 mm. (B) 30 mm. (C) 37 mm. (D) 43 mm. (E) 50 mm.



ITA 1972, Questão 13.

Questão 14: Dada a reta r pertencente a um plano fronto-horizontal α, determine um plano β que passe pela reta r e faça 45^o com o plano α. O traço horizontal deste plano passará pelo ponto:
Obs: Os traços do plano β devem estar voltados para a esquerda.

(A) M. (B) N. (C) Nenhum destes. (D) P. (E) Q.



ITA 1972, Questão 14.

Questões 15 e 16: Repetir o resultado obtido na Questão 14 acima.

Questão 17: Sendo ABC um triângulo equilátero resultante de uma seção em um cubo por um plano tal que acima do plano só exista um vértice em supondo que A seja o ponto médio de uma aresta, determine o comprimento da diagonal do cubo, sabendo-se que a distância do vértice ao triângulo ABC é de 10 mm.

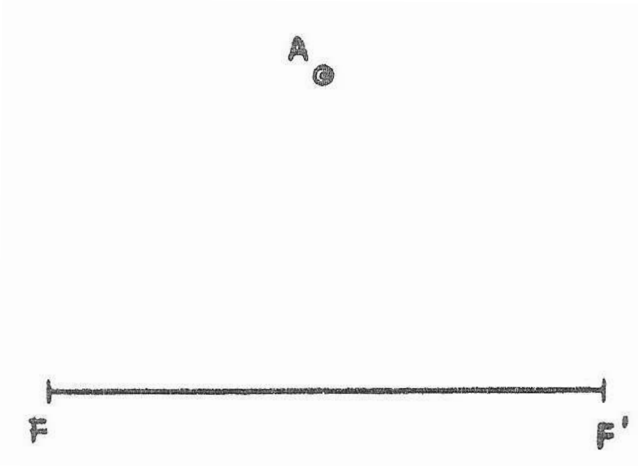
(A) 60 mm. (B) 70 mm. (C) 80 mm. (D) 90 mm. (E) Nenhuma destas.

Questão 18: Um plano α secciona um octaedro regular segundo um hexágono regular. Sendo a mm o comprimento do lado deste hexágono ,então a aresta do octaedro mede:

(A) $\sqrt{3}a$ mm. (B) $\sqrt{2}a$ mm. (C) $1{,}5a$ mm. (D) $2a$ mm. (E) Nenhum destes.

Questão 19: Determine o ângulo que as tangentes a uma hipérbole de focos F e F' fazem entre si, sabendo-se que as tangentes passam por um ponto A fora da curva, e que a distância entre os vértices é de 50 mm.

(A) 45°. (B) 55°. (C) 65°. (D) 75°. (E) Nenhum destes.



ITA 1972, Questão 19.

Questão 20: Construir um triângulo de base $b = 60$ mm e que tenha uma área equivalente à de um pentágono de 30 mm de lado, sabendo que o ângulo oposto a b vale $\hat{B} = 30^o$. O perímetro vale:

(A) 160 mm. (B) 175 mm. (C) 190 mm. (D) 205 mm. (E) 220 mm.

Questão 21: Construir um triângulo, conhecidos dois de seus ângulos, 30^o e 45^o, e o raio do círculo circunscrito $R = 40$ mm. O perímetro vale:

(A) 174 mm. (B) 204 mm. (C) 214 mm. (D) 224 mm. (E) 234 mm.

Questão 22: Construir um triângulo retângulo, conhecendo-se a hipotenusa = 80 mm e a diferença dos catetos = 35 mm. A soma dos catetos vale:

(A) 73 mm. (B) 83 mm. (C) 93 mm. (D) 123 mm. (E) Nenhum destes.

Questão 23: Construir um triângulo conhecendo-se o ângulo $\hat{A} = 45^o$ e as medianas $m_b = 60$ mm e $m_c = 90$ mm, relativas aos lados dos quais se desconhece os ângulos opostos. O perímetro do triângulo vale:

(A) 270 mm. (B) 281 mm. (C) 292 mm. (D) 303 mm. (E) 314 mm.

Questão 24: O lugar geométrico dos pontos, tais que a soma dos quadrados de suas distâncias a dois pontos A e B dados seja constante e igual a 3600 mm^2 é:

(A) Uma reta perpendicular a AB e que passa por C.
(B) Um círculo de raio = 60 mm.
(C) Uma elipse de eixos 40 e 60 mm.
(D) Uma hipérbole de eixos 40 e 60 mm.
(E) Nenhuma das acima.

ITA 1972, Questão 24.

Questão 25: O lugar geométrico dos pontos, tais que a diferença dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos A e B seja constante e igual a 2500 mm^2, passa pelo ponto C e é:

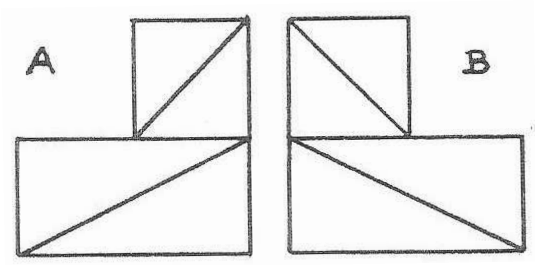
(A) Um círculo.
(B) Uma reta.
(C) Uma elipse.
(D) Uma hipérbole.
(E) Nenhum destes.

ITA 1972, Questão 25.

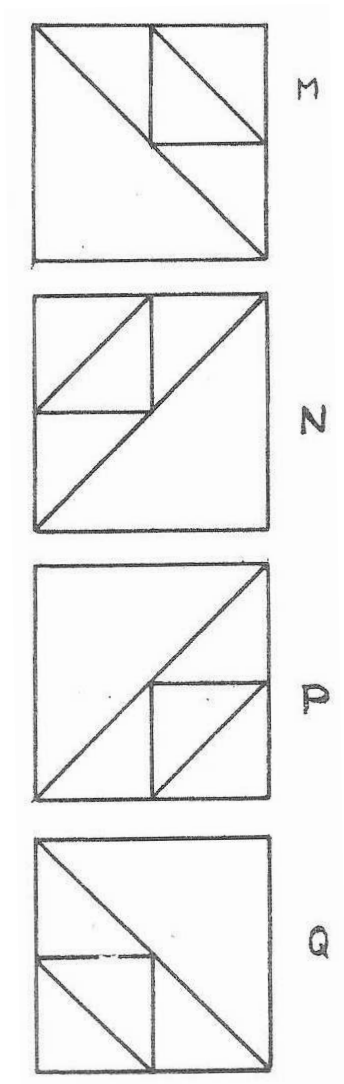
II.19 Vestibular de 1971

Questão 01: Sendo A e B as vistas de frente e lateral esquerda, respectivamente, de uma peça no 1º diedro, determine a vista superior correspondente.

(A) M. (B) N. (C) P. (D) Q. (E) Nenhuma destas.

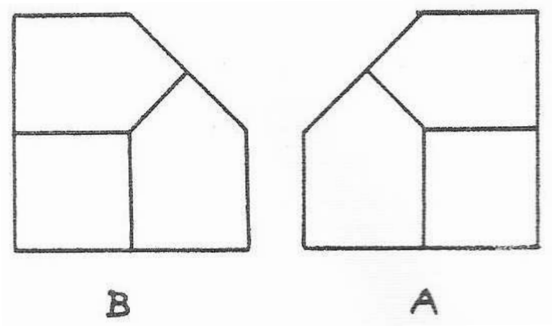


ITA 1971, Questão 01.

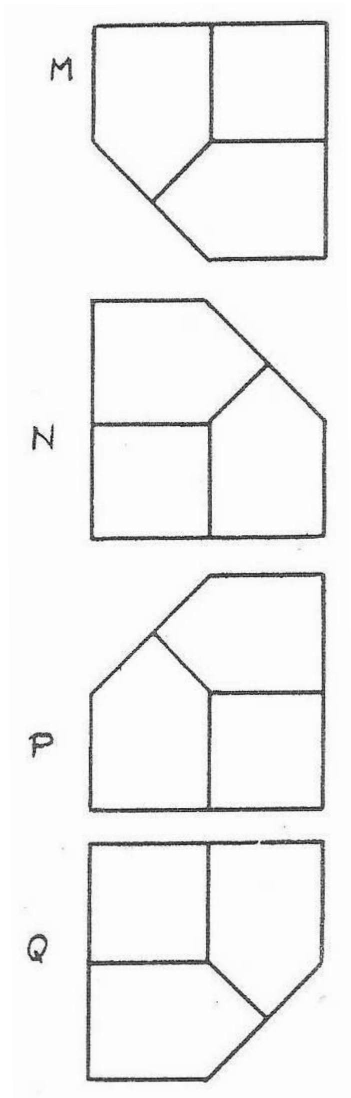


Questão 02: Sendo A e B as vistas de frente e lateral esquerda, respectivamente, de uma peça no 3º diedro, determine a vista superior correspondente.

(A) M. (B) N. (C) P. (D) Q. (E) Nenhuma destas.



ITA 1971, Questão 02.



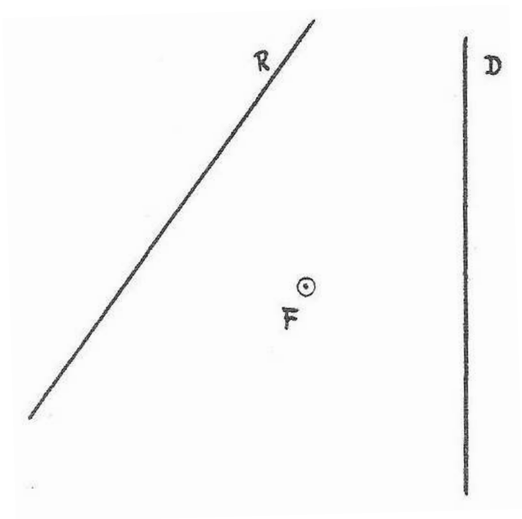
Questão 03: Traçar uma circunferência que tangencie duas outras circunferências de centros O e O_1. Sabendo-se que O_1 tem um raio de 20 mm e P é um ponto de tangência, então o raio vale:

(A) 42 mm. (B) 35 mm. (C) 51 mm. (D) 44 mm. (E) 29 mm.

ITA 1971, Questão 03.

Questão 04: Sendo F e D o foco e a diretriz de uma parábola e, dada a reta R, para se determinar o ponto de interseção desta reta com a parábola, sem construir a mesma, usa-se uma construção que se chama:

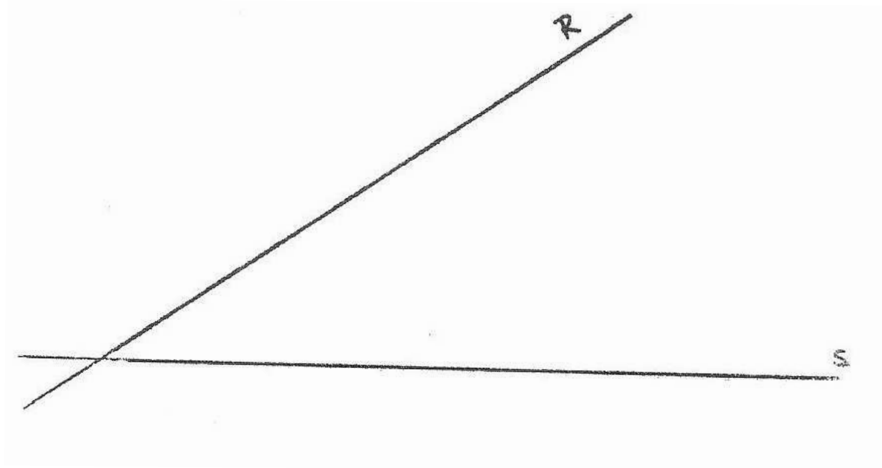
(A) Média Geométrica. (B) Segmento Capaz. (C) Média e Extrema Razão. (D) Segmento Áureo. (E) Quarta Proporcional.



ITA 1971, Questão 04.

Questão 05: Dadas as retas R e S, traçar as antiparalelas às duas retas dadas, segundo um ângulo de 60°, de modo que sejam concorrentes em um ponto sobre R. A razão dos segmentos formados pela interseção destas antiparalelas vale:

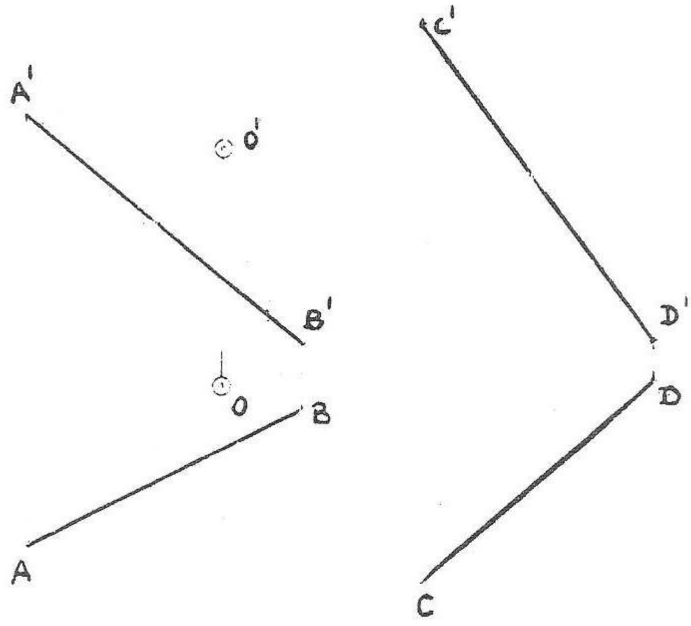
(A) 1:1. (B) 1:2. (C) 1:3. (D) 1:4. (E) 1:5.



ITA 1971, Questão 05.

Questão 06: Dado o ponto O e as retas AB e CD, passar por O uma reta ortogonal a CD e que se apoie em AB. A distância de O ao ponto de apoio vale:

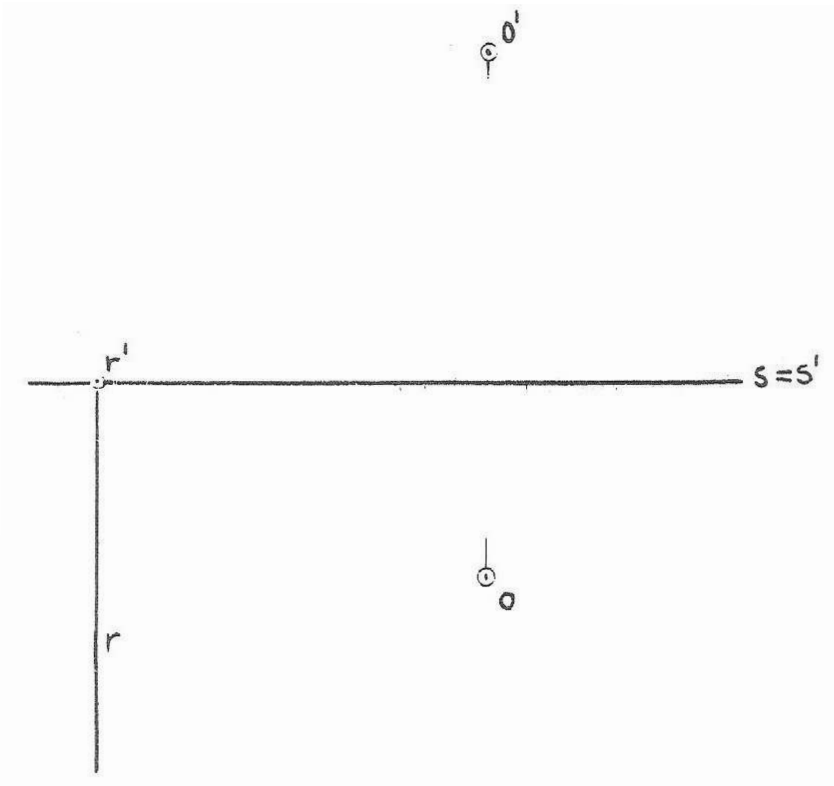
(A) 17 mm. (B) 22 mm. (C) 28 mm. (D) 33 mm. (E) 36 mm.



ITA 1971, Questão 06.

Questão 07: Dadas as retas r e s concorrentes, sobre o PH e fazendo 90^o entre si. Dado o ponto O, achar sobre r um ponto M e sobre s um ponto N, tais que o ângulo $M\hat{O}N$ seja reto e que MN seja mínimo. O comprimento MN vale:

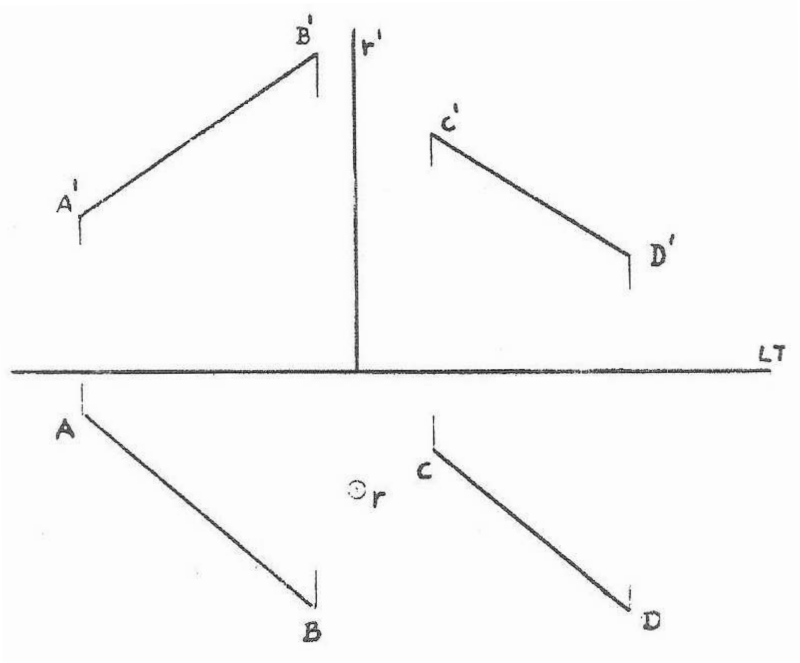
(A) 53 mm. (B) 70 mm. (C) 87 mm. (D) 99 mm. (E) 112 mm.



ITA 1971, Questão 07.

Questão 08: De quantos graus deve-se girar a projeção horizontal de AB em torno de r até que AB fique ortogonal a CD?

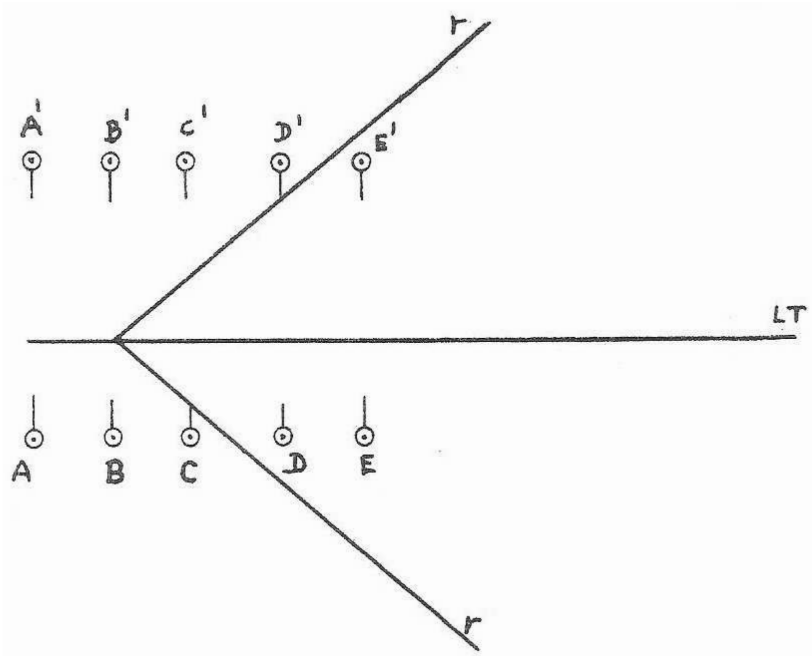
(A) 74°. (B) 104°. (C) 124°. (D) 144°. (E) 164°.



ITA 1971, Questão 08.

Questão 09: Dada a reta r, determinar os traços do plano que tem r como bissetriz do ângulo formado por seus traços. Qual dos pontos dados pertence a este plano?

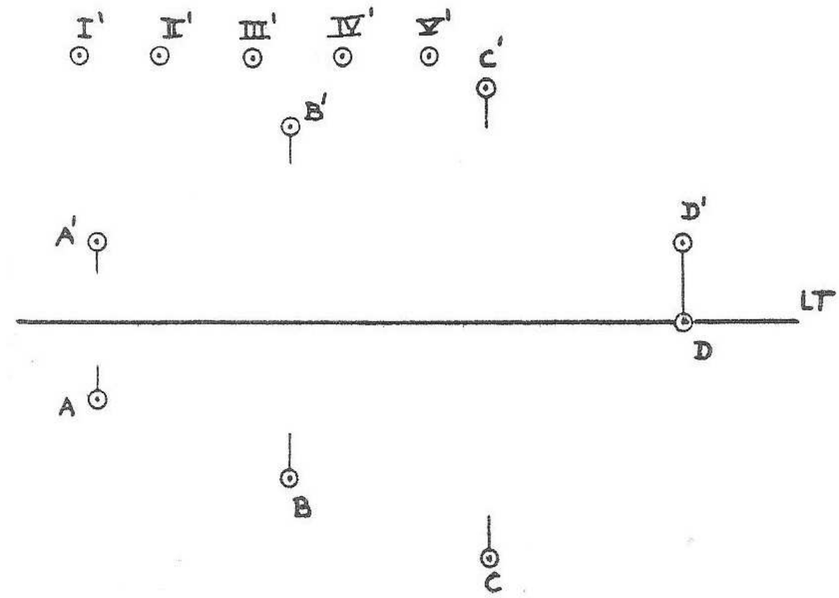
(A) A. (B) B. (C) C. (D) D. (E) E.



ITA 1971, Questão 09.

Questão 10: Determinar o eixo em torno do qual se possa girar A a fim de coincidir com B e C a fim de coincidir com D. O eixo pedido passa por:

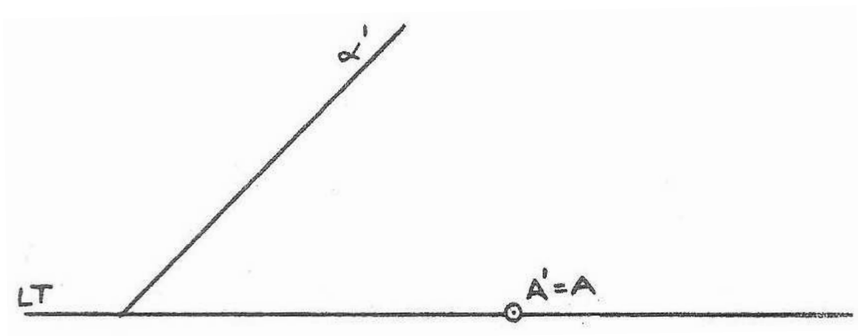
(A) I'. (B) II'. (C) III'. (D) IV'. (E) V'.



ITA 1971, Questão 10.

Questão 11: Dado o ponto A sobre a LT e o traço vertical do plano α. Determine o traço horizontal, sabendo que o plano dista 30 mm do ponto A. O ângulo que o plano α forma com o PH vale:

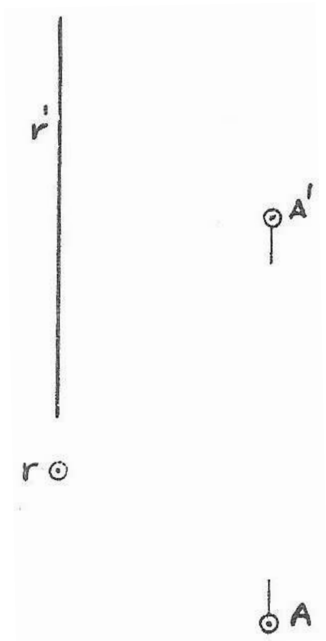
(A) 45º. (B) 53º. (C) 61º. (D) 69º. (E) 77º.



ITA 1971, Questão 11.

Questão 12: Determine o ângulo entre as retas que se apoiam na reta r, no ponto A, sabendo que cada uma delas faz ângulos iguais com ambos os planos de projeção.

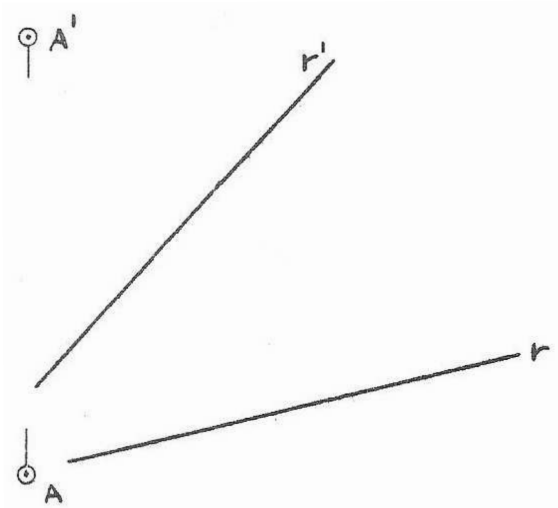
(A) 30°. (B) 40°. (C) 50°. (D) 60°. (E) 70°.



ITA 1971, Questão 12.

Questão 13: Dado o ponto A e a reta r, determinar o ângulo formado por duas retas que se apoiam em r e passam por A e que fazem com o PH ângulos de $60°$.

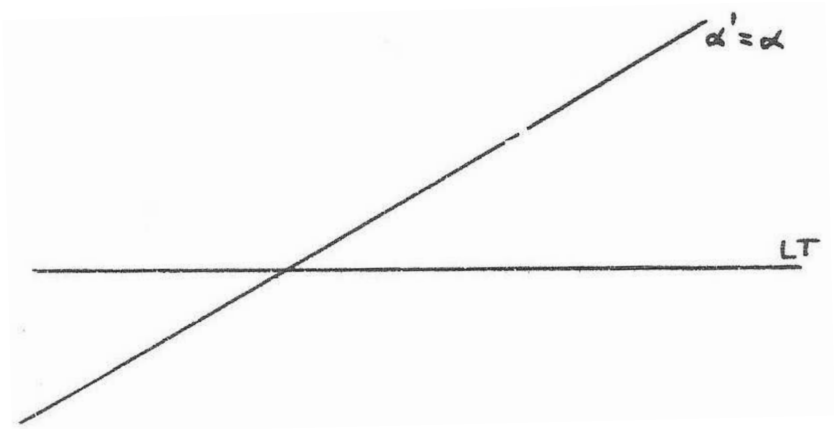
(A) Impossível. (B) 27°. (C) 38°. (D) 49°. (E) 60°.



ITA 1971, Questão 13.

Questão 14: Dado o plano α, determinar o ângulo formado por seus traços no 1°.

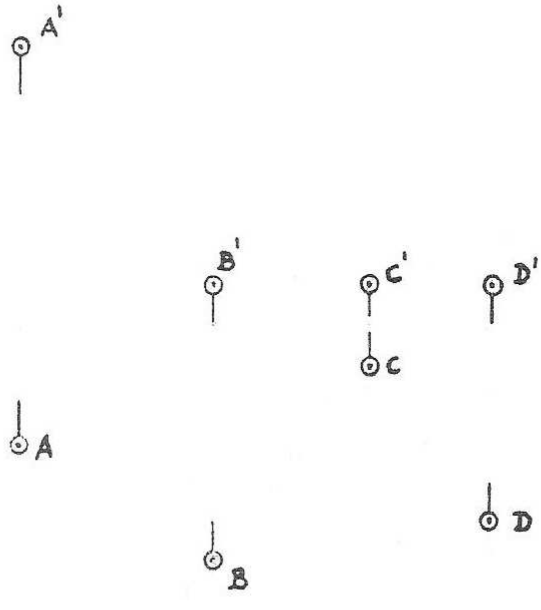
(A) 42°. (B) 72°. (C) 90°. (D) 108°. (E) 138°.



ITA 1971, Questão 14.

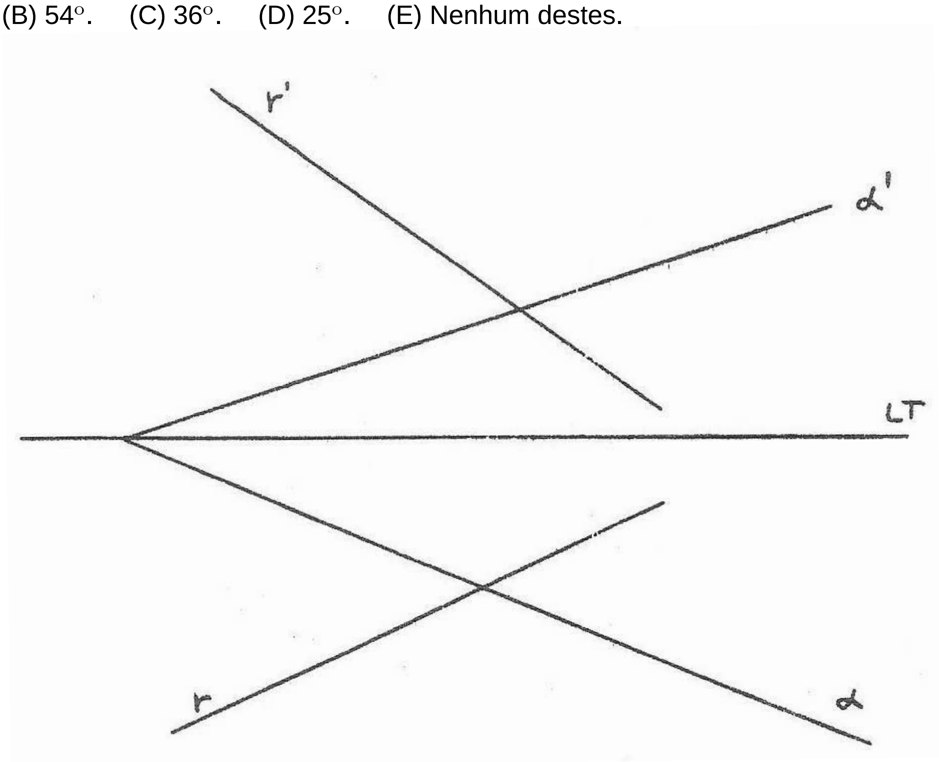
Questão 15: Determinar o ponto O equidistante dos pontos A, B, C e D. A distância de O a qualquer destes pontos vale:

(A) 37 mm. (B) 44 mm. (C) 51 mm. (D) 58 mm. (E) 66 mm.



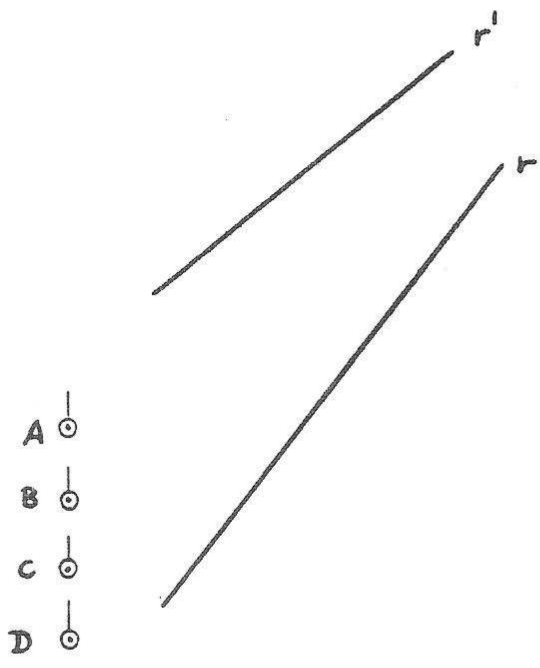
ITA 1971, Questão 15.

Questão 16: Dados a reta r e o plano α, determine o ângulo que a reta faz com o plano.
(A) 71º. (B) 54º. (C) 36º. (D) 25º. (E) Nenhum destes.



ITA 1971, Questão 16.

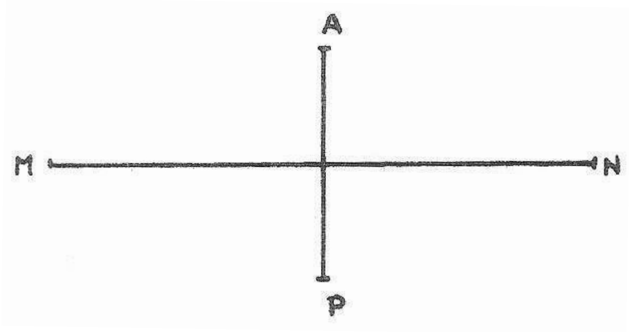
Questão 17: Dada a reta r, qual dos pontos dados determina com esta reta um plano cujos traços fazem ângulos iguais com a LT?
(A) A. (B) B. (C) C. (D) D. (E) Nenhum destes.



ITA 1971, Questão 17.

Questão 18: O triângulo ABC equilátero é inscrito em um círculo. Pede-se o valor do ângulo $B\hat{A}C$ no PH. Sabe-se que a projeção do círculo no PH é a elipse de eixos dados MN e PA.

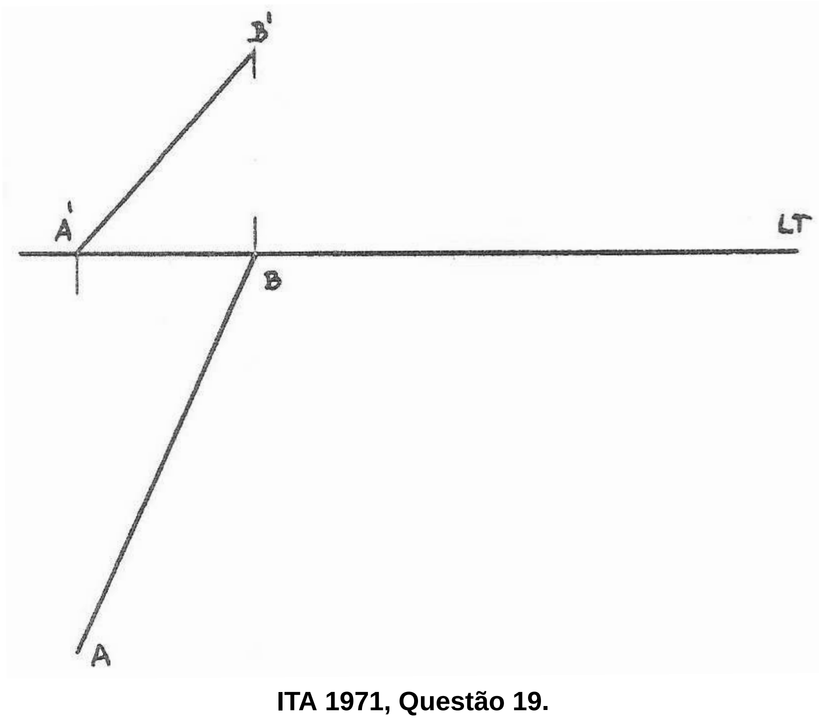
(A) 83°. (B) 90°. (C) 96°. (D) 101°. (E) 107°.



ITA 1971, Questão 18.

Questão 19: Dada a reta AB, apoiar sobre os planos de projeção um segmento de perfil MN, de comprimento igual a 60 mm, de tal modo que o seu ponto médio pertença à reta dada. Podemos afirmar que a relação entre os comprimentos das projeções vertical e horizontal de MN vale:

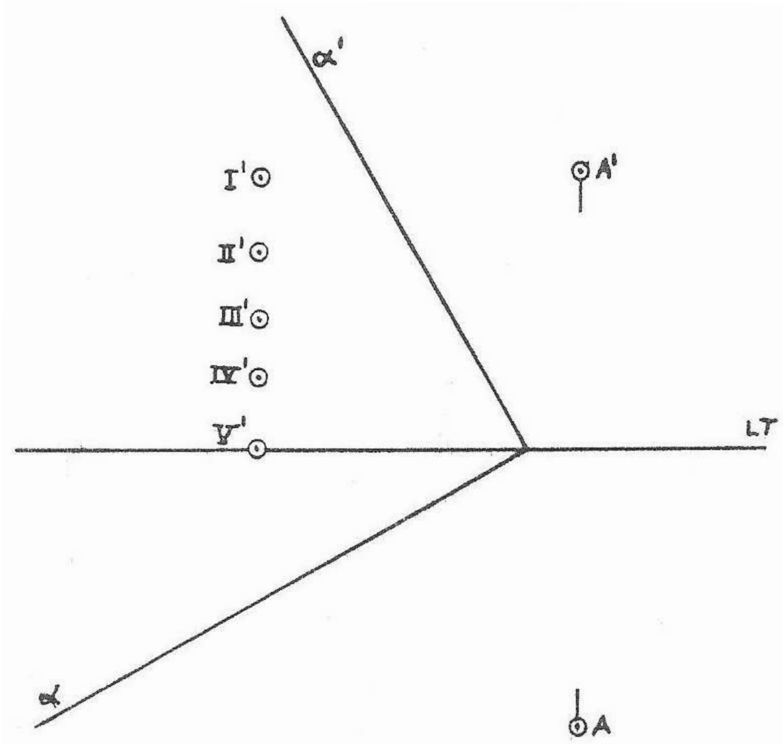
(A) 1:0,1. (B) 1:1. (C) 1:2,5. (D) 1:5. (E) Impossível.



ITA 1971, Questão 19.

Questão 20: Representar as projeções de um tetraedro regular, dado um vértice A. Sabe-se que a face oposta a A está sobre o plano α e que esta face tem um lado paralelo ao traço horizontal do plano α e é de menor cota. Que ponto é outro vértice do tetraedro:

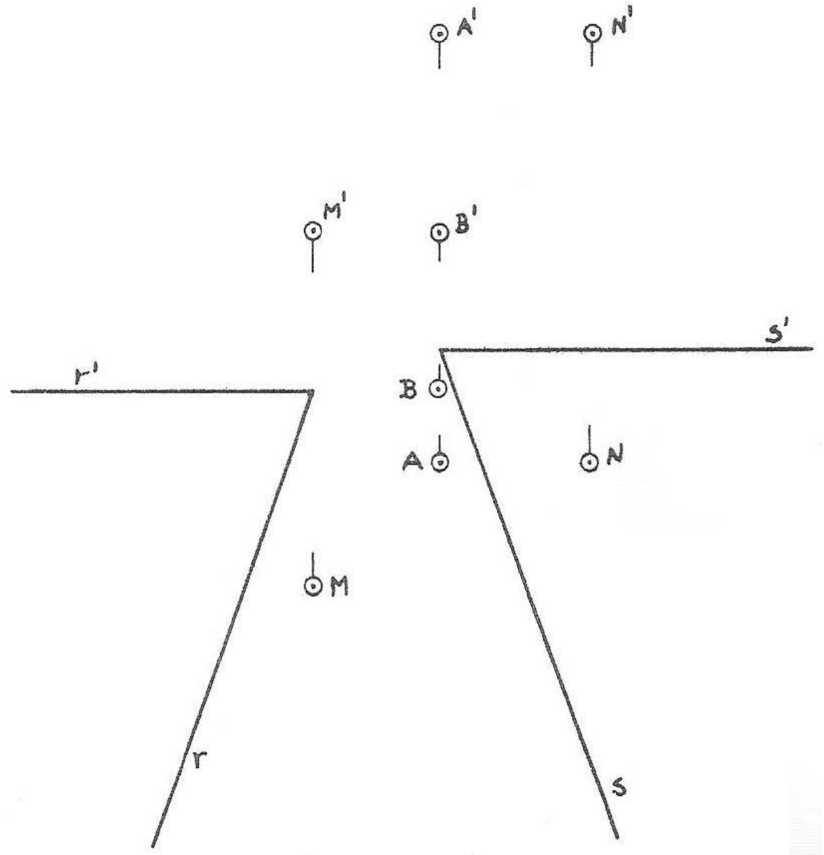
(A) I'. (B) II'. (C) III'. (D) IV'. (E) V'.



ITA 1971, Questão 20.

Questão 21: Dadas as retas r, s, e t, trace pelos pontos M e N um plano que faça ângulos iguais com as retas r, s e t. A reta t é definida pelos pontos A e B. O menor ângulo que as retas formam com o plano vale:

(A) 96°. (B) 83°. (C) 70°. (D) 52°. (E) Nenhum destes.



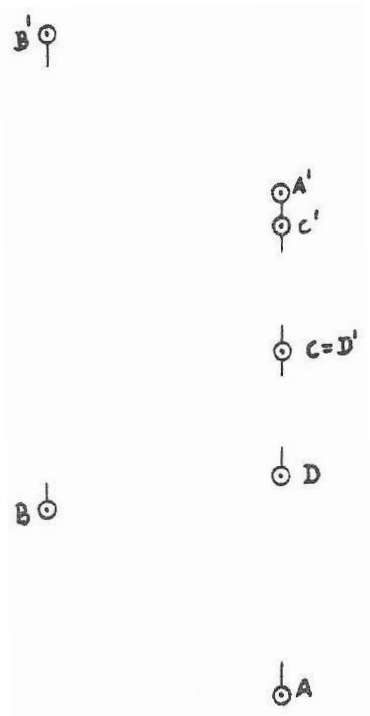
ITA 1971, Questão 21.

Questão 22: No problema anterior, o ângulo que o plano forma com o PH vale:

(A) 97°. (B) 85°. (C) 71°. (D) 58°. (E) Nenhum destes.

Questão 23: Dados os pontos A e B e a reta CD, traçar por A uma reta que se apoie em CD e diste 50 mm do ponto B. Podemos afirmar então que o menor ângulo desta reta com a reta CD vale:

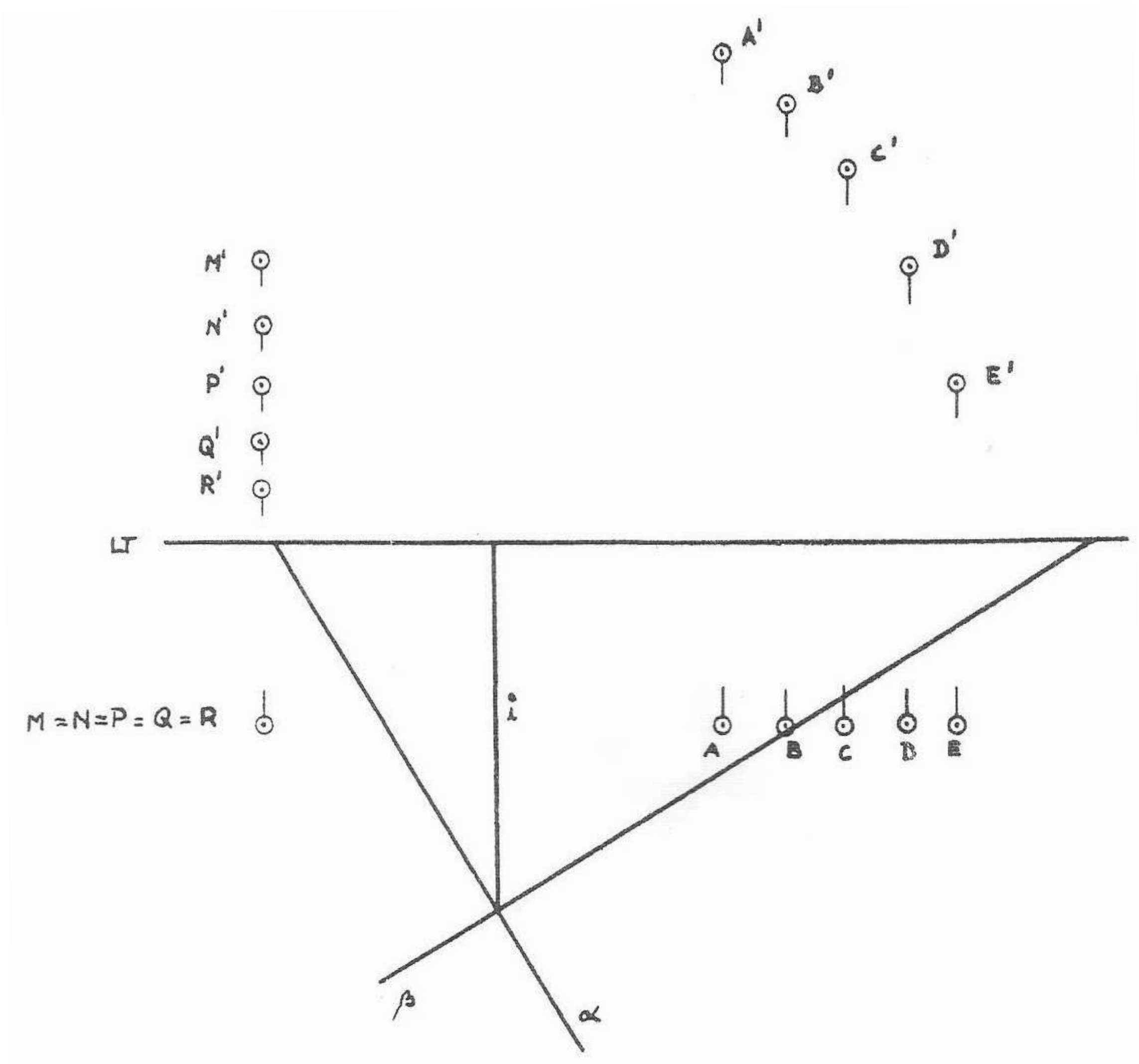
(A) 40^o. (B) 50^o. (C) 60^o. (D) 70^o. (E) Impossível.



ITA 1971, Questão 23.

Questão 24: Dadas as projeções horizontais de 2 planos α e β e de suas interseção i, determine as projeções verticais dos planos, sabendo que os planos formam um ângulo de 120^{o} no espaço. Qual dos pontos pertence ao plano α?

(A) A. (B) B. (C) C. (D) D. (E) E.



ITA 1971, Questão 24.

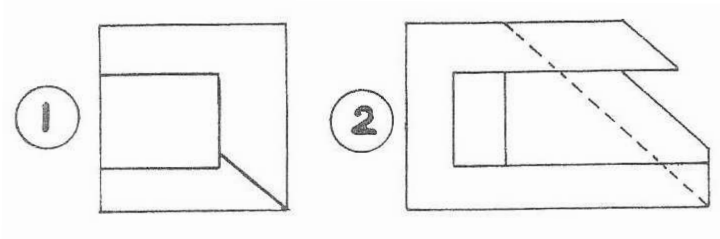
Questão 25: No problema anterior, qual dos pontos pertence ao plano β?

(A) M. (B) N. (C) P. (D) Q. (E) R.

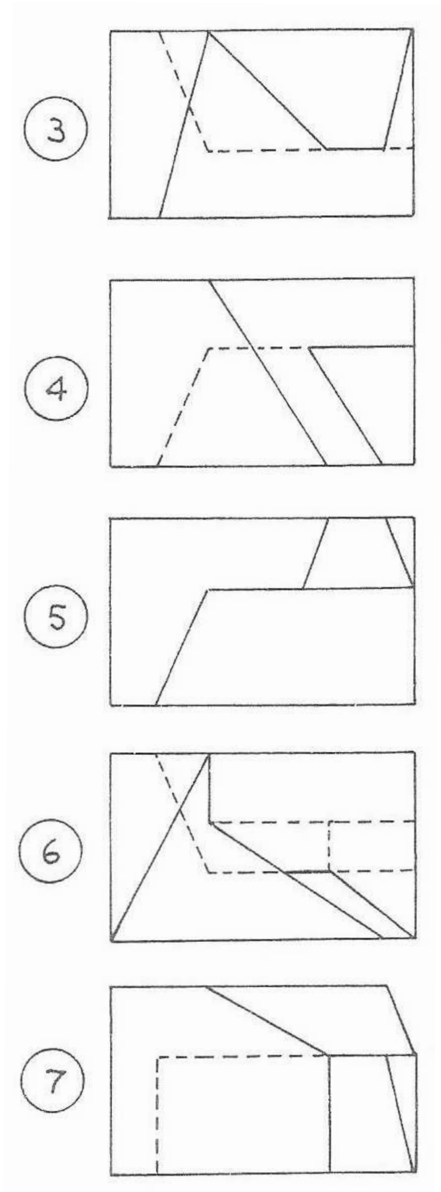
II.20 Vestibular de 1970

Questão 01: Dadas as vistas 1 (lateral) e 2 (de frente), indique a vista superior correspondente. A peça está no 1^{o} diedro.

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6. (E) 7.

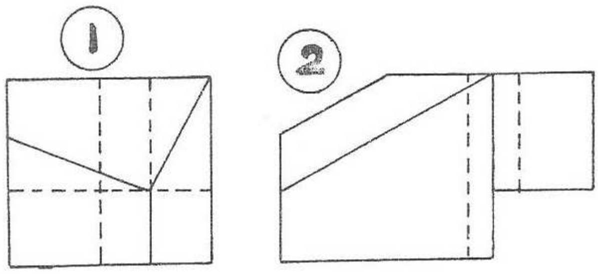


ITA 1970, Questão 01.

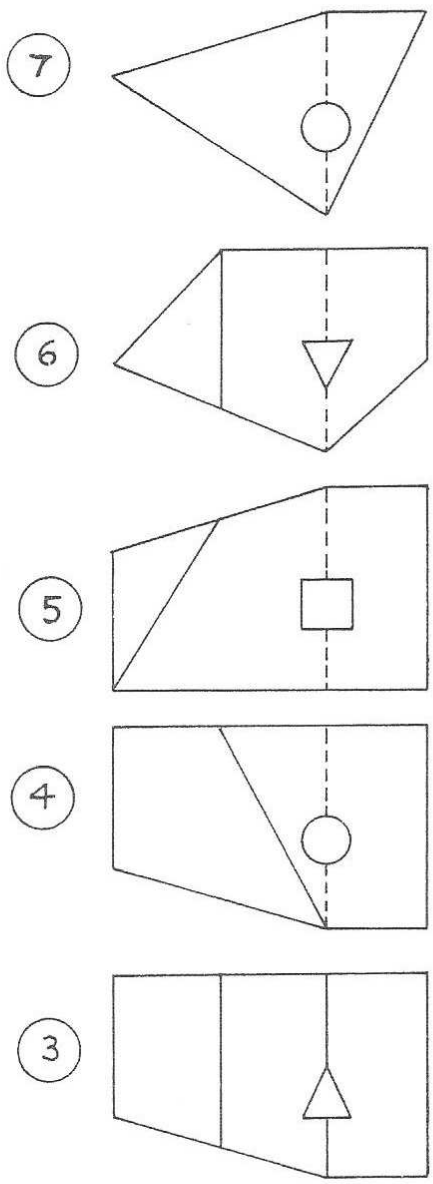


Questão 02: Dadas as vistas 1 (lateral) e 2 (de frente), escolha a vista superior correspondente. A peça está no 3^o diedro.

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6. (E) 7.

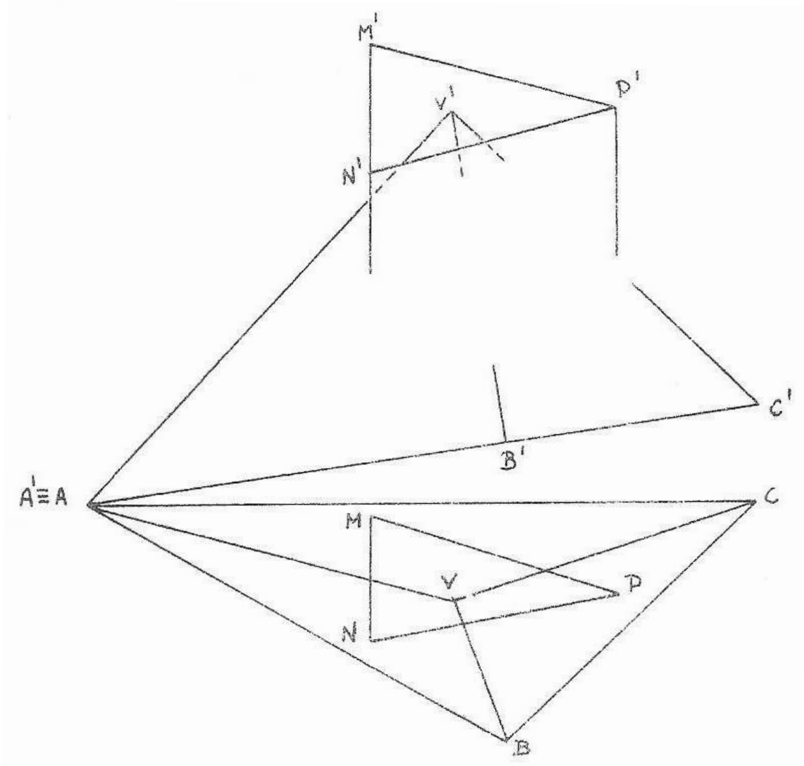


ITA 1970, Questão 02.



Questão 03: Dada a pirâmide $VABC$ e o prisma triangular vertical MNP, determine o comprimento total das arestas produzidas pela interseção das duas figuras.

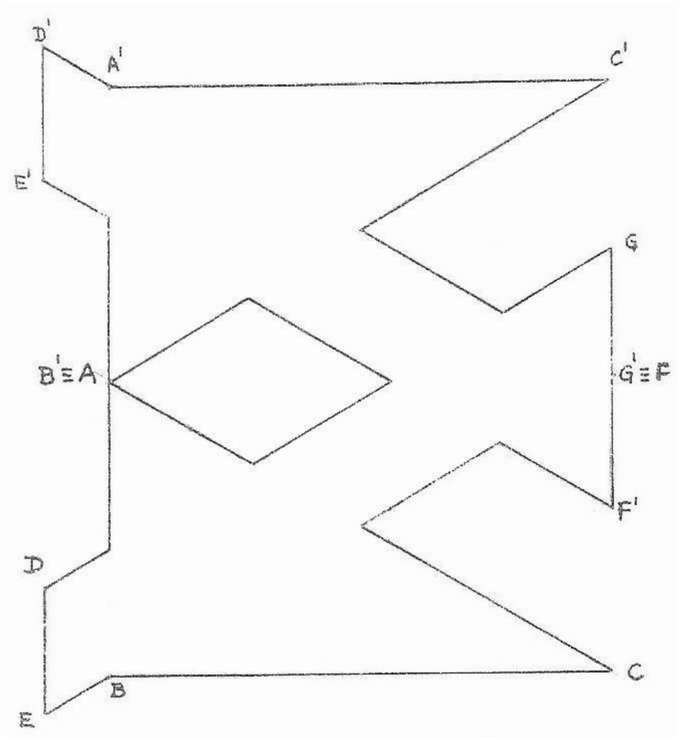
(A) 81 mm. (B) 128 mm. (C) 175 mm. (D) 217 mm. (E) 253 mm.



ITA 1970, Questão 03.

Questão 04: Dados dois planos ABC e $DEFG$, determine o comprimento do segmento interseção dos dois planos.

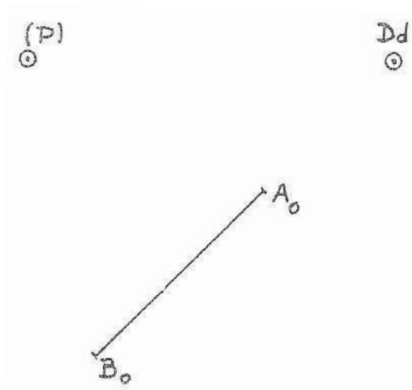
(A) 46 mm. (B) 15 mm. (C) 30 mm. (D) 23 mm. (E) 52 mm.



ITA 1970, Questão 04.

Questão 05: Representar a perspectiva exata de um retângulo $ABCD$ situado no geometral, sabendo-se que o centro do retângulo pertence ao plano vertical de projeção e sendo P o ponto principal e D_d o ponto de distância da direita, então a soma das diagonais, em perspectiva, vale:

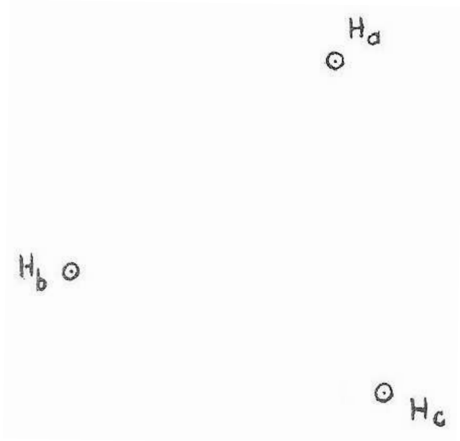
(A) 65 mm. (B) 75 mm. (C) 85 mm. (D) 95 mm. (E) 105 mm.



ITA 1970, Questão 05.

Questão 06: Construir o triângulo ABC, sendo dados os pés das alturas H_a, H_b e H_c. Sabendo-se que $\hat{A}$ é obtuso, então podemos afirmar que o perímetro vale:

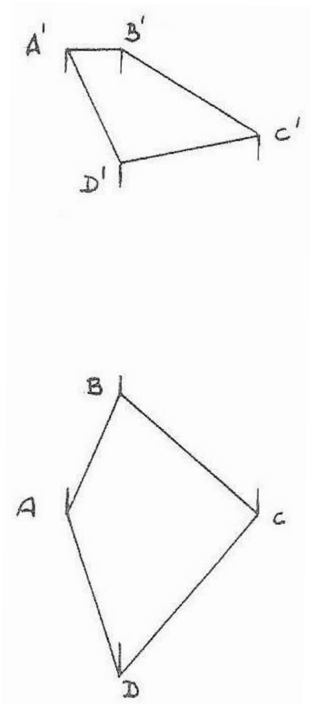
(A) 86 mm. (B) 126 mm. (C) 156 mm. (D) 186 mm. (E) 216 mm.



ITA 1970, Questão 06.

Questão 07: Sendo $ABCD$ resultado da seção em um octaedro regular, por um plano, determine o comprimento da aresta deste octaedro. Sabe-se que acima do plano secante só existe um vértice, e o vértice oposto está sobre a linha de terra.

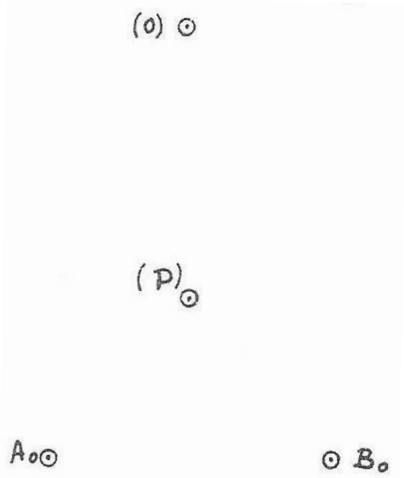
(A) 15 mm. (B) 22 mm. (C) 31 mm. (D) 38 mm. (E) 44 mm.



ITA 1970, Questão 07.

Questão 08: Determinar o perímetro de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de diâmetro AB, representado em perspectiva exata, sabendo-se que dois lados são fronto horizontais. O é o ponto do observador e P é o ponto principal.

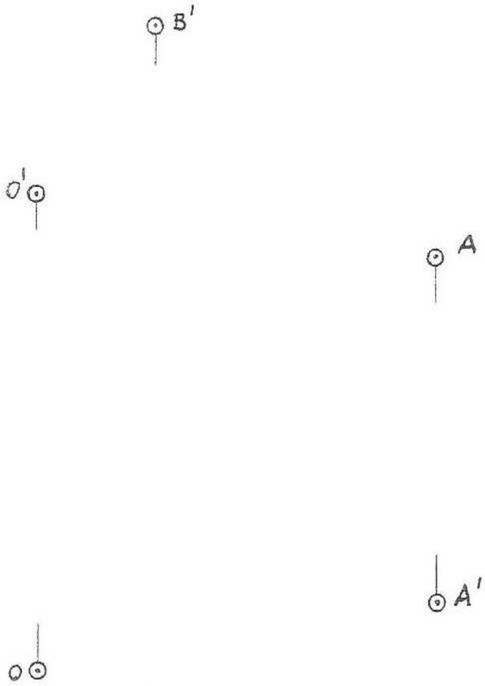
(A) 85 mm. (B) 103 mm. (C) 127 mm. (D) 144 mm. (E) 70 mm.



ITA 1970, Questão 08.

Questão 09: Determine o plano α que passa pelo ponto A, tangente a uma esfera de raio 30 mm e centro O no ponto B, de modo que seus traços estejam voltados para a esquerda. O ponto A está no 1^o bissetor. O maior ângulo entre seus traços vale:

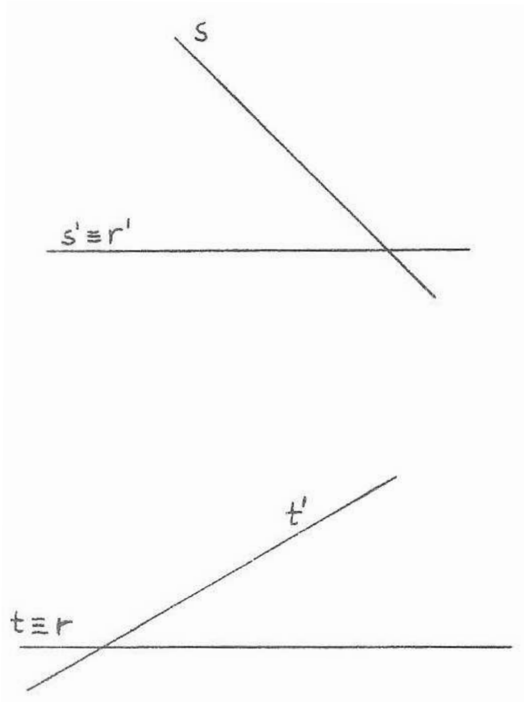
(A) 73°. (B) 108°. (C) 125°. (D) 155°. (E) 180°.



ITA 1970, Questão 09.

Questão 10: Represente as projeções de um triângulo ABC pertencente a um plano α dado pelas retas s e t, de tal modo que seu perímetro seja o menor possível, sabendo-se que A está sobre as retas r e s e no 1^{o} bissetor, B sobre o PH e C sobre o PV. Quanto vale este perímetro na projeção vertical?

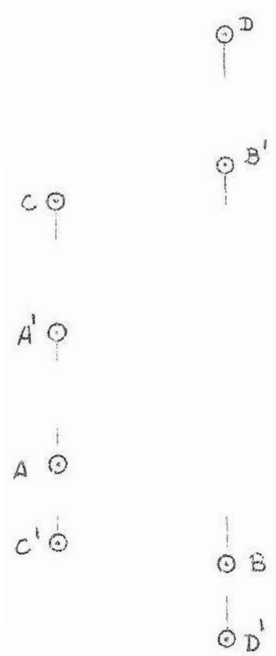
(A) 76 mm. (B) 92 mm. (C) 109 mm. (D) 121 mm. (E) 153 mm.



ITA 1970, Questão 10.

Questão 11: Dadas duas retas r e s, definidas pelos pontos A e B e C e D, respectivamente. Determine a menor distância entre elas.

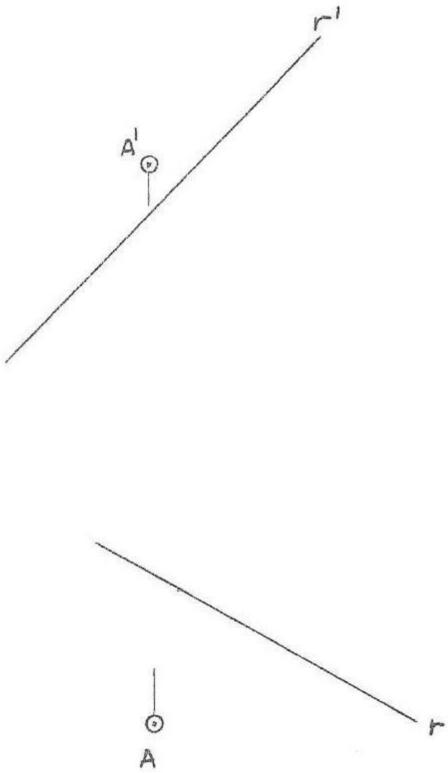
(A) 0,5 cm. (B) 1,3 cm. (C) 1,8 cm. (D) 2,4 cm. (E) Nenhuma destas.



ITA 1970, Questão 11.

Questão 12: Dados a reta r e um ponto A, determine o ângulo de que se deve girar o ponto A em torno de r a fim de que pertença ao PV e tenha a maior cota possível. A reta r concorre com a LT.

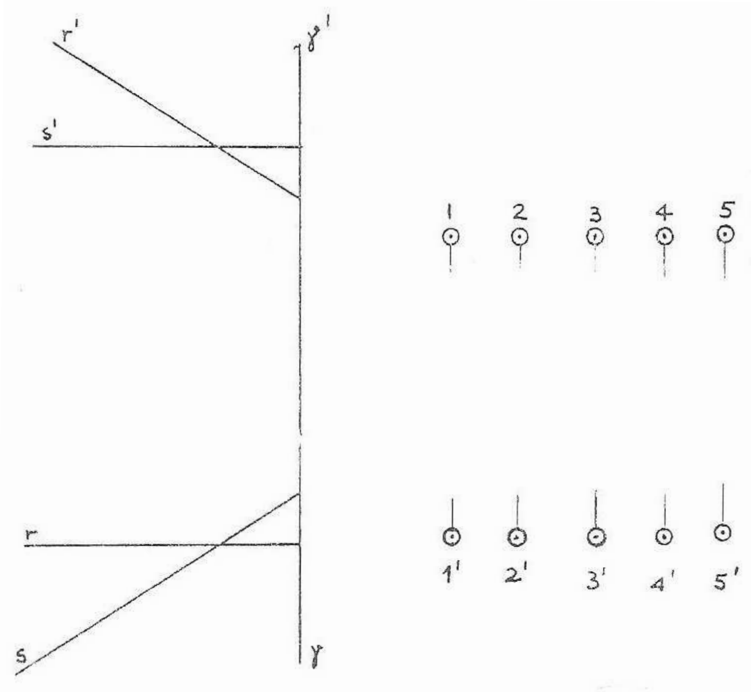
(A) 45^o. (B) 72^o. (C) 98^o. (D) 120^o. (E) Nenhum destes.



ITA 1970, Questão 12.

Questão 13: Determine o ponto que pertence ao plano β, bissetor do menor ângulo diedro formado pelo plano α e o plano de perfil γ. O plano α é dado pelas retas r e s.

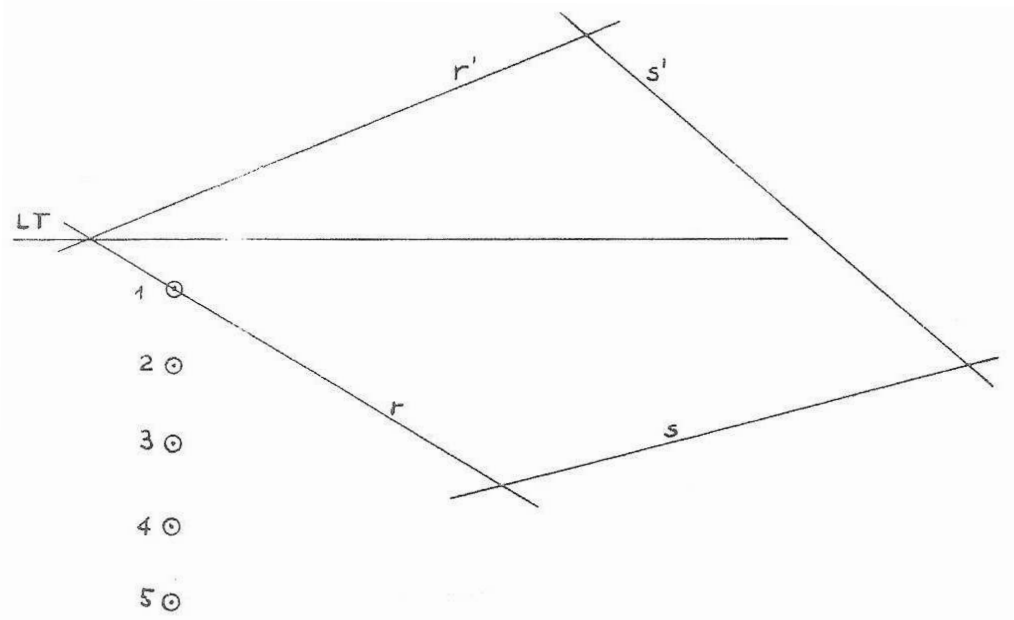
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.



ITA 1970, Questão 13.

Questão 14: Dadas duas retas r e s, e desejando-se uni-las por uma terceira reta AB, horizontal, e de comprimento igual a 40 mm, assinale o ponto pelo qual passa a projeção horizontal do suporte desta reta:

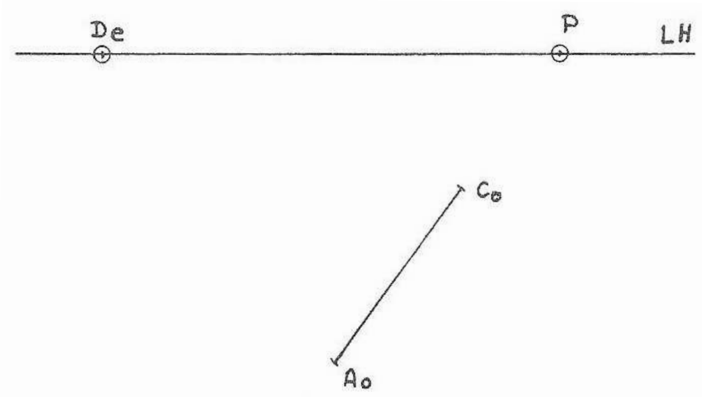
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.



ITA 1970, Questão 14.

Questão 15: Determine a perspectiva cônica de uma pirâmide reta de base quadrada $ABCD$. Sabe-se que a base é paralela ao plano do horizonte e a pirâmide está abaixo deste. Sabendo ainda que a altura é igual à diagonal da base, então o vértice está à mesma altura horizontal do ponto:

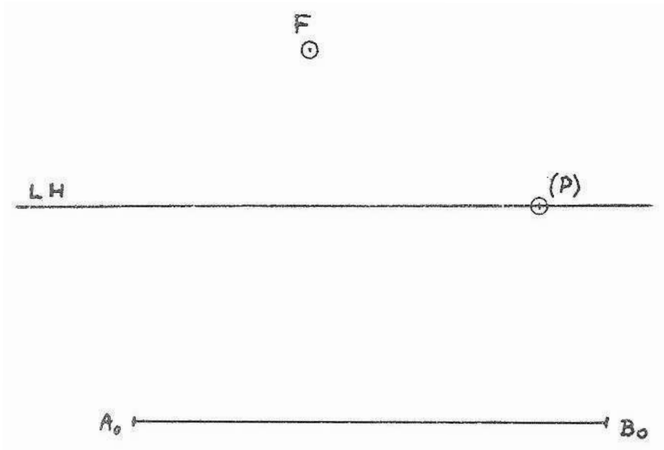
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.



ITA 1970, Questão 15.

Questão 16: Traçar a perspectiva cônica do triângulo equilátero ABC do geometral, sabendo-se que F é o ponto de fuga de uma reta que forma 45° com o quadro e P é o ponto principal. O perímetro do triângulo, em projeção, vale:

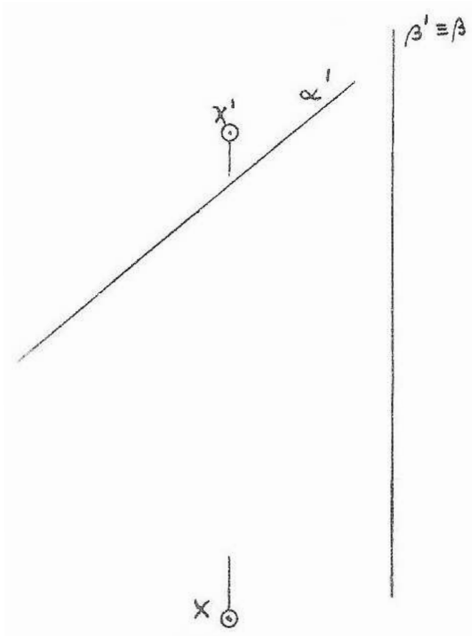
(A) 129 mm. (B) 147 mm. (C) 172 mm. (D) 156 mm. (E) 110 mm.



ITA 1970, Questão 16.

Questão 17: Determine a distância do ponto X ao plano bissetor do menor diedro formado pelos planos α e β. O traço horizontal de α forma com a LT um ângulo igual à metade do ângulo que ele forma com o plano de perfil. X está no $1^{\rm o}$ bissetor.

(A) 25 mm. (B) 30 mm. (C) 35 mm. (D) 40 mm. (E) 45 mm.



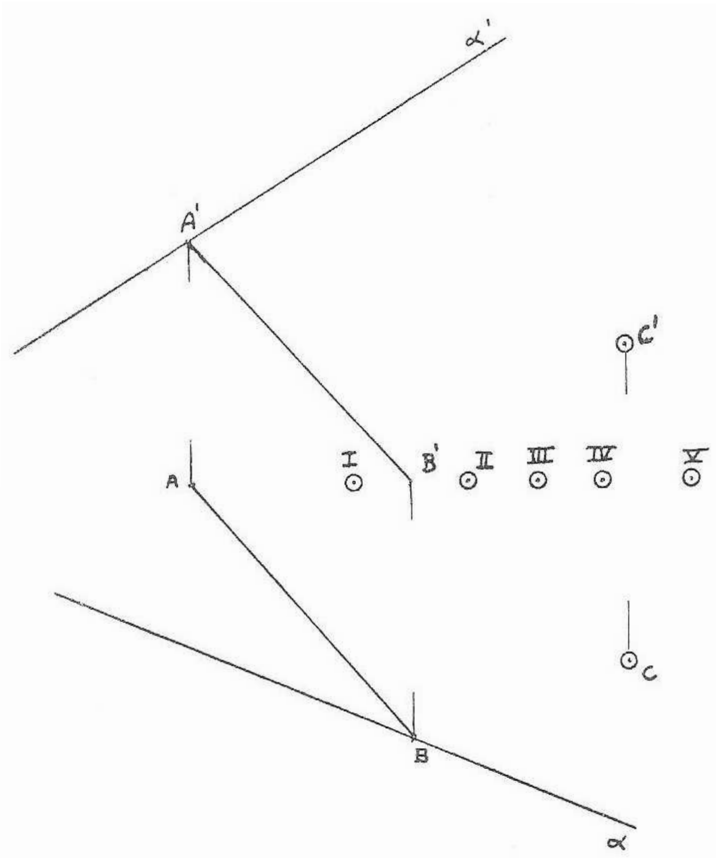
ITA 1970, Questão 17.

Questão 18: Construa um triângulo ABC, sendo dados o ângulo $\hat{A} = 40^{\rm o}$, a mediana relativa ao vértice A igual a 72 mm e a mediana relativa ao vértice B igual a 51 mm. O perímetro do triângulo assim obtido vale:

(A) 182 mm. (B) 150 mm. (C) 318 mm. (D) 224 mm. (E) 205 mm.

Questão 19: Dados o plano α, uma reta AB pertencente a este plano e um ponto C, determine os traços do plano β que forme com o plano α um ângulo de 90^o, seja paralelo a AB e contenha C. Qual dos pontos pertence a β?

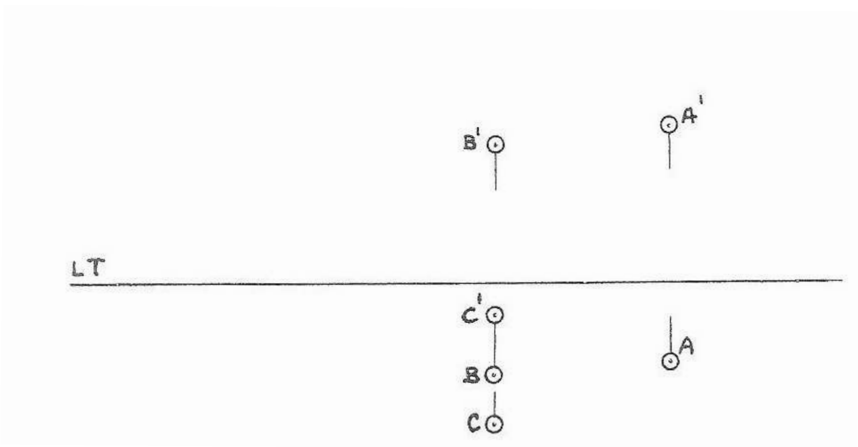
(A) I. (B) II. (C) III. (D) IV. (E) V.



ITA 1970, Questão 19.

Questão 20: Determinar os ângulos que o plano α forma com o PV e o PH, sabendo-se que ele contém o ponto A, é paraleloà reta CB e é perpendicular ao plano β QUE FORMA ângulos de 35^o e 50^o com o PV e PH, respectivamente. O plano β está no 1^o diedro e tem seus traços em ângulo agudo e com sua abertura voltada para a direita.

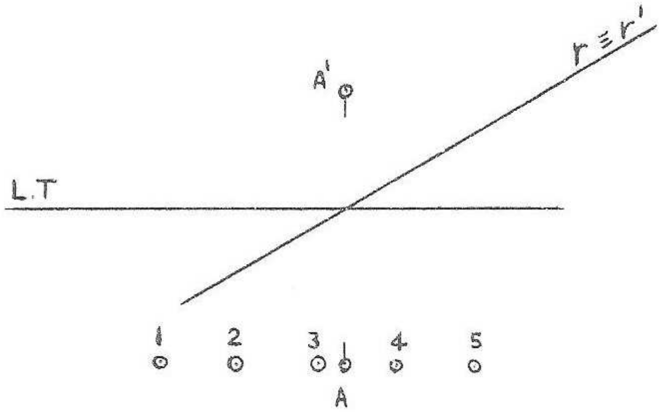
(A) 32^o 90^o. (B) 55^o 80^o. (C) 72^o 45^o. (D) 60^o 62^o. (E) 84^o 29^o.



ITA 1970, Questão 20.

Questão 21: Determine os traços do plano α que contém o ponto A, é paralelo à reta r e forma 60^o com o PV. O traço horizontal do plano passa pelo ponto:

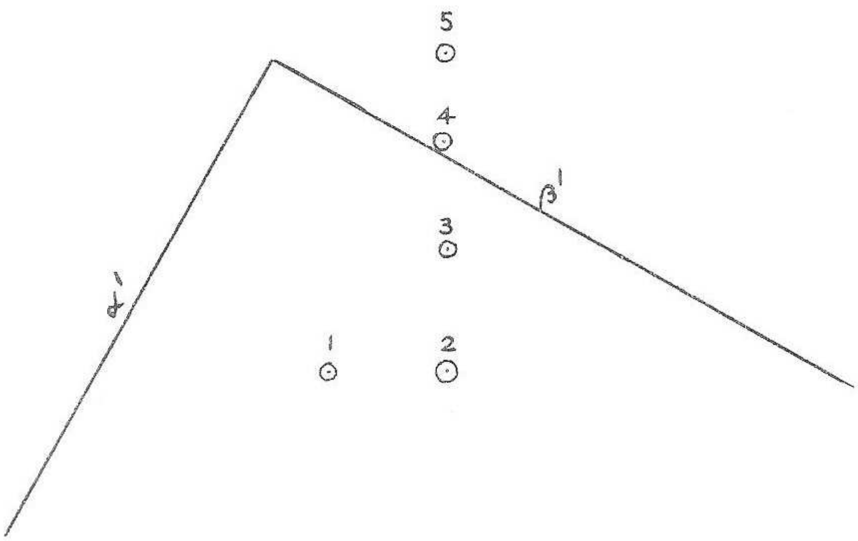
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.



ITA 1970, Questão 21.

Questão 22: Sendo dados os planos α e β perpendiculares ao 2º bissetor (par), determine os traços do plano bissetor dos diedros obtusos formados pelos 2 planos dados. O traço horizontal deste plano passa pelo ponto:

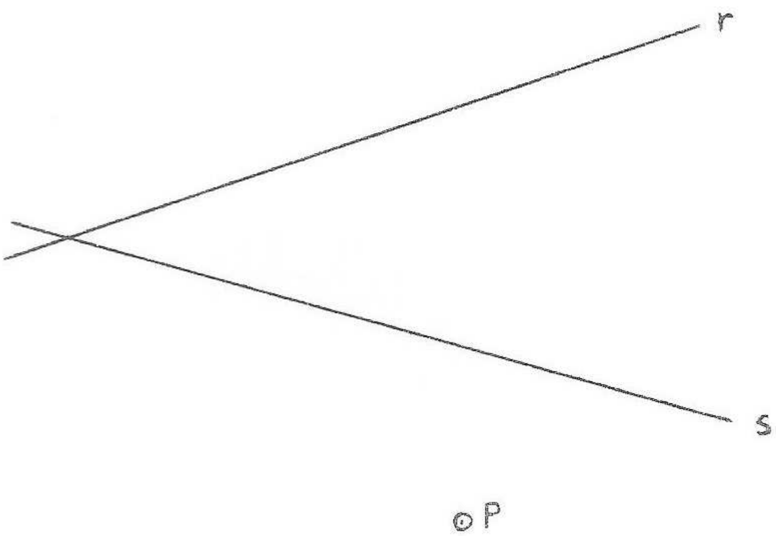
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.



ITA 1970, Questão 22.

Questão 23: Dados as retas r e s e um ponto P, construir um pentágono regular tal que tenha o ponto P como centro e tenha dois vértices consecutivos sobre cada uma das retas dadas. A área deste pentágono vale:

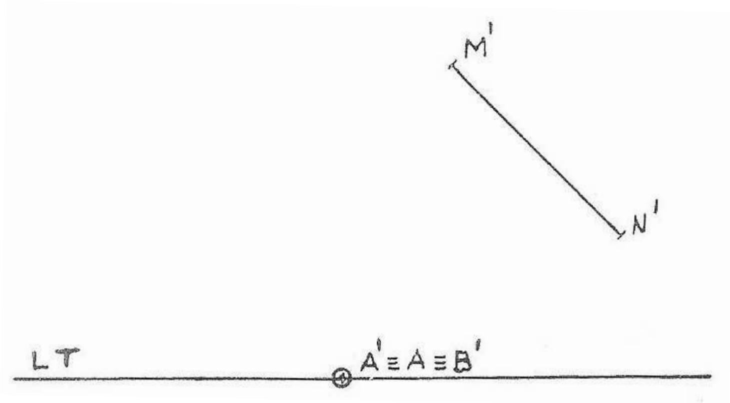
(A) 63 cm^2. (B) 93 cm^2. (C) 133 cm^2. (D) 163 cm^2. (E) 203 cm^2.



ITA 1970, Questão 23.

Questão 24: Determine a altura do tetraedro regular $ABCD$ cuja base ABC pertence ao plano horizontal e cujo vértice D pertence ao plano α definido pela reta MN de maior declive sobre o bissetor par. Suponha o ponto C à direita de A.

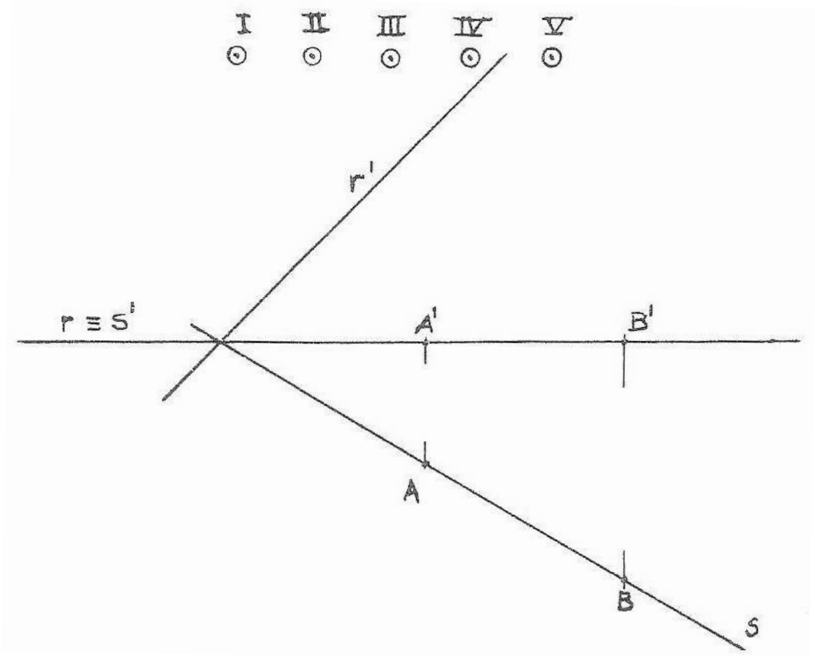
(A) 43 mm. (B) 21 mm. (C) 10 mm. (D) 33 mm. (E) 16 mm.



ITA 1970, Questão 24.

Questão 25: Construir o tetraedro regular $ABCD$, sabendo-se que o plano definido por r e s contém AB e o ponto médio de CD. Supondo que C é mais elevado que D, podemos afirmar que a aresta $B'C'$ passa pelo ponto:

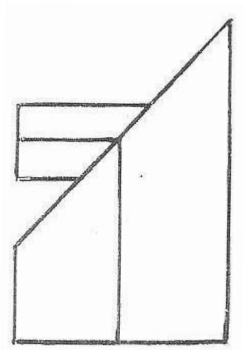
(A) I. (B) II. (C) III. (D) IV. (E) V.



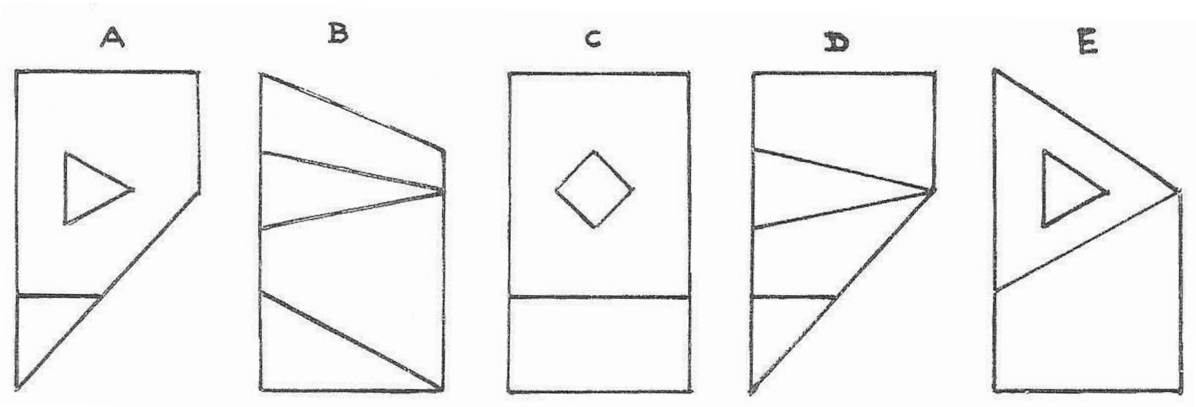
ITA 1970, Questão 25.

II.21 Vestibular de 1969

Questão 01: Dada a projeção vertical de uma peça, indicar a projeção horizontal correspondente:
(A) A. (B) B. (C) C. (D) D. (E) E.

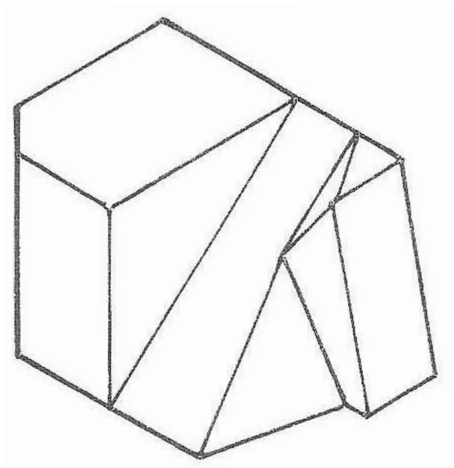


ITA 1969, Questão 01.

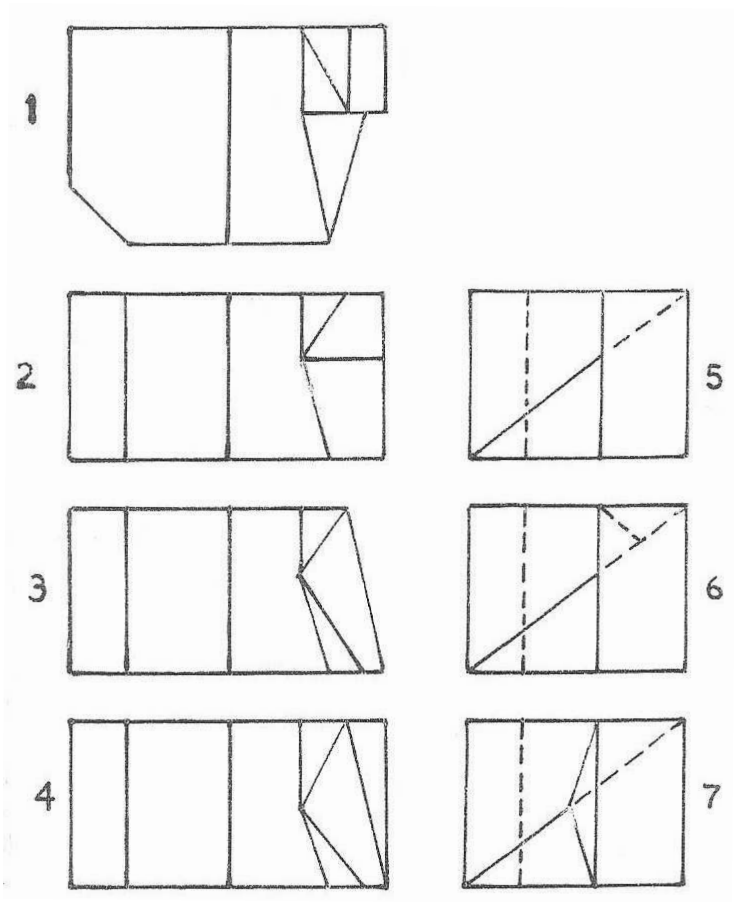


Questão 02: Dada uma peça em perspectiva, indicar qual o conjunto de vistas que caracterizam a peça:

(A) 1 2 5. (B) 1 2 6. (C) 1 3 5. (D) 1 3 7. (E) 1 4 6.



ITA 1969, Questão 02.



Questão 03: Projetando-se, desde uma reta, um espaço de pontos, podemos afirmar que se obtém:

(A) Um feixe de planos.
(B) Um feixe de retas.
(C) Uma estrela de retas.
(D) Uma estrela de planos.
(E) Um plano pontual.

Questão 04: Cortando-se por um plano uma estrela de retas, podemos afirmar que se obtém:

(A) Um plano pontual.
(B) Um plano de retas.
(C) Uma pontual.
(D) Um feixe de retas.
(E) Um feixe de planos.

Questão 05: Dados três pontos co-planares, não alinhados, fazemos passar por cada um deles um plano, de modo que fiquem paralelos e equidistantes entre si. Podemos afirmar:

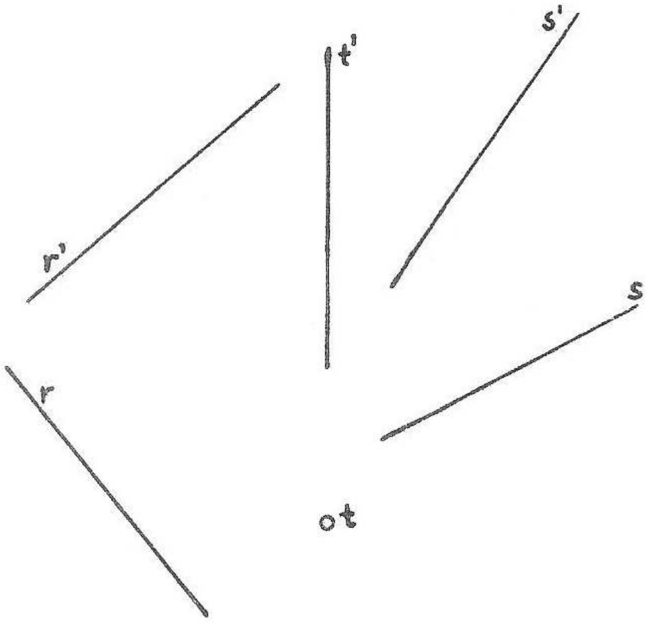
(A) Existem 6 soluções.
(B) Existem infinitas soluções.
(C) Existe uma única solução.
(D) Não existe solução.
(E) Existem 3 soluções.

Questão 06: Um octaedro regular, assente por uma das faces sobre um plano horizontal, transparente, projeta sobre o solo uma sombra, considerado o sol a pino, segundo:

(A) Um triângulo equilátero.
(B) Um quadrado.
(C) Um paralelogramo.
(D) Um hexágono regular.
(E) Um losango.

Questão 07: Dadas as retas r, s e t, determinar o comprimento de uma reta v que se encontre, de modo que os segmentos determinados pelas retas dadas, na reta pedida, sejam iguais entre si.

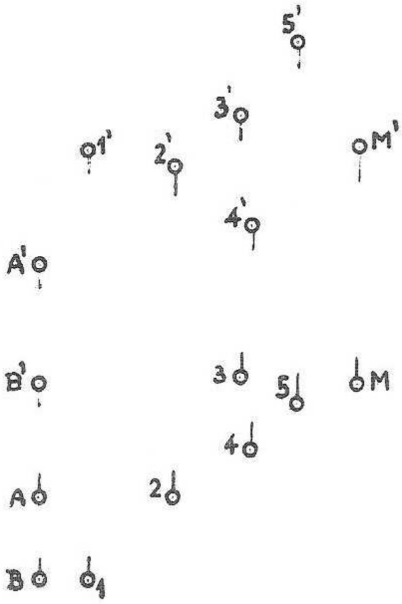
(A) 46 mm. (B) 40 mm. (C) 32 mm. (D) 28 mm. (E) 51 mm.



ITA 1969, Questão 07.

Questão 08: Qual dos pontos dados 1, 2, 3, 4, ou 5 pertence ao plano que passa por M, é paralelo à reta AB e perpendicular a um plano que faz um ângulo de 45^o com PV e 60^o com PH, estando a abertura do ângulo voltada para a direita do observador?

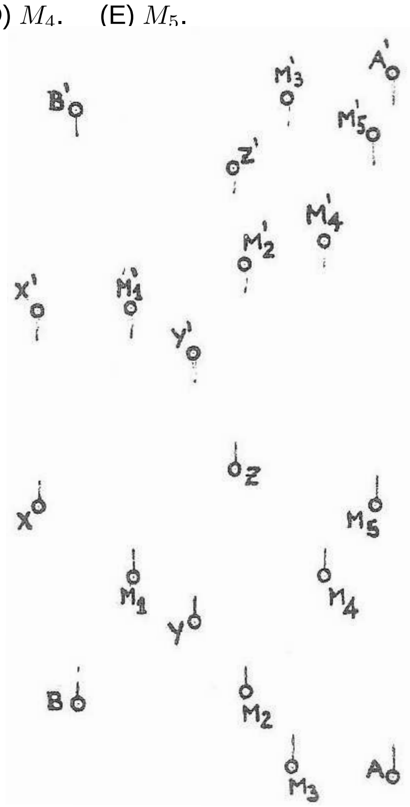
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.



ITA 1969, Questão 08.

Questão 09: Determinar sobre o plano XYZ um ponto M, tal que a soma das distâncias do ponto M aos pontos A e B seja a menor possível.

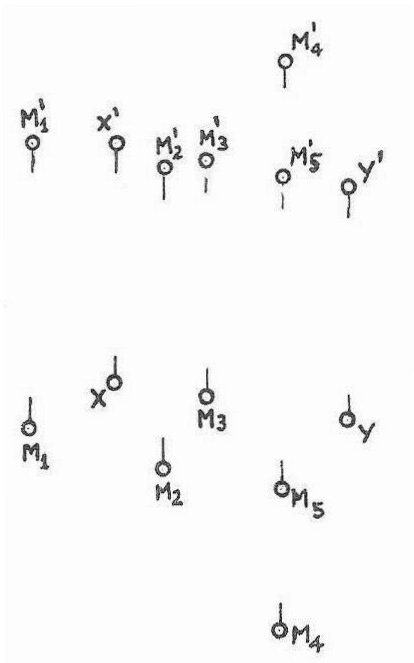
(A) M_1. (B) M_2. (C) M_3. (D) M_4. (E) M_5.



ITA 1969, Questão 09.

Questão 10: Determinar um ponto M que pertença ao plano que contém o ponto X, dista 15 mm de Y e cujo traço vertical faz um ângulo de 30^o, à direita do observador, com LT. Sabe-se que Y está sobre o 1^o bissetor.

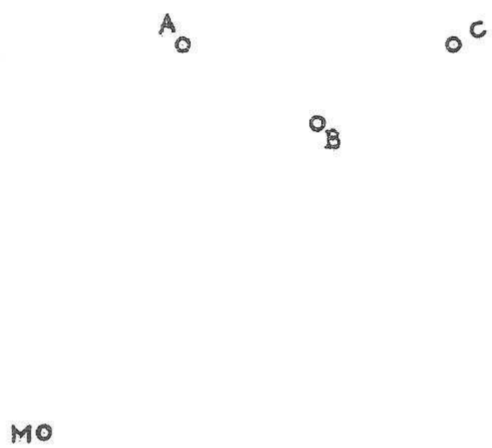
(A) M_1. (B) M_2. (C) M_3. (D) M_4. (E) M_5.



ITA 1969, Questão 10.

Questão 11: O triângulo equilátero ABC, dado em perspectiva isométrica, é seção determinada em um cubo por um plano α. Sabendo-se que A é um ponto médio de uma aresta do cubo e que este tem apenas um vértice acima do plano α, podemos afirmar que o ponto M:

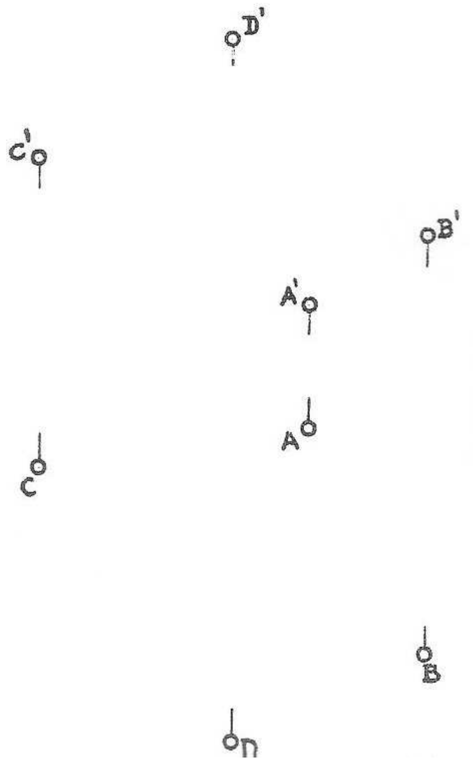
(A) Pertence a uma face.
(B) Pertence a uma aresta.
(C) Pertence a um vértice.
(D) Pertence ao centro do cubo.
(E) Pertence ao centro de uma face.



ITA 1969, Questão 11.

Questão 12: Sendo C e D dois furos para fixação de cabo de aço, deseja-se saber qual o comprimento de cabo, suposto único, que deverá ser usado para prender uma viga AB, de modo que as pernas do cabo sejam iguais:
Escala: 1/100.

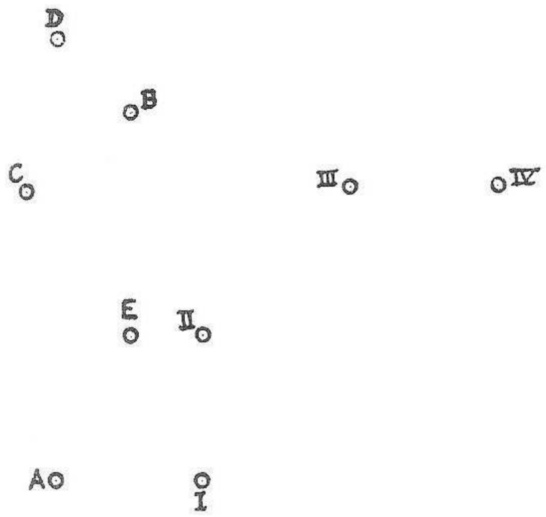
(A) 10,0 m. (B) 7,5 m. (C) 5,4 m. (D) 8,8 m. (E) 6,6 m.



ITA 1969, Questão 12.

Questão 13: Sendo os pontos I, II, III e IV vértices consecutivos de um hexágono regular, obtido por um plano secante em um octaedro, podemos afirmar que:

(A) A é um vértice do octaedro.
(B) B é um vértice do tetraedro regular envolvente do tetraedro.
(C) C é um ponto pertencente ao tetraedro regular envolvente do octaedro.
(D) D é um vértice do tetraedro regular envolvente do octaedro.
(E) E é um vértice do tetraedro regular envolvente do octaedro.



ITA 1969, Questão 13.

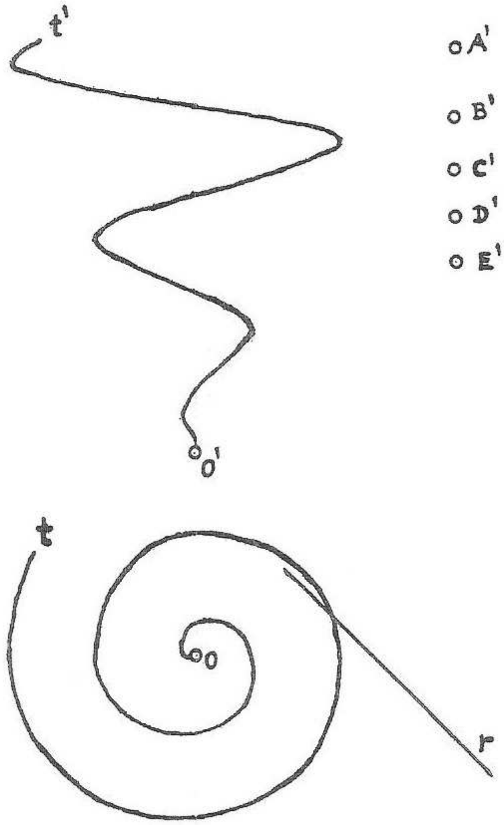
Questão 14: Sabendo-se que um arremessador de disco, nu,a competição de atletismo, ao largar o disco tem o braço em posição que faz 45^o com um plano vertical arbitrário e 15^o com o chão e sabendo-se, ainda, que ao iniciar a impulsão final o braço faz 20^o com o mesmo plano vertical e 50^o com o chão, deseja-se saber qual o ângulo de giro do braço, considerando o ponto X como sendo o centro de giro. Sabe-se, também, que o arremessador é destro e a impulsão se dá após o último giro de arremesso.

(A) 98^o. (B) 71^o. (C) 120^o. (D) 85^o. (E) 53^o.

ITA 1969, Questão 14.

Questão 15: O piloto de um planador, que perde altura num ângulo de 15^{o} com relação ao solo e cujo rumo é dado pela projeção da reta r, observa a trajetória de um urubu, que voa tangenciando uma térmica, representada pela curva t. Pergunta-se por qual dos pontos sugeridos deve passar o planador, supostas as condições dadas, a fim de tangenciar a térmica e, aproveitando-a, recuperar altura:

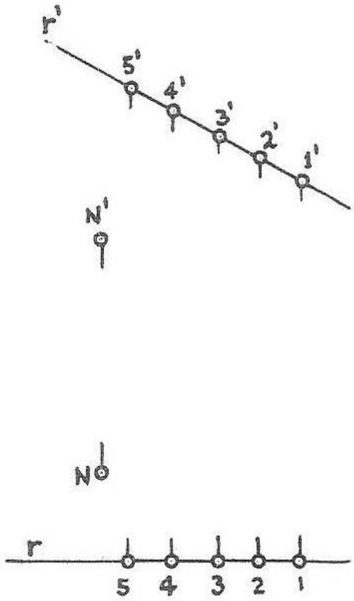
(A) A'. (B) B'. (C) C'. (D) D'. (E) E'.



ITA 1969, Questão 15.

Questão 16: Numa competição de arremesso de peso, um juiz observa o lançamento de um ponto N. Supondo que, em um certo intervalo de tempo, o peso percorre uma reta, dada por r, pede-se determinar sua posição sobre a trajetória, no instante em que o mesmo equidista do juiz e do chão. O ponto N está no primeiro bissetor.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.



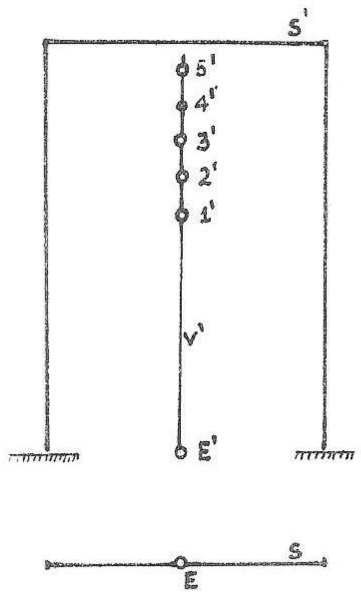
ITA 1969, Questão 16.

Questão 17: No problema anterior, a distância do juiz ao ponto procurado vale, supondo escala de 1/100:

(A) 2,5 m. (B) 2,0 m. (C) 1,7 m. (D) 2,9 m. (E) 3,3 m.

Questão 18: Nos Jogos Olímpicos, na competição de salto com vara, um saltador derrubou o sarrafo s, com o pé. Neste instante, seu corpo e braços estavam completamente estendidos em linha reta. Suas mãos seguravam a vara v e seu corpo fazia um ângulo de 120° com a vara. Sabendo-se que o sarrafo estava a uma altura de 5,20 m e que o atleta media 2,20 m, com os braços estendidos, pede-se determinar o ponto em que o mesmo segurava a vara, dentre os sugeridos. O ponto E é o encaixe da vara no solo. Escala: 1/100.

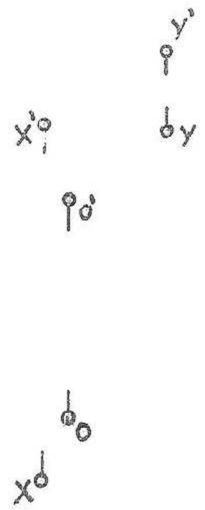
(A) 1'. (B) 2'. (C) 3'. (D) 4'. (E) 5'.



ITA 1969, Questão 18.

Questão 19: Dados os pontos X e Y, deseja-se saber qual o raio da esfera de centro O, tal que um ponto de sua superfície equidista dos pontos dados.

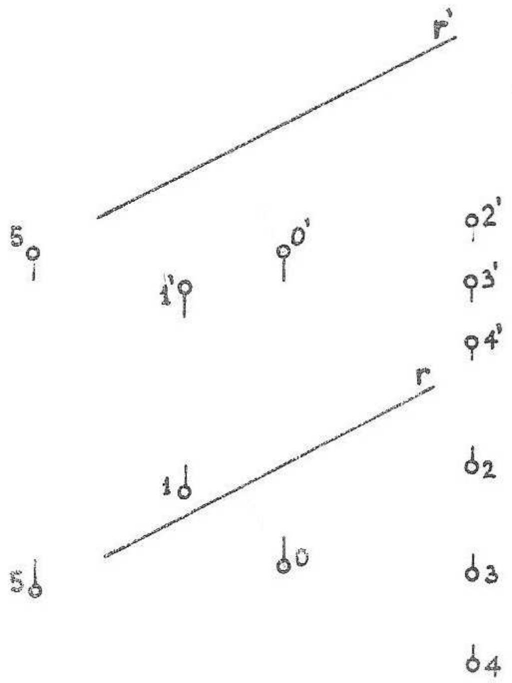
(A) 15 mm. (B) 22 mm. (C) 33 mm. (D) 28 mm. (E) 50 mm.



ITA 1969, Questão 19.

Questão 20: Sendo a reta r suporte de uma das arestas de um octaedro regular, de centro O, qual dos pontos sugeridos é um vértice?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.



ITA 1969, Questão 20.

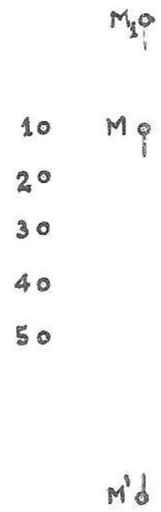
Questão 21: Dado o triângulo de vértices X, Y e Z, estando o lado XY sobre a LT, pede-se um ponto sobre a bissetriz do ângulo Z cuja distância a este vértice Z seja 5/3 da distância do ponto pedido à LT.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

ITA 1969, Questão 21.

Questão 22: De um plano que passa pela LT e por M, são dadas as projeções M' e M, bem como seu rebatimento M_1 sobre o PH. Destes dados, podemos afirmar que a LT passa pelo ponto:

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.



ITA 1969, Questão 22.

Questão 23: Qual o conjunto de pontos que forma um quadrado $ABCD$, tendo o vértice B sobre o PH e C sobre o PV?

(A) $A\ A'\ B'\ C\ B_1\ C_1'\ D_1'\ D$. (B) $A\ A'\ B'\ C\ B\ C_1'\ D_2'\ D$. (C) $A\ A'\ B'\ C\ B_2\ C_2'\ D_3'\ D$.
(D) $A\ A'\ B'\ C\ B_1\ C_1'\ D_1'\ D_1$. (E) $A\ A'\ B'\ C\ B\ C_1'\ D_3'\ D_1$.

ITA 1969, Questão 23.

Questão 24: Sendo ABC um triângulo equilátero, quais os pontos que o definem?

(A) $A'\ B'\ C\ A\ -\ B\ C_3'$. (B) $A'\ B'\ C\ A\ -\ B\ C_2'$. (C) $A'\ B'\ C\ A\ -\ B_1\ C_1'$.
(D) $A'\ B'\ C\ A\ -\ B\ C_1'$. (E) $A'\ B'\ C\ A\ -\ B_2\ C_2'$.

ITA 1969, Questão 24.

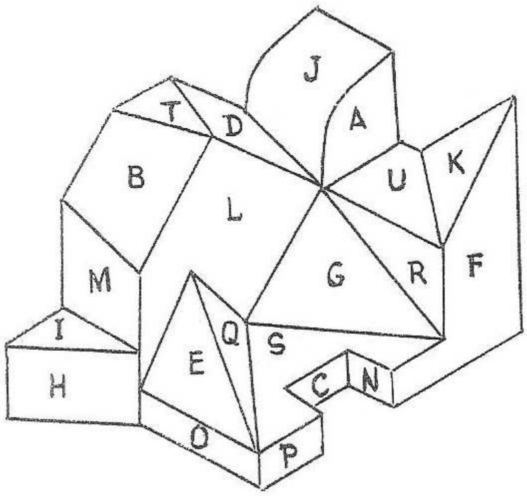
Questão 25: Determinar um ponto C que pertença ao plano que tenha a reta AB como bissetriz do ângulo formado por seus traços. O ponto A está sobre o PH.

(A) C_1. (B) C_2. (C) C_3. (D) C_4. (E) C_5.

ITA 1969, Questão 25.

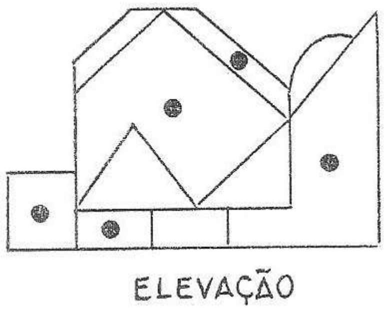
II.22 Vestibular de 1968

Questões 01, 02 e 03: Observe a perspectiva ao lado. Analise cuidadosamente suas projeções e indique, das opções oferecidas, qual a combinação de faces, das assinaladas com um ponto, correspondente a cada uma das proiecões.



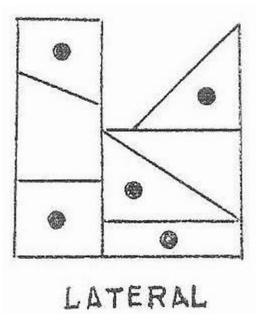
ITA 1968, Questões 01, 02 e 03.

1 - Projeção Vertical: elevação
(A) $Q\ F\ T\ L\ U$. (B) $H\ P\ F\ L\ D$. (C) $C\ P\ H\ O\ J$. (D) $F\ L\ G\ R\ B$. (E) $G\ A\ B\ S\ N$.



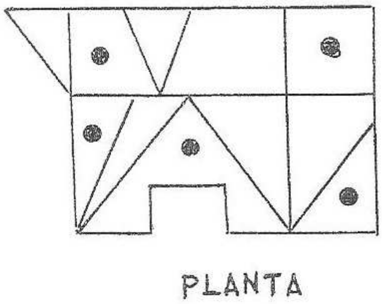
ITA 1968, Questão 01.

2 - Projeção de Perfil: lateral
(A) $H\ E\ K\ L\ A$. (B) $Q\ F\ J\ B\ E$. (C) $B\ O\ R\ S\ K$. (D) $O\ H\ K\ P\ F$. (E) $K\ O\ H\ E\ B$.



ITA 1968, Questão 02.

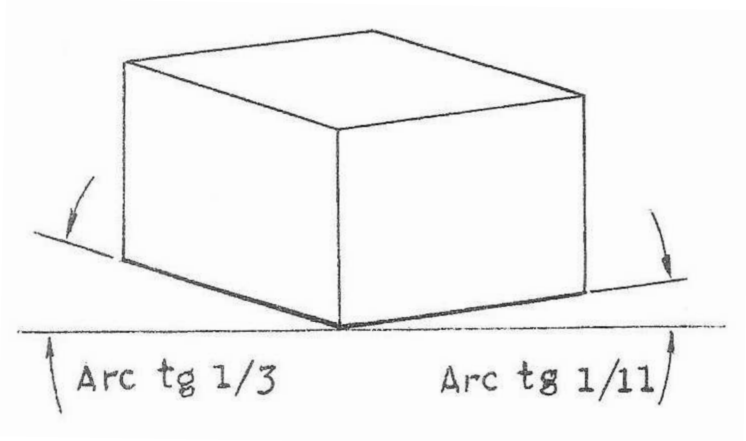
3 - Projeção Horizontal: planta
(A) $J\ B\ S\ F\ K$. (B) $F\ C\ H\ S\ E$. (C) $J\ B\ H\ K\ E$. (D) $D\ J\ B\ S\ M$. (E) $K\ S\ B\ J\ E$.



ITA 1968, Questão 03.

Questão 04: O desenho representa uma peça em perspectiva:

(A) Isométrica.
(B) Dimétrica.
(C) Trimétrica.
(D) Cavaleira.
(E) Oblíqua.



ITA 1968, Questão 04.

Questão 05: De uma reta frontal, podemos afirmar:

(A) Seu traço horizontal é um ponto impróprio.
(B) Sua projeção vertical é um ponto.
(C) Sua projeção horizontal está em VG.
(D) Seu traço vertical é ponto impróprio.
(E) Suas projeções são paralelas à LT.

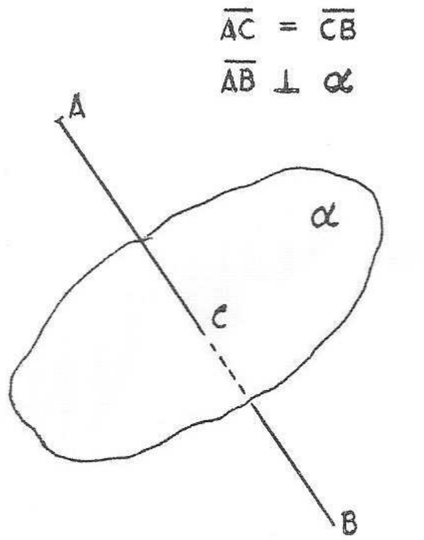
Questão 06: A perpendicular comum a duas retas reversas, sendo uma delas de topo, é uma:

(A) Frontal. (B) Horizontal. (C) Vertical. (D) Fronto-Horizontal. (E) Qualquer.

Questão 07: Se um plano é paralelo à LT e suas retas de maior declive formam um ângulo de 35^o, as retas de maior inclinação deste mesmo plano determinam um ângulo de:

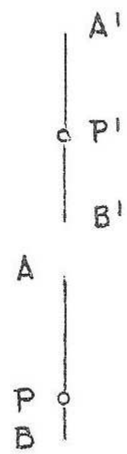
(A) 55^o. (B) 50^o. (C) 45^o. (D) 40^o. (E) 35^o.

Questão 08: A análise da figura e das condições impostas permite-nos classificar o plano α como:
(A) Referencial. (B) Médio. (C) Fundamental. (D) Mediador. (E) Mediano.



ITA 1968, Questão 08.

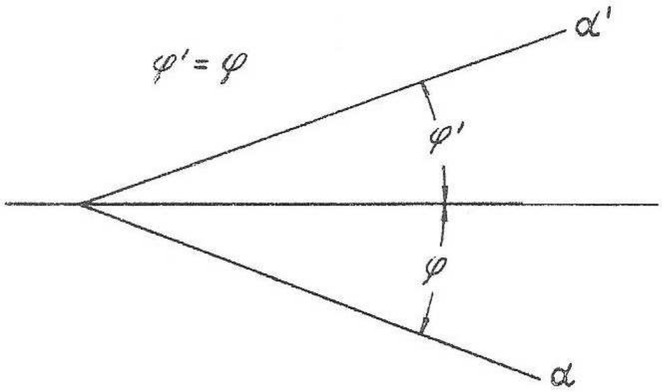
Questão 09: Do ponto P podemos afirmar:
(A) É ponto médio do segmento AB.
(B) Não pertence ao segmento AB.
(C) Está no primeiro bissetor.
(D) Divido proporcionalmente o segmento AB.
(E) É traço do segmento AB em plano // LT.



ITA 1968, Questão 09.

Questão 10: A observação da épura apresentada mostra que o plano α é:

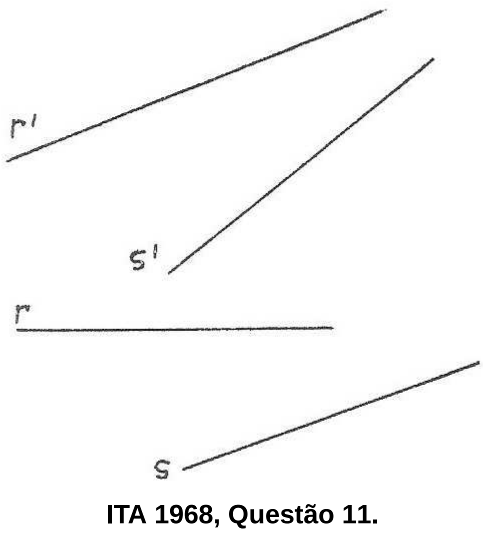
(A) De topo.
(B) Um bissetor.
(C) Paralelo ao 2^{o} bissetor.
(D) Perpendicular ao 2^{o} bissetor.
(E) Perpendicular ao 1^{o} bissetor.



ITA 1968, Questão 10.

Questão 11: As retas r e s determinam um plano. Qual é o ângulo de suas retas de maior declive?

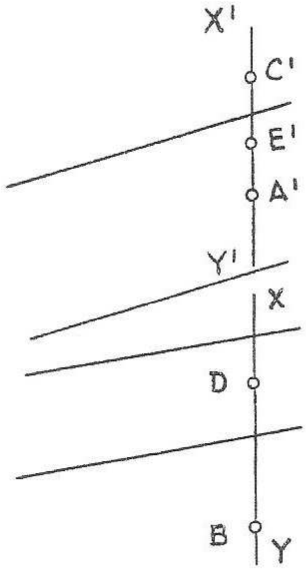
(A) 42^{o}. (B) 61^{o}. (C) 53^{o}. (D) 68^{o}. (E) 48^{o}.



ITA 1968, Questão 11.

Questão 12: Indicar em qual dos pontos sugeridos a reta XY encontra o plano ab:

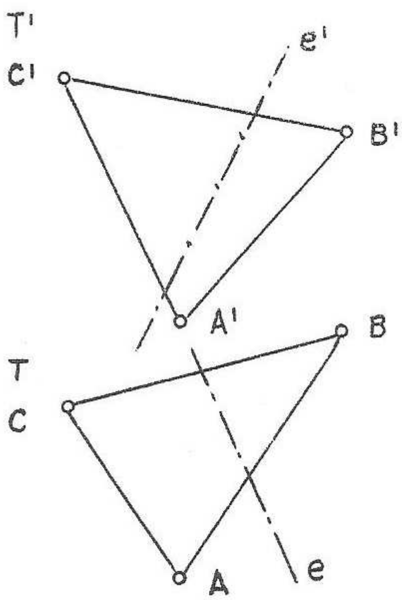
(A) A. (B) B. (C) C. (D) D. (E) E.



ITA 1968, Questão 12.

Questão 13: A figura mostra o esquema de um interruptor elétrico que comanda um anúncio luminoso, acendendo e apagando a intervalos regulares de tempo. Eis seu funcionamento: (ABC) é uma chapa metálica que gira solidária com um eixo e. Quando o ponto A da chapa toca o terminal T fecha o circuito, acendendo o anúncio. Qual é o menor ângulo de que deve girar a chapa, a partir de sua atual posição, para estabelecer contato?

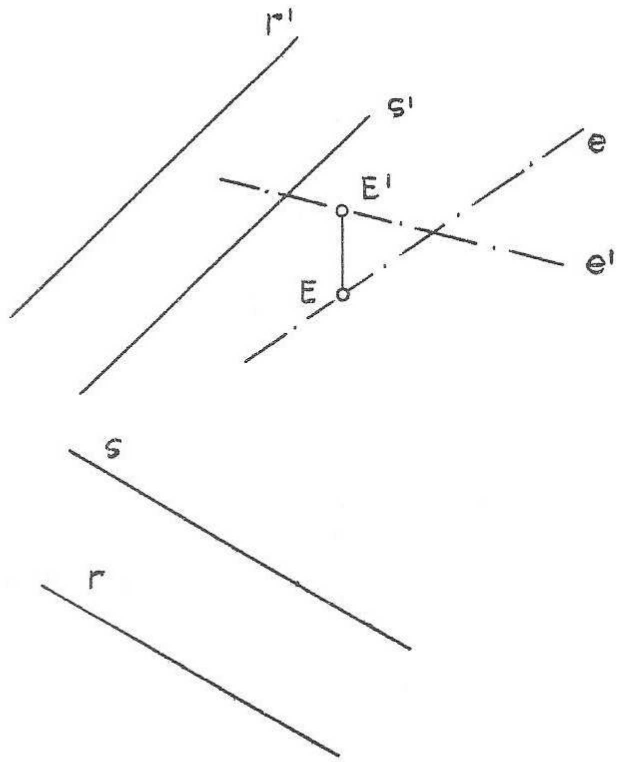
(A) 120^o. (B) 110^o. (C) 125^o. (D) 115^o. (E) 105^o.



ITA 1968, Questão 13.

Questão 14: As retas r e s são guias prismáticas da mesa de uma esmerilhadora. A reta e é o eixo do porta-ferramentas, representado em determinada posição de funcionamento. O ponto E é o ponto de fixação do esmeril. Deseja-se saber qual é o diâmetro máximo do esmeril que pode ser usado, escolhido dentre os existentes no almoxarifado e abaixo indicados, de forma que a pedra não toque no plano da mesa. Escala: 1/10.

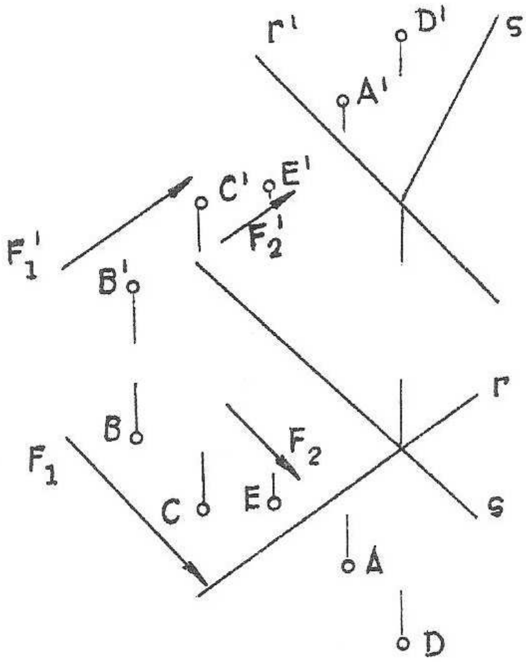
(A) 200 mm de diâmetro. (B) 350 mm de diâmetro. (C) 250 mm de diâmetro. (D) 300 mm de diâmetro. (E) 180 mm de diâmetro.



ITA 1968, Questão 14.

Questão 15: $|\vec{F_1}|$ e $|\vec{F_2}|$ são vetores que representam forças do espaço. Pede-se o ponto de aplicação da resultante do sistema no plano rs.

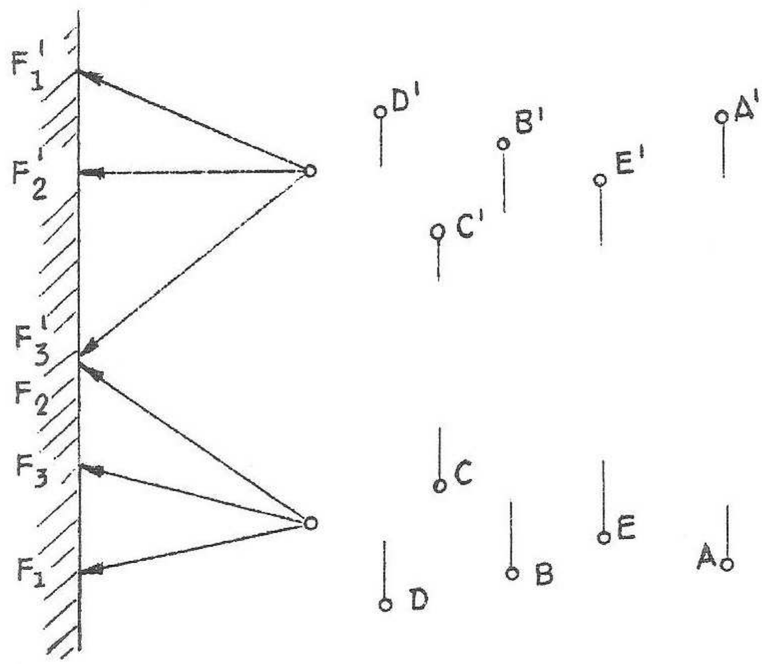
(A) A. (B) B. (C) C. (D) D. (E) E.



ITA 1968, Questão 15.

Questão 16: $|\vec{F_1}|$, $|\vec{F_2}|$ e $|\vec{F_3}|$ são vetores representando forças concorrentes no espaço. A, B, C, D e E são possíveis pontos pertencentes ao vetor que representa a reação que equilibra o sistema. Indique aquele realmente pertencente ao vetor procurado.

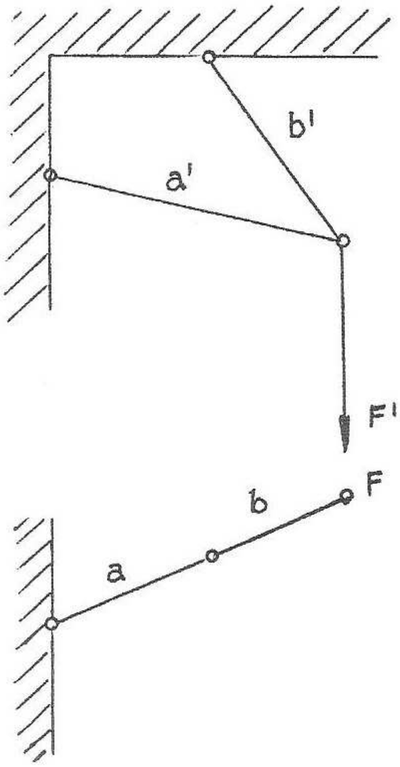
(A) A. (B) B. (C) C. (D) D. (E) E.



ITA 1968, Questão 16.

Questão 17: a e b são barras rígidas, fixadas a dois pontos de ancoragem. Estas barras são solicitadas por uma força $|\vec{F}|$, no valor de 2 toneladas, Qual é a reação que ocorre na barra b, notando-se que as projeções de $|\vec{F}|$ estão em escala.

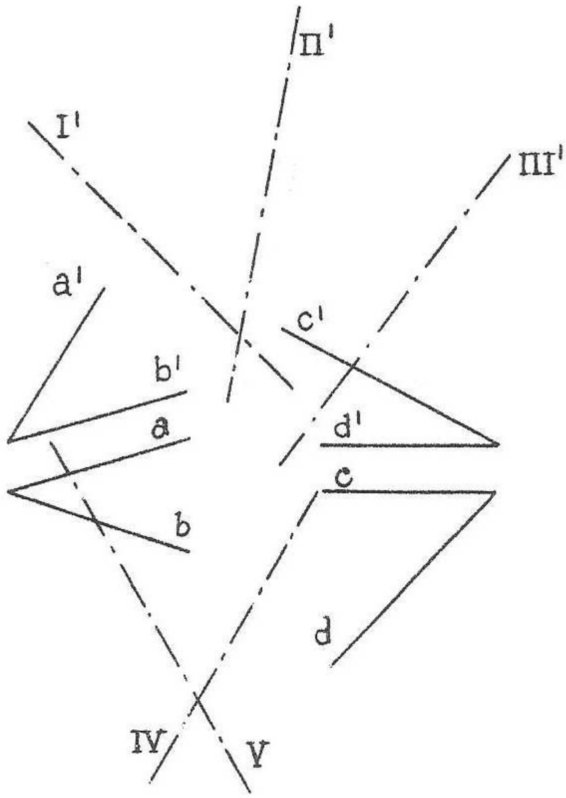
(A) 1,3 t. (B) 2,0 t. (C) 2,4 t. (D) 3,0 t. (E) 3,8 t.



ITA 1968, Questão 17.

Questão 18: As retas ab e cd são restos da estrutura de reforço de duas paredes, que vão ser reconstruídas. A aresta de encontro destas paredes deverá ser reforçada por uma cantoneira de ferro. As retas I, II, III, IV e V são possíveis posições desta cantoneira. Indicar qual corresponde à posição correta. Observar que só foi indicada uma projeção de cada posição sugerida.

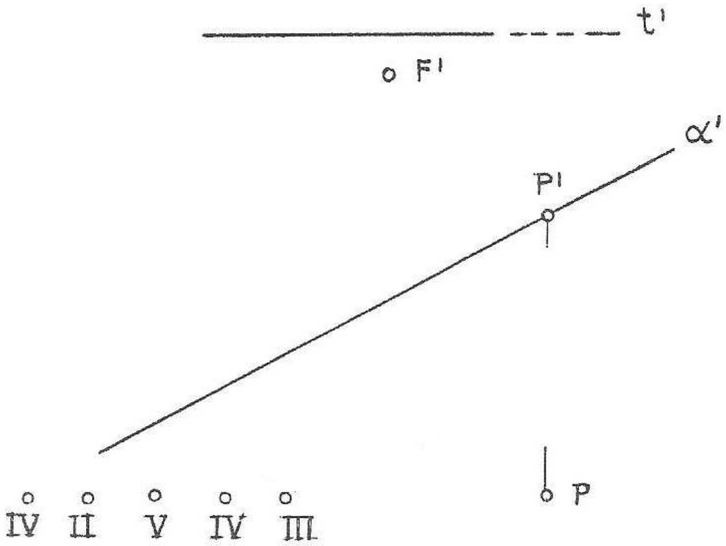
(A) I. (B) II. (C) III. (D) IV. (E) V.



ITA 1968, Questão 18.

Questão 19: Uma esfera de aço, deixada cair de uma certa altura, encontra o plano α, de topo, no ponto P. Sua trajetória de ricochete é uma parábola de foco F, descrita em um plano frontal. A reta t é uma tangente ao seu vértice. Em qual dos pontos sugeridos a esfera retornará ao plano α?

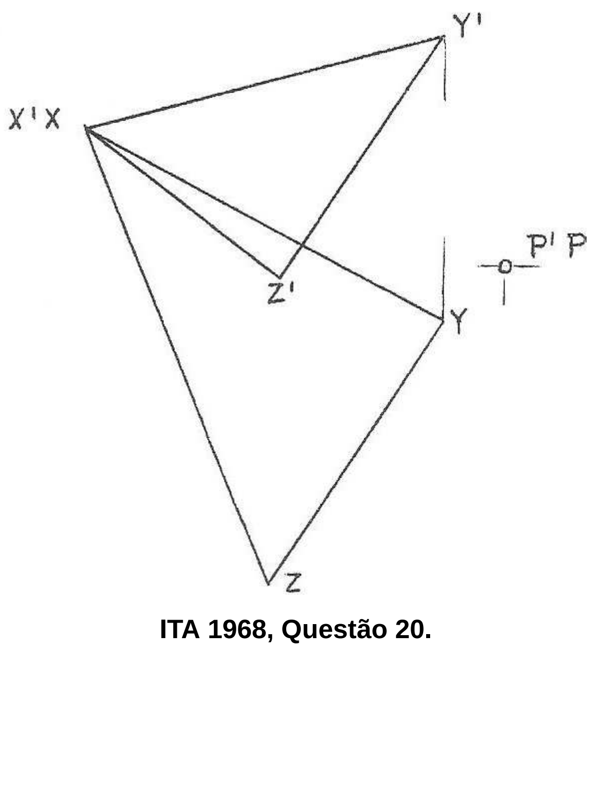
(A) I. (B) II. (C) III. (D) IV. (E) V.



ITA 1968, Questão 19.

Questão 20: A trajetória de um projétil é suposta retilínea. Que ângulo esta trajetória formará com o solo, partindo do ponto P, de forma a que o projétil atinja perpendicularmente o alvo X, Y, Z?

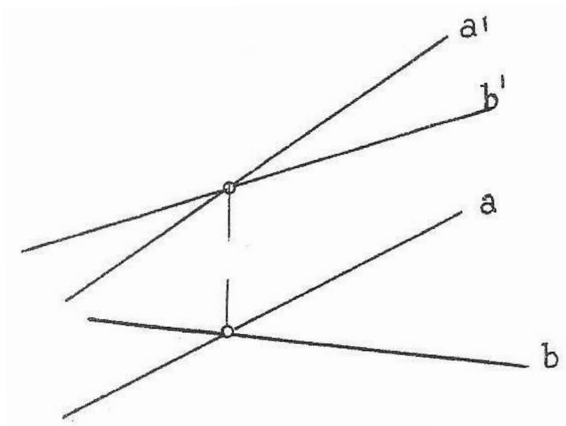
(A) 30^o. (B) 45^o. (C) 50^o. (D) 65^o. (E) 70^o.



ITA 1968, Questão 20.

Questão 21: O desenho mostra o nó de uma treliça da asa de uma aeronave. Qual é o ângulo menor que fazem entre si os elementos desta treliça?

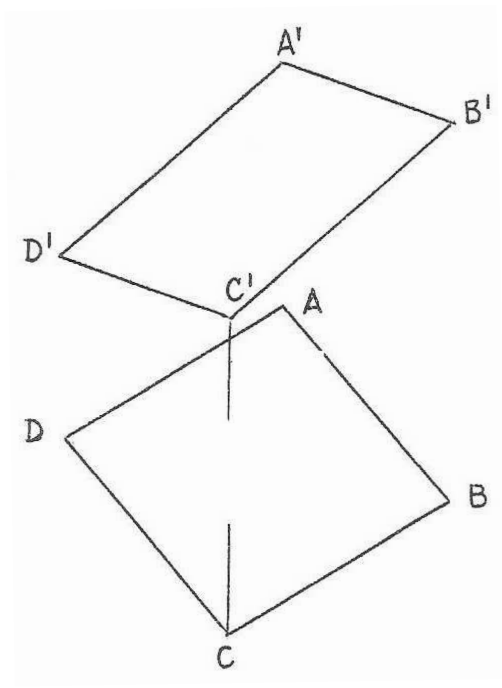
(A) 30^o. (B) 35^o. (C) 40^o. (D) 45^o. (E) 50^o.



ITA 1968, Questão 21.

Questão 22: A figura mostra uma telha de cimento amianto, pertencente à cobertura de uma fábrica. Qual é a inclinação deste telhado, em relação ao solo?

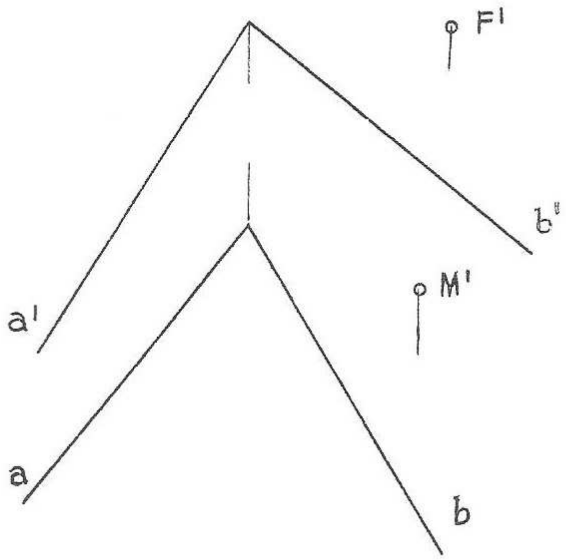
(A) 20^o. (B) 30^o. (C) 40^o. (D) 50^o. (E) 60^o.



ITA 1968, Questão 22.

Questão 23: Uma estaca de 1,25 m de altura está fixada perpendicularmente ao plano ab, no ponto M. Sendo F um foco luminoso, deseja-se saber qual é o comprimento da sombra projetada pela estava no plano. Escala sugerida: 1/50.

(A) 0,90 m. (B) 1,10 m. (C) 1,40 m. (D) 1,70 m. (E) 2,10 m.



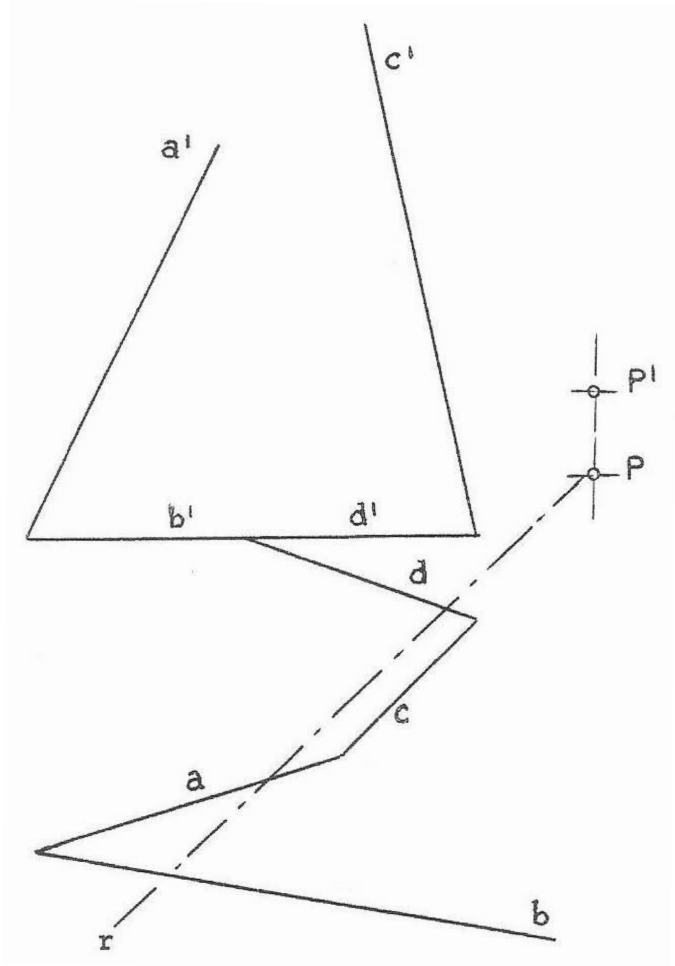
ITA 1968, Questão 23.

Questão 24: Em determinado instante, um barco é avistado da plataforma de observação de um farol, situada a 90 m acima do nível do mar. A visada é feita na direção N45^oW, sob um ângulo de depressão de 21^o. Cinco minutos mais tarde, o faroleiro faz nova observação, anotando em seu registro: "Direção da visada N12^oE; ângulo de depressão 16^o". Que distância percorreu o barco neste período? Escala sugerida: 1/5.10^3.

(A) 220 m. (B) 485 m. (C) 310 m. (D) 515 m. (E) 270 m.

Questão 25: Os planos AB e CD são encostas opostas de uma montanha. A reta r é projeção do eixo de um túnel que deve atravessar esta montanha, em cota constante, passando pelo ponto P, referência de visada. Pede-se o comprimento do túnel. Escala: 1/10^4.

(A) 390 m. (B) 450 m. (C) 285 m. (D) 570 m. (E) 480 m.



ITA 1968, Questão 25.

II.23 Vestibular de 1967

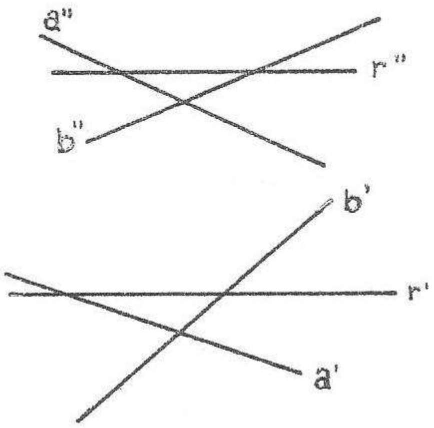
Questão 01: A projeção representa um ponto:

(A) No 2^{o} diedro. (B) No 4^{o} diedro. (C) No 1^{o} bissetor. (D) No 3^{o} diedro. (E) No 2^{o} bissetor.

ITA 1967, Questão 01.

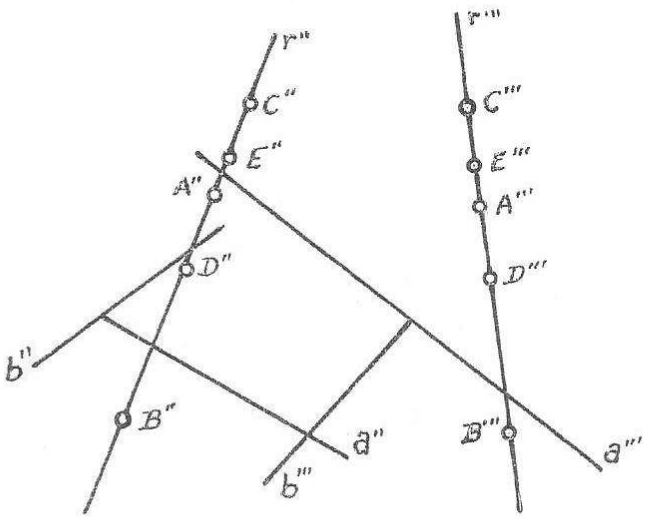
Questão 02: A reta r:

(A) É uma frontal do plano ab.
(B) É uma qualquer do plano ab.
(C) É uma fronto-horizontal do plano ab.
(D) É uma horizontal do plano ab.
(E) Não pertence ao plano ab.



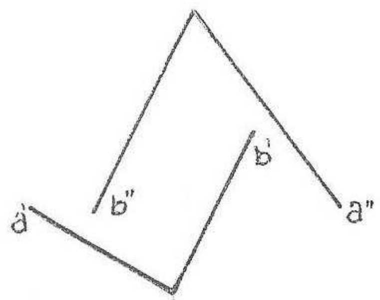
ITA 1967, Questão 02.

Questão 03: A reta r fura o plano ab no ponto:
(A) A. (B) B. (C) C. (D) D. (E) E.



ITA 1967, Questão 03.

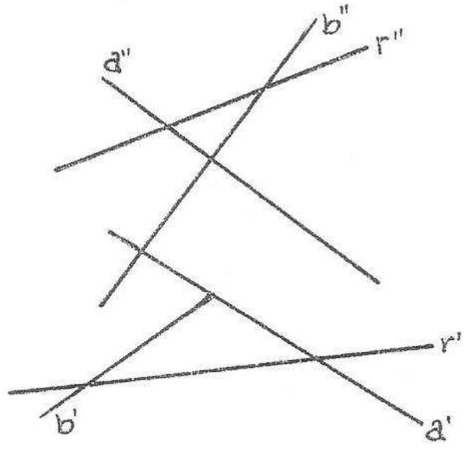
Questão 04: A projeção vertical de uma normal ao plano ab forma com a horizontal um ângulo menor igual a:
(A) 60^o. (B) 45^o. (C) 30^o. (D) 15^o. (E) 70^o.



ITA 1967, Questão 04.

Questão 05: A reta r:

(A) Pertence ao plano ab.
(B) É normal ao plano ab.
(C) É paralela ao plano ab.
(D) Encontra o plano ab em um ponto impróprio.
(E) É uma qualquer do espaço.



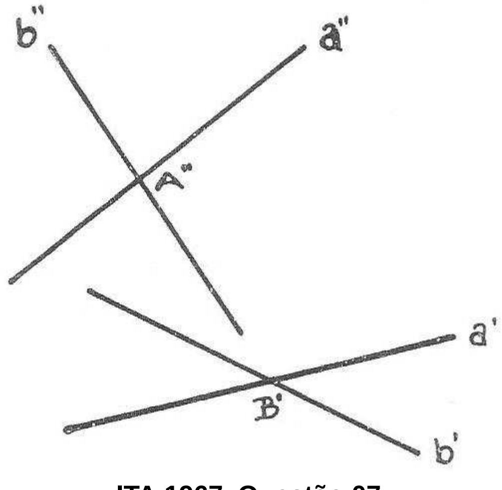
ITA 1967, Questão 05.

Questão 06: Para que uma reta seja normal a um plano é necessário e suficiente que:

(A) Seja normal a todas as retas do plano.
(B) Seja normal a uma principal do plano.
(C) Seja normal a duas retas do plano.
(D) Seja normal a uma horizontal do plano.
(E) Seja normal a uma frontal do plano.

Questão 07: Supondo que as retas a e b pertençam a dois planos diferentes:

(A) São concorrentes no ponto A''.
(B) São concorrentes no ponto B'.
(C) Se traçadas em planos opacos, na projeção vertical b seria visível e a invisível.
(D) Nas mesmas condições, a seria visível e b invisível.
(E) Nas mesmas condições, para a projeção horizontal, b seria visível e a invisível.



ITA 1967, Questão 07.

Questão 08: O ente geométrico comum a todos os planos de uma estrela de n planos:

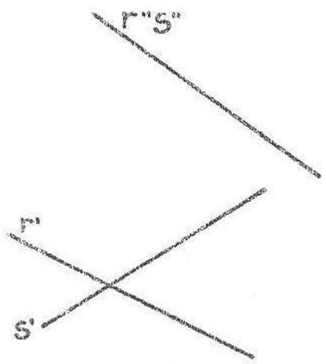
(A) É uma reta.
(B) É um ponto.
(C) É um plano definido por pontos dos demais planos.
(D) Não existem estrela de planos.
(E) É um poliedro de n faces.

Questão 09: Para determinar a interseção de dois planos, o caminho mais simples é:

(A) Pesquisar a reta que pertença a um dos planos e seja paralela ao outro plano.
(B) Verificar o ponto em que uma horizontal de um dos planos concorre com uma frontal de outro plano e o ponto em que uma horizontal do segundo plano concorre com uma frontal do primeiro plano.
(C) Verificar, na projeção vertical, o ponto de concurso de uma frontal de um dos planos com uma frontal do segundo plano; verificar, na projeção horizontal, o ponto de concurso de uma horizontal de um dos planos com uma horizontal de outro plano.
(D) Verificar onde duas retas quaisquer de um dos planos encontram duas frontais (ou horizontais) do outro plano; verificar onde duas retas quaisquer do segundo plano encontram duas horizontais (ou frontais) do 1^{o} plano.
(E) Verificar onde duas retas quaisquer de um dos planos furam o outro plano.

Questão 10: A projeção representa:

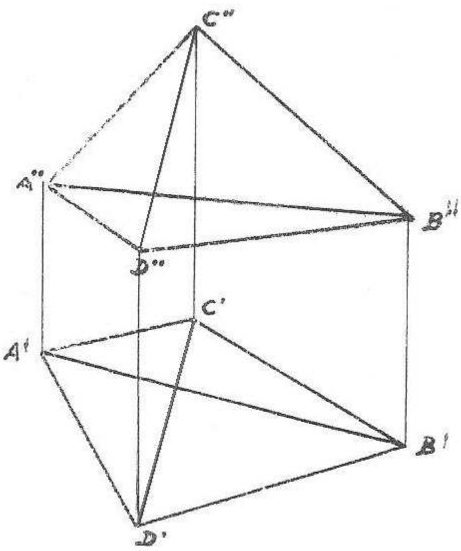
(A) Duas retas reversas.
(B) Dois segmentos em verdadeira grandeza.
(C) Um plano paralelo a um dos planos de projeção.
(D) Um plano de perfil.
(E) Um plano de topo.



ITA 1967, Questão 10.

Questão 11: Na projeção:

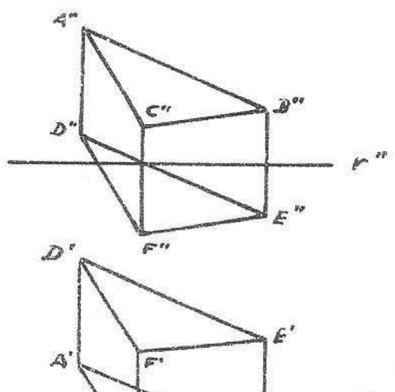
(A) Vertical, a aresta $A''B''$ é visível e a aresta $C''D''$ é invisível.
(B) Horizontal, a aresta $A'B'$ é visível e a aresta $C'D'$ é invisível.
(C) Vertical, a face $B''C''D''$ é visível.
(D) Vertical e horizontal, ambas as arestas AB e CD são visíveis, pois ligam vértices visíveis.
(E) Não ocorre problema de visibilidade, pois os segmentos discutidos são diagonais de uma figura plana.



ITA 1967, Questão 11.

Questão 12: A reta r:

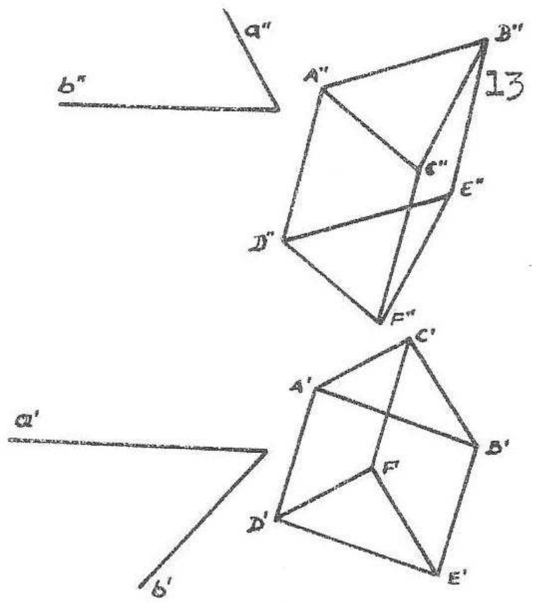
(A) Na projeção horizontal é totalmente visível.
(B) Na projeção vertical é totalmente visível.
(C) Pertence a uma face do prisma.
(D) É totalmente visível em ambas as projeções.
(E) Intercepta o prisma.



ITA 1967, Questão 12.

Questão 13: O plano ab:

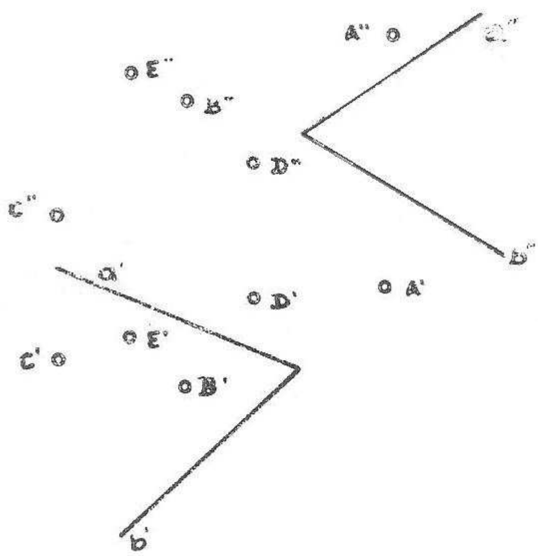
(A) É normal a uma das faces laterais do sólido.
(B) É normal a uma das bases do sólido.
(C) É paralelo a uma das faces do sólido.
(D) Contém uma das bases do sólido.
(E) Contém uma das faces do sólido.



ITA 1967, Questão 13.

Questão 14: Observe a projeção e verifique que: (A) Só o ponto A pertence ao plano ab.

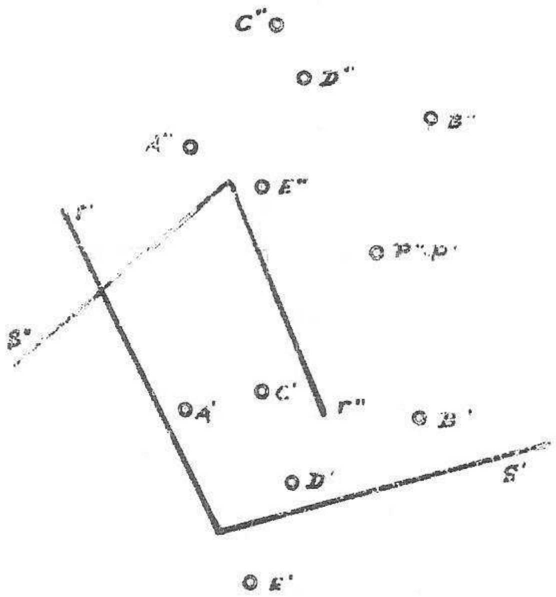
(B) Só o ponto B pertence ao plano ab.
(C) Só o ponto C pertence ao plano ab.
(D) Nenhum dos pontos dados pertence ao plano ab.
(E) Todos os pontos dados pertencem ao plano ab.



ITA 1967, Questão 14.

Questão 15: Se do ponto P conduzirmos uma normal ao plano rs, esta normal encontrará o plano no ponto:

(A) A. (B) B. (C) C. (D) D. (E) E.



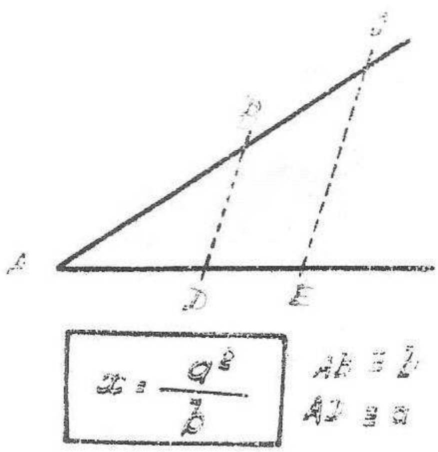
ITA 1967, Questão 15.

Questão 16: No caso anterior, o segmento determinado pelo ponto P e aquele que voce indicou como sendo o de encontro com o plano dado mede:

(A) 27 mm. (B) 38 mm. (C) 42 mm. (D) 32 mm. (E) 45 mm.

Questão 17: Os segmentos a e b da figura estão entre si:

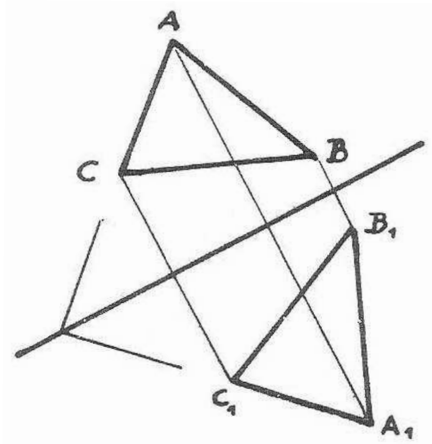
(A) Em razão dada pela 3^{a} proporcional.
(B) Em razão dada pela 4^{a} proporcional.
(C) Em razão dada pela média proporcional.
(D) Em proporção homotética.
(E) Em média e extrema razão.



ITA 1967, Questão 17.

Questão 18: A razão de semelhança de duas figuras homotéticas é:
(A) A 3^{a} proporcional.
(B) A 4^{a} proporcional.
(C) A média proporcional.
(D) A média e extrema razão.
(E) A divisão áurea.

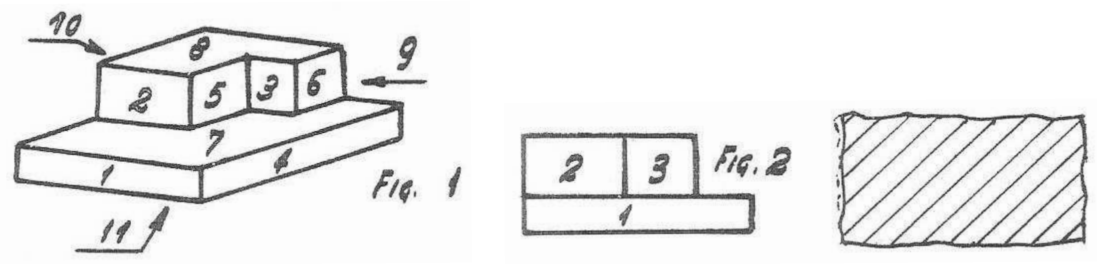
Questão 19: A figura mostra um caso de:
(A) Homotetia direta.
(B) Homologia.
(C) Homotetia inversa.
(D) Afinidade.
(E) Translação.



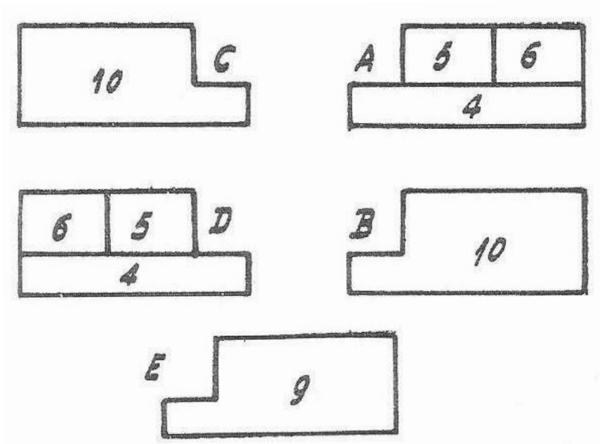
ITA 1967, Questão 19.

Questão 20: Sendo a Fig. 2 a projeção vertical da figura representada em perspectiva (Fig. 1) e supondo a utilização do 3^{o} diedro, a projeção lateral - área destacada por hachuras - seria a figura:

(A) A. (B) B. (C) C. (D) D. (E) E.

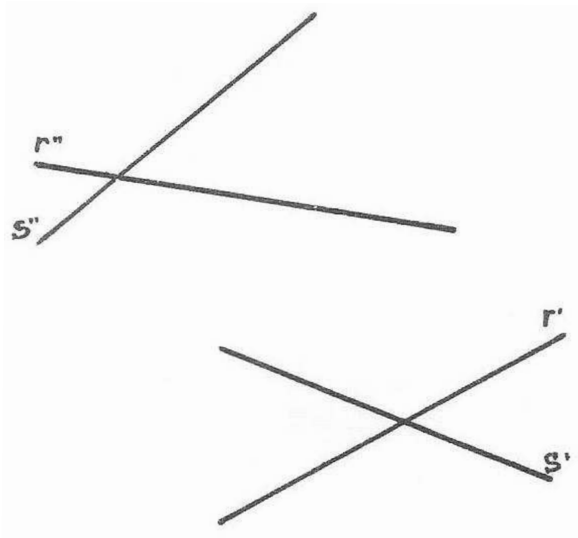


ITA 1967, Questão 20.



Questão 21: A épura mostra as projeções de uma tubulação de ar comprimido, representada por suas linhas de eixo. Sendo necessária uma derivação intermediária, qual o menor comprimento que deve ter o tudo que forma esta derivação? Escala: 1:25.
Obs.: A direção das projetantes é paralela às margens da folha.

(A) 532 mm. (B) 62,5 cm. (C) 250 mm. (D) 73,5 cm. (E) 805 mm.



ITA 1967, Questão 21.

Questão 22: Em uma parábola, a distância do foco à diretriz chama-se:

(A) Módulo. (B) Parâmetro. (C) Raio vetor. (D) Distância diretora. (E) Módulo focal.

Questão 23: O lugar geométrico dos pontos coplanares cujas distâncias a dois pontos fixos do plano têm uma diferença constante é:

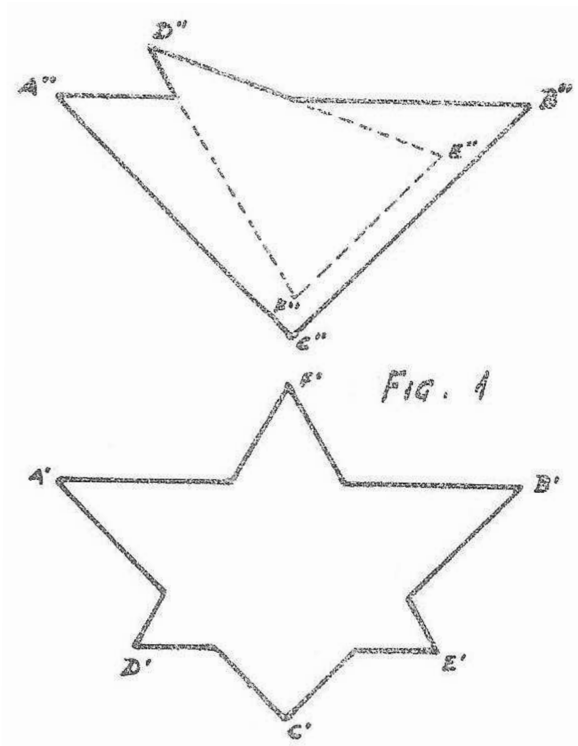
(A) Hiperciclóide. (B) Hipociclóide. (C) Elipse. (D) Hipérbole. (E) Parábola.

Questão 24: O lugar geométrico de um ponto de uma reta que gira sobre uma circunferência, sem escorregamento, é a:

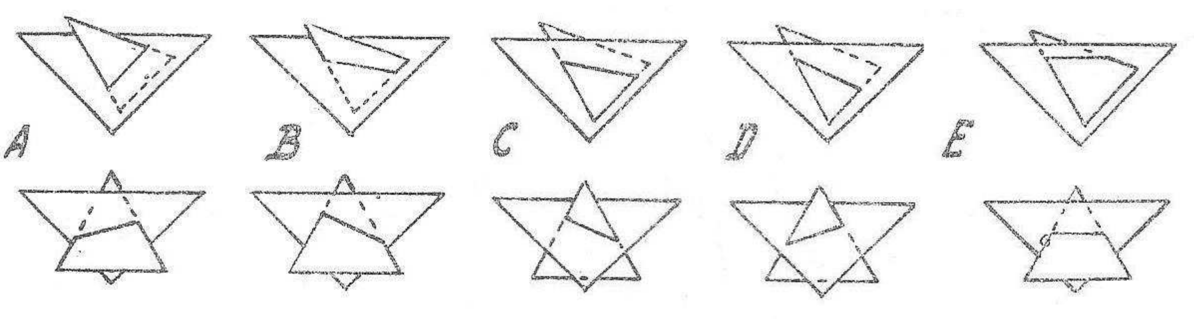
(A) Evolvente. (B) Espiral. (C) Cordiana. (D) Hipociclóide. (E) Hiperciclóide.

Questão 25: A Figura 1 mostra o contorno externo de dois triângulos em projeção. A posição relativa de ambos os triângulos deve ser determinada. Resolvido o problema, a resposta certa é uma das cinco soluções sugeridas. Indique-a:

(A) A. (B) B. (C) C. (D) D. (E) E.



ITA 1967, Questão 25.



II.24 Vestibular de 1966

Questão 01: Tipo CERTO - ERRADO.
Instruções: Escreva a letra "C" ou "E" (maiúscula, de imprensa) no espaço deixado em branco ao lado esquerdo de cada frase, se julgar a afirmativa contida certa ou errada, respectivamente.

____ 1: Uma reta pertence ao plano se um seu ponto é ponto do plano.

____ 2: Se um ponto em épura tem cota positiva e afastamento negativo, este ponto pertence ao 3^{o} diedro.

____ 3: Se uma reta r pertence a n planos, estes planos formam um feixe de planos.

____ 4: Se um ponto pertence a n retas coplanares, estas retas formam uma estrela de reta.

____ 5: O plano frontal é um plano vertical.

____ 6: Se um ponto tem cota e afastamento iguais, este ponto pertence a um plano bissetor.

____ 7: É condição suficiente para que uma reta seja paralela a um plano que ela seja paralela a uma reta do plano.

____ 8: Para que uma reta seja perpendicular a um plano é condição suficiente que ela seja perpendicular a uma reta notável do plano.

____ 9: Se um plano é perpendicular a um dos planos de projeção, torna-se paralelo a este plano por uma única mudança de plano.

____ 10: Para que um plano qualquer se torne perpendicular a um dos planos de projeção são necessárias duas mudanças de plano.

____ 11: Há homotetia quando o eixo de homologia é uma reta imprópria e o centro de homologia é um ponto próprio.

____ 12: Se uma das projeções de um ponto de uma reta coincide com a projeção de mesmo nome de um ponto do espaço, podemos afirmar que este ponto pertence à reta.

____ 13: No 3^{o} diedro, o plano de projeção situa-se entre o observador e o objeto.

____ 14: Se a projeção vertical de uma reta é em verdadeira grandeza, podemos afirmar que esta é uma reta vertical.

____ 15: Três pontos sempre determinam um plano.

Questão 02: Tipo FRASE A COMPLETAR.
Instruções: Escreva, somente no espaço reservado à esquerda, a palavra que julgar melhor se adaptar e completar de maneira mais perfeita o sentido de cada frase. Use letras de imprensa.

________________ 1: Se as duas projeções básicas ortogonais são coincidentes, esta reta pertence . . .

________________ 2: A reta do plano que forma com a sua projeção vertical o maior ângulo possível é a . . .

________________ 3: Quando duas retas possuem um ponto próprio comum as retas são ditas . . .

________________ 4: Dizemos que duas figuras são . . . quando o eixo de homologia é próprio e o centro de homologia é impróprio.

________________ 5: Um ângulo reto do espaço projetar-se-á em verdadeira grandeza no plano vertical de projeção se um dos seus lados for uma reta . . .

________________ 6: A projetante de um ponto no plano vertical é uma reta . . .

________________ 7: Supondo que dois pontos A e B, pertencentes a dois planos α e β, não coincidentes, será visível na projeção vertical aquele que tiver . . .

________________ 8: Chama-se . . . o ponto de concurso das bissetrizes de um triângulo.

________________ 9: Chama-se . . . o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa.

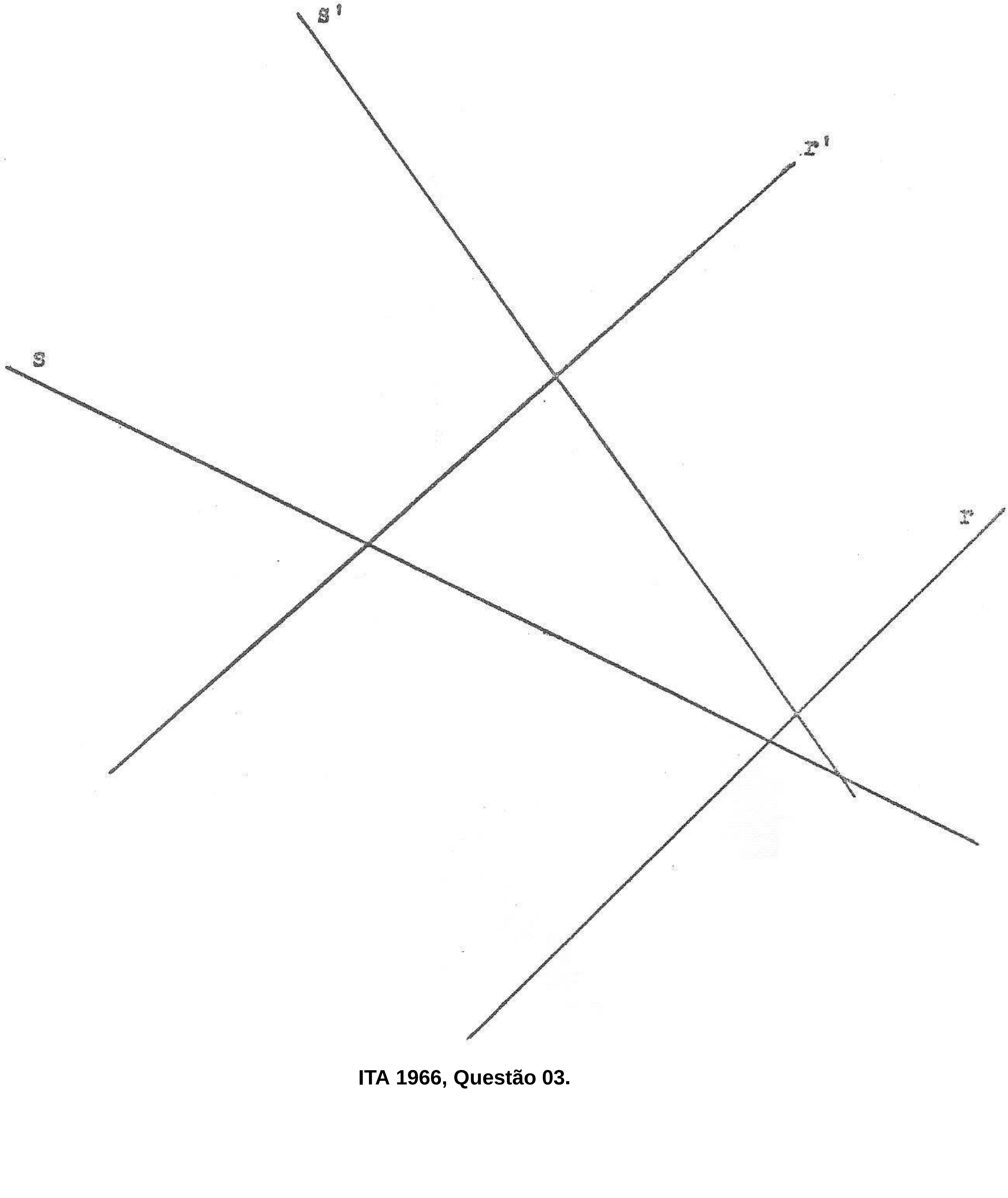
________________ 10: Uma reta . . . é paralela à Linha de Terra.

________________ 11: Ao resolvermos um problema de rebatimento, o caso de homologia que encontramos é chamado . . .

________________ 12: A perspectiva paralela em que dois eixos perspectivos formam, cada um deles, 30^{o} com a horizontal é . . .

________________ 13: Quando, em uma perspectiva, um dos eixos perspectivos é paralelo ao plano de observação, temos uma perspectiva . . .

Questão 03: A épura representada mostra as projeções de um trecho de tubulação de distribuição de vapor em uma fábrica. A experiência mostrou a conveniência de uma modificação no projeto original, devendo ser acrescentada uma derivação do tubo r para o tubo s. Pergunta-se qual o menor comprimento de tubo t necessário para fazer esta derivação, bem como a localização dos pontos M e N, respectivamente nos tubos r e s, onde deverão ser feitas as conexões de derivação. na determinação do comprimento real do tubo-solução, t, cada 5 mm corresponde a 1 dm. A direção das projetantes é paralela às margens laterais desta folha.



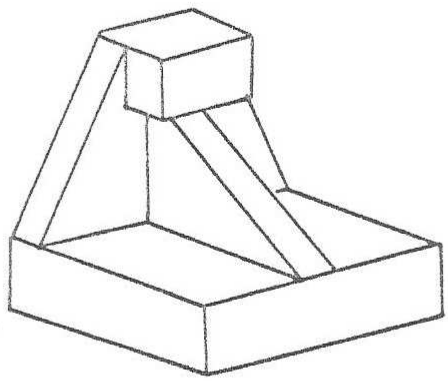
ITA 1966, Questão 03.

Questão 04: os pontos A, B e C, representados em épura, pertencem a uma circunferência. Pede-se traçar as projeções desta circunferência, bem como a tangente por um ponto diametralmente oposto ao ponto A.

ITA 1966, Questão 04.

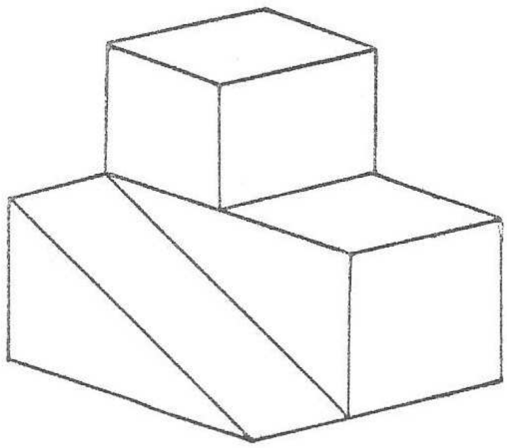
Questão 05: Fazer, a mão livre, as projeções ortogonais das peças mostradas em perspectivas. Guardar proporções aproximadas.

PEÇA A



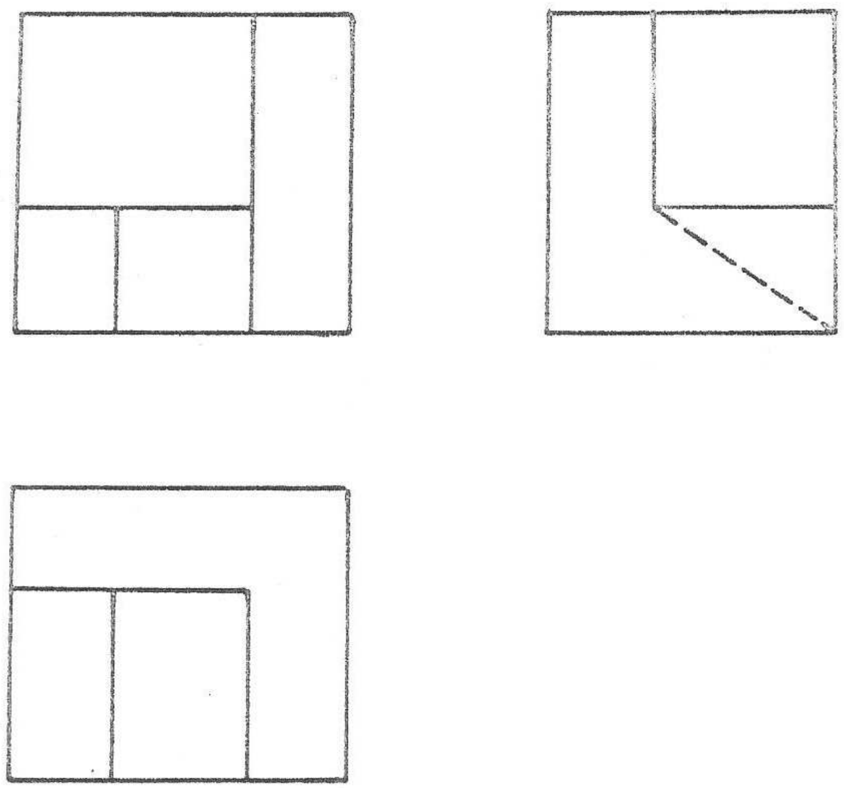
ITA 1966, Questão 05 - Peça A.

PEÇA B



ITA 1966, Questão 05 - Peça B.

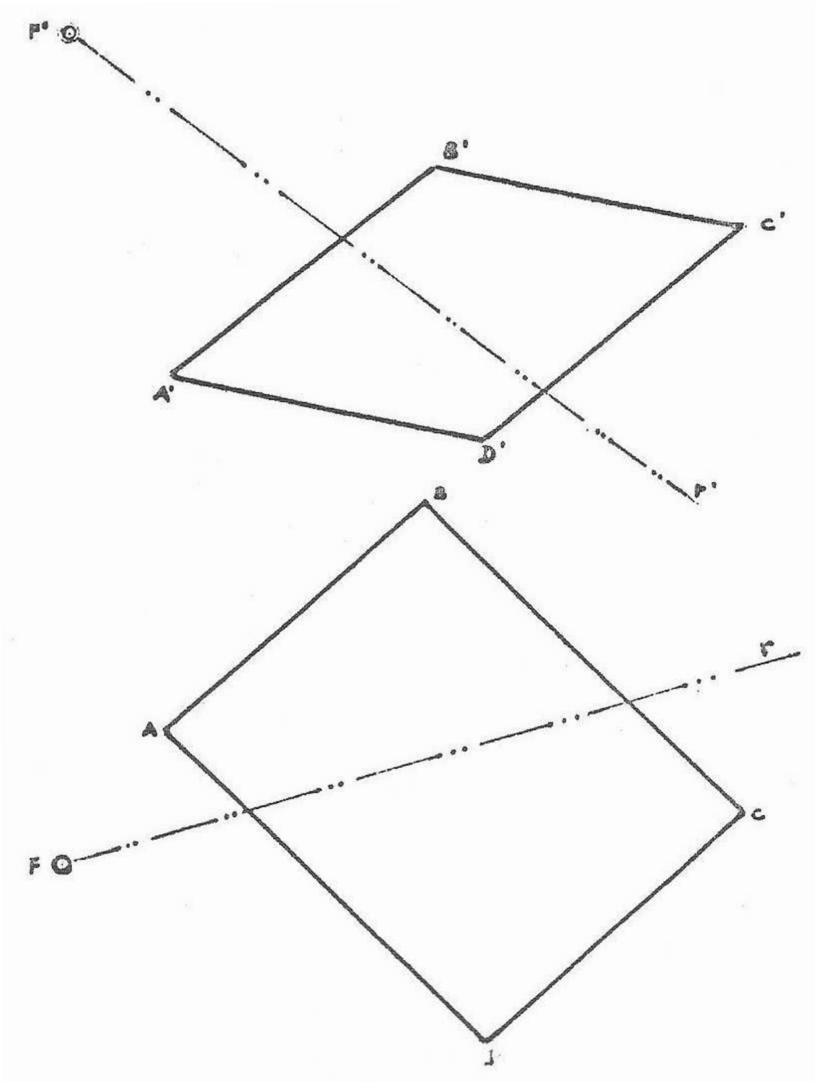
Questão 06: Fazer uma perspectiva de observação, a mão livre, da peça representada em projeção. Guardar proporções aproximadas.



ITA 1966, Questão 06.

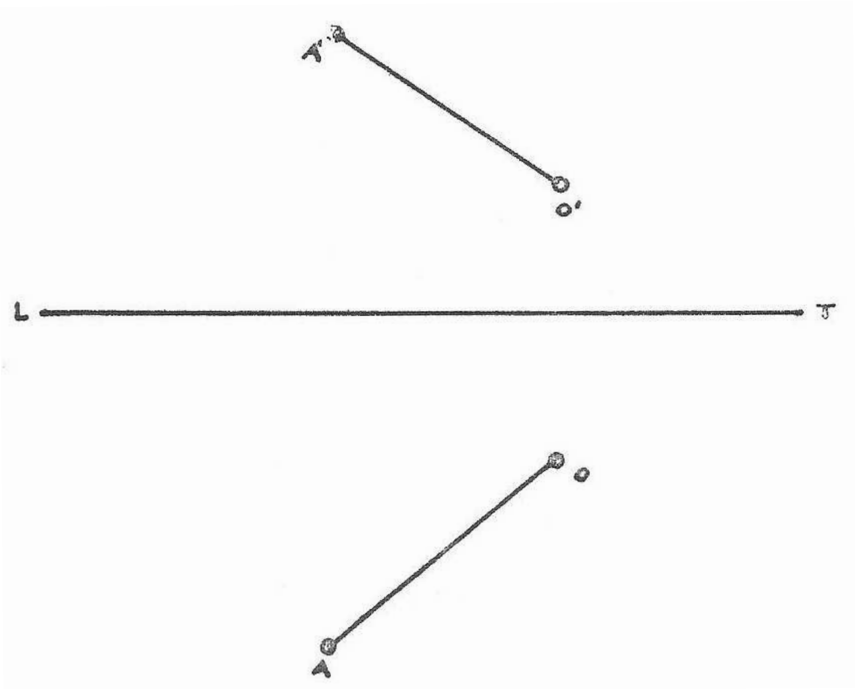
II.25 Vestibular de 1965

Questão 01: O plano $ABCD$ é um espelho e r é a direção de um raio luminoso de origem no ponto F. Pede-se determinar o ponto P que o raio de luz encontra o espelho, a direção do raio refletido s, bem como o valor real do ângulo formado pelos raios r e s.



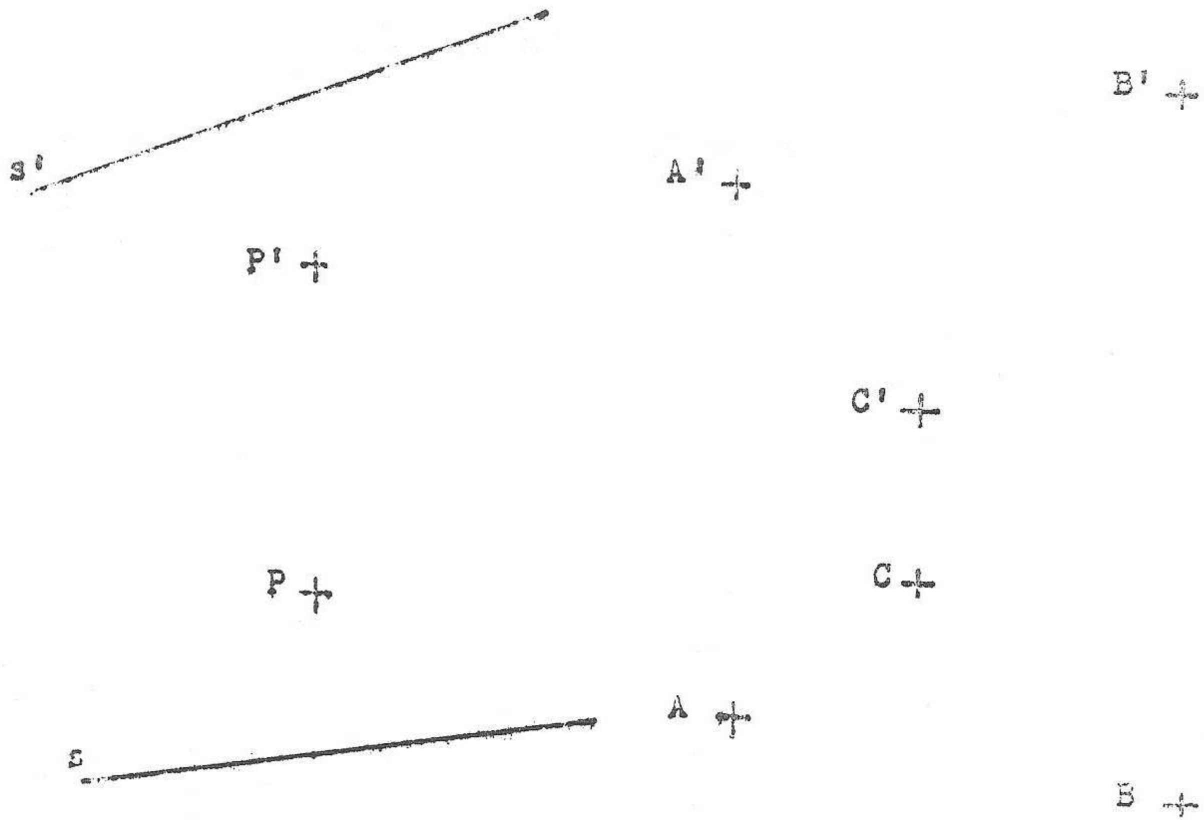
ITA 1965, Questão 01.

Questão 02: O segmento OA é o raio de uma esfera de centro O. Pedem-se os traços, nos planos vertical e horizontal, do plano tangente à esfera no ponto A.



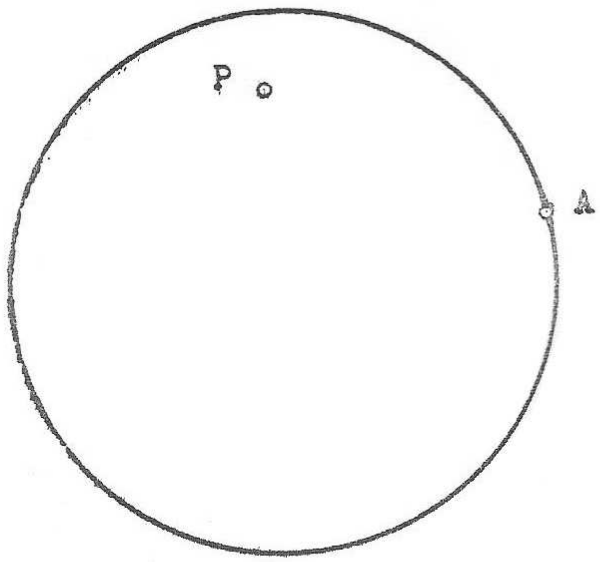
ITA 1965, Questão 02.

Questão 03: Pelo ponto P traçar uma reta r paralela ao plano ABC que se apoie na reta s.



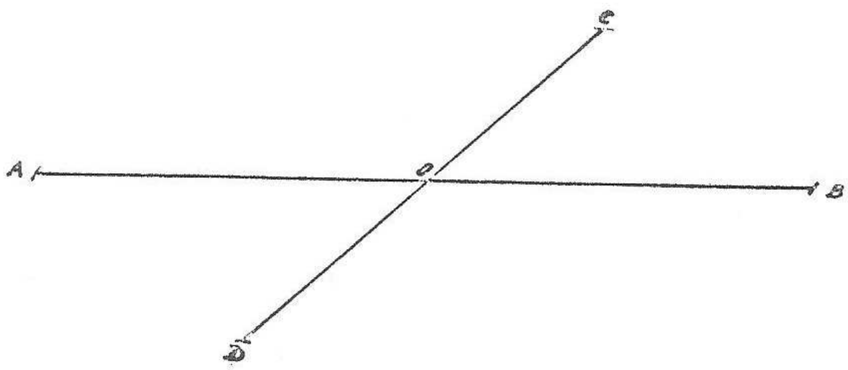
ITA 1965, Questão 03.

Questão 04: Traçar uma circunferência tangente à circunferência dada no ponto A e que passe pelo ponto P.



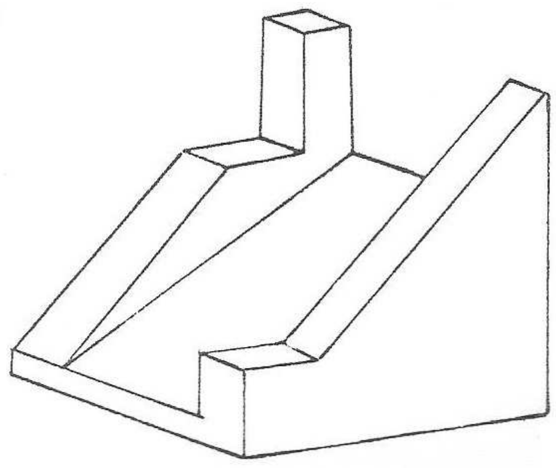
ITA 1965, Questão 04.

Questão 05: Os segmentos AOB e COD são projeções, em um plano qualquer, dos eixos de uma circunferência. Pede-se traçar a mesma projeção desta circunferência.



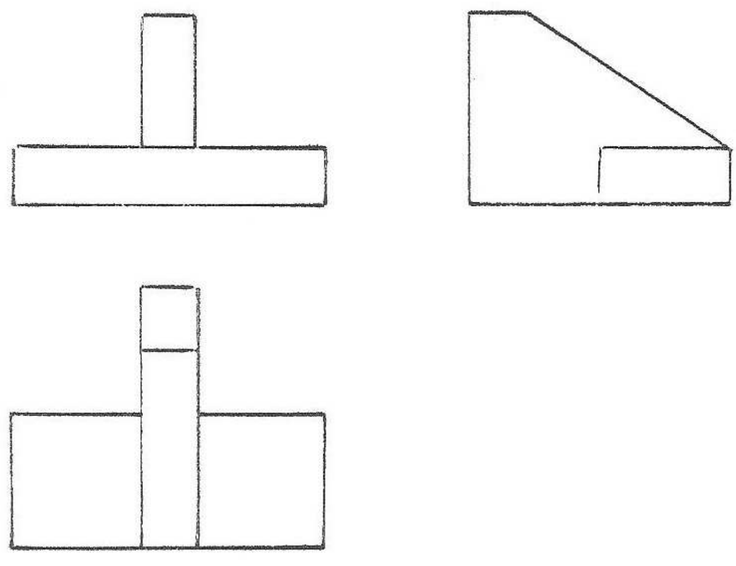
ITA 1965, Questão 05.

Questão 06: Dar, a mão livre, as projeções ortogonais da peça representada em perspectiva. Pedem-se as 3 vistas (vertical, horizontal e lateral), bem como a representação, em linhas tracejadas, das arestas invisíveis. Guardar as proporções aproximadas.



ITA 1965, Questão 06.

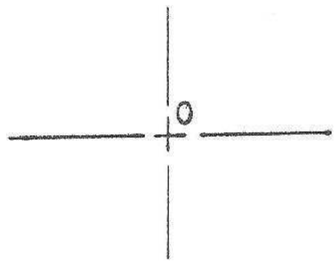
Questão 07: Fazer um esboço em perspectiva, a mão livre, da peça representada por suas projeções ortogonais. Guardar, aproximadamente, as proporções.



ITA 1965, Questão 07.

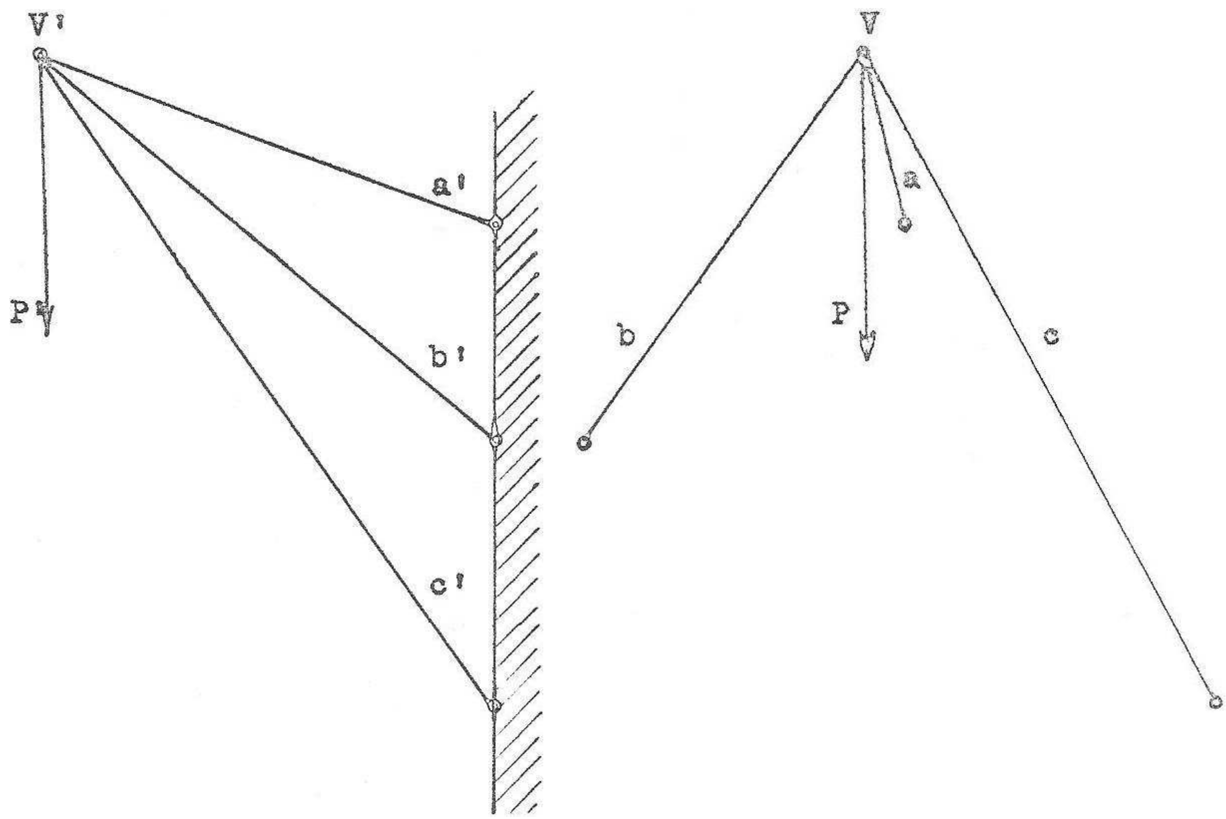
II.26 Vestibular de 1964

Questão 01: O ponto O é o centro de um um hexágono regular inscrito em uma circunferência de diâmetro igual a 50 mm. Pede-se determinar graficamente a quadratura deste hexágono.



ITA 1964, Questão 01.

Questão 02: As barras a, b e c formam a lança de um guindaste que, na posição indicada no problema, deve sustentar uma carga P de linha de ação f. A carga P distribui-se pelas barras do guindaste, originando nas mesmas esforços cuja linha de ação coincide com a direção de cada barra. Tendo em vista que o esforço máximo permissível em qualquer barra é de uma tonelada e que se quer fazer a barra mais solicitada trabalhar com o máximo esforço permissível, determinar graficamente, em valor absoluto, a carga P a ser alçada e os esforços nas demais barras.



ITA 1964, Questão 02.

Questão 03: Os pontos AB e B determinam a reta suporte do eixo maior do retângulo seção transversal de um duto prismático de comprimento indeterminado. A reta suporte do eixo menor deste mesmo retângulo contém o ponto C. A reta que contém os pontos E e F é charneira de rotação de um plano α. Pedem-se:

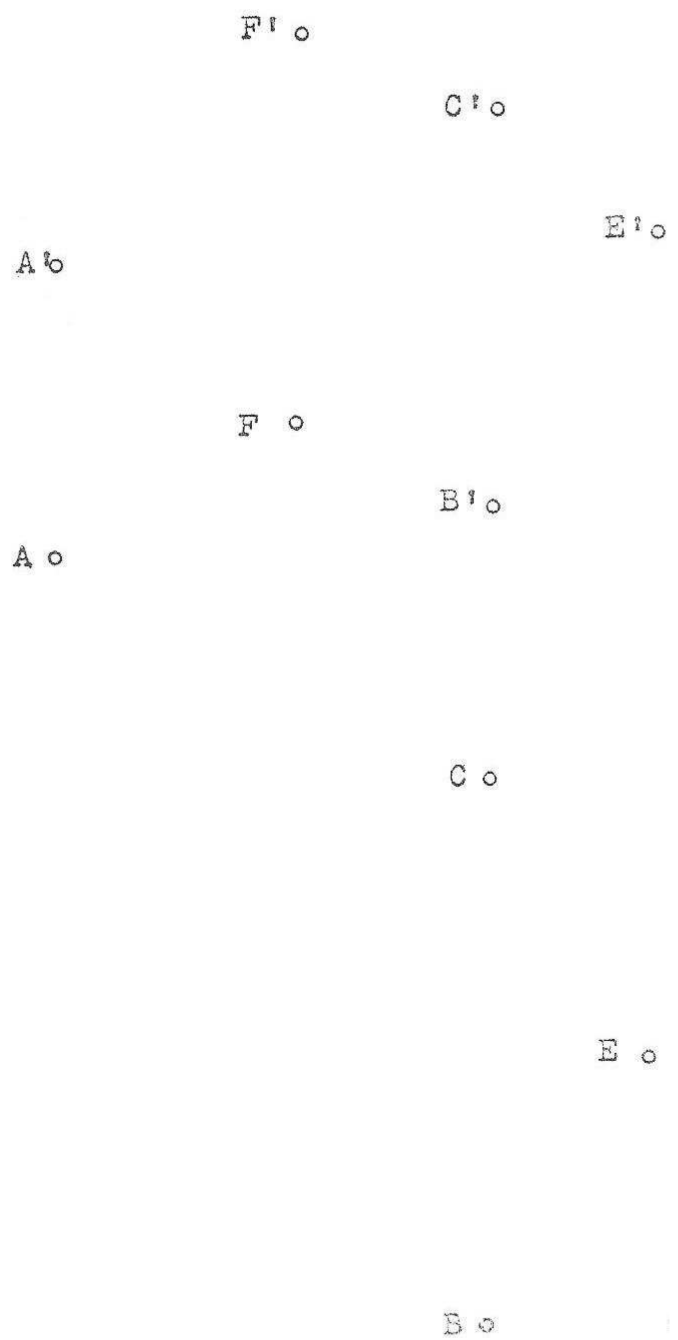
a) A projeção do duto seccionado pelo plano α de maneira tal que a figura seção seja um quadrado.

b) A projeção de um outro duto de seção quadrada que se conecta ao primeiro, tendo um comprimento de 60 mm.

c) O ângulo que o eixo deste segundo duto forma com o eixo longitudinal do primeiro.

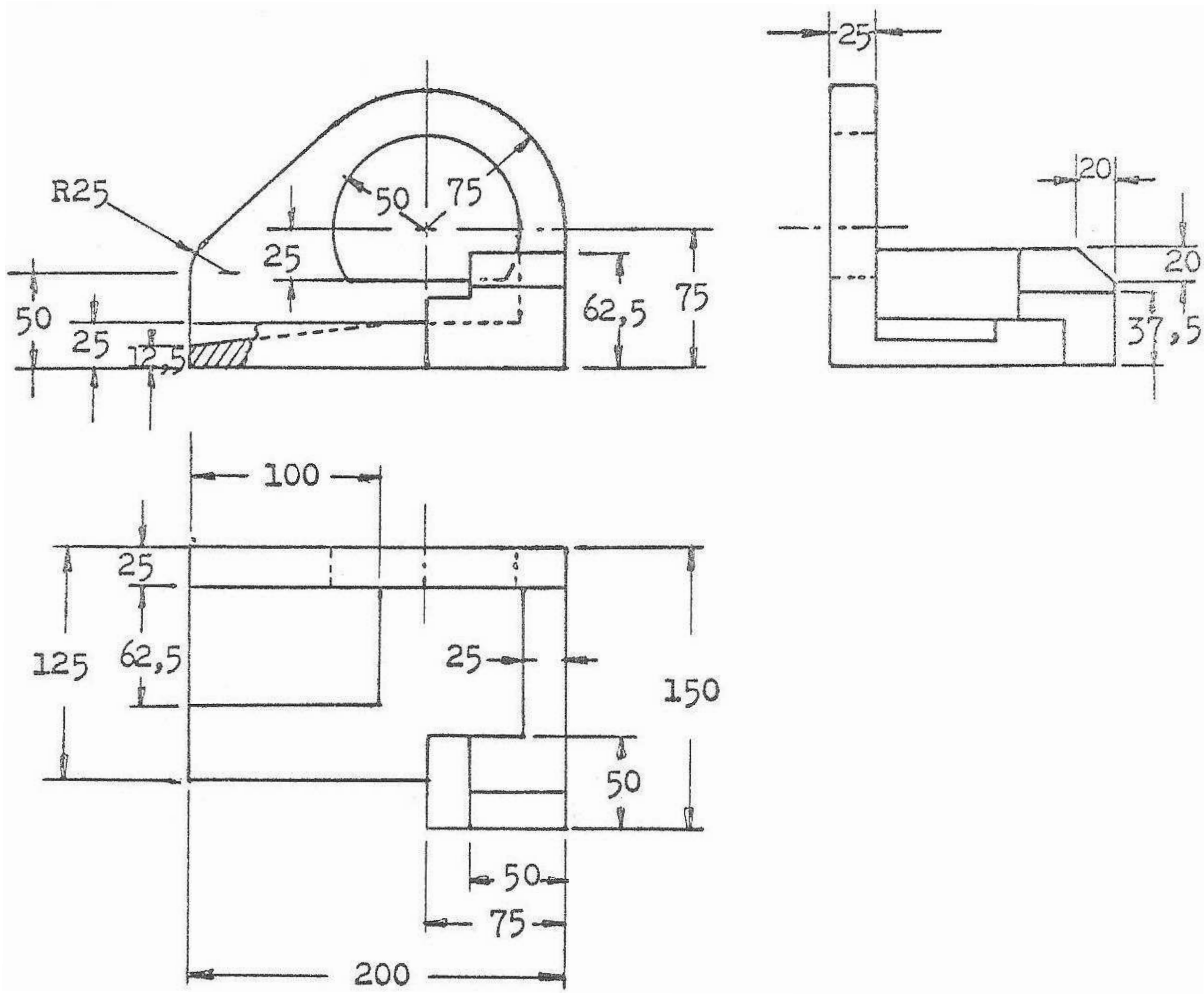
d) A correta visibilidade dos dutos, bem como a visibilidade relativa de um em relação ao outro.

Eixo maior do 1^{o} duto = 63 mm
Eixo menor do 1^{o} duto = média proporcional entre o valor do eixo maior e 36.
Pede-se a solução gráfica, devendo esta ser feita à parte, na mesma folha.



ITA 1964, Questão 03.

Questão 04: O desenho abaixo representa as projeções ortogonais de uma peça. Pede-se a perspectiva dimétrica desta peça, realizada na escala de 1:2,5. Indique as relações de nclinação usadas para os eixos perspectivos, bem como as reduções perspectivas correspondentes.
Sugestão: A maior dimensão da peça deve formar o menor ângulo com o quadro de projeção.



ITA 1964, Questão 04.

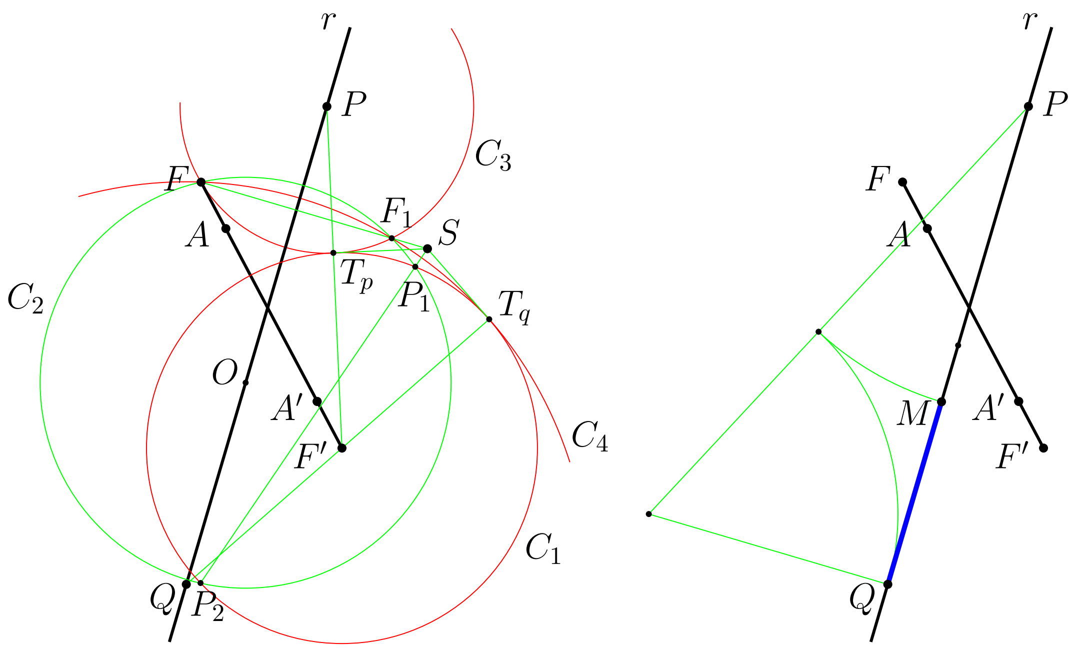
Parte III

Soluções Propostas

Ano	Prova
1993	X
1992	-
1991	-
1990	X
1989	X
1988	X
1987	X
1986	X
1985	X
1984	X
1983	X
1982	X
1981	X
1980	X
1979	X

III.1 Soluções de 1993

ITA 1993, Questão 21: Determinar, sem traçar a curva, os pontos P e Q, comuns a uma reta dada r e a uma hipérbole dada por seus focos F e F' e o eixo transverso $\overline{AA'}$. Sobre $\overline{PQ}$, encontre um ponto M de tal forma que $\overline{PM}^2 = \overline{PQ}.\overline{MQ}$. Pergunta: Quanto mede aproximadamente o segmento $\overline{MQ}$?
Obs: O ponto P está situado à direita de $\overline{FF'}$.



(a) (b)

ITA 1993, Questão 21 (baseada em solução de [10]): (a) Pontos P e Q; (b) Solução - (D) 25 mm.

Construção: (i) Determine o simétrico F_1 de F em relação a r; (ii) Trace os círculos $C_1 \equiv (F', \overline{AA'})$ e $C_2 \equiv (O, OF)$, com O qualquer sobre r, cujas interseções com C_1 são os pontos P_1 e P_2 quaisquer; (iii) Trace as retas suportes de FF_1 e P_1P_2, cuja interseção é o ponto S; (iv) Determine os pontos T_p e T_q de tangência a C_1 por S; (v) Trace as retas suportes de $F'T_p$ e $F'T_q$, cujas interseções com r determinam os pontos P e Q desejados; (vi) Determine o segmento áureo de PQ (ver [1], pp. 40–42), marcando o ponto M mais próximo a Q.

Justificativa: Traçando o círculo $C_1 \equiv (F', \overline{AA'})$, a hipérbole pode ser descrita como o lugar geométrico dos centros dos círculos tangentes a C_1 e que passam por F. Com isto, o problema requer a determinação dos centros de dois círculos, C_3 e C_4, que passam por F e F_1 (simétrico de F em relação a r, de modo a garantir que os centros estejam sobre r) e são tangentes a C_1.

A chave da solução é o centro radical S de C_1, C_3 e C_4. Para determinarmos S, usamos o círculo auxiliar C_2 de forma que

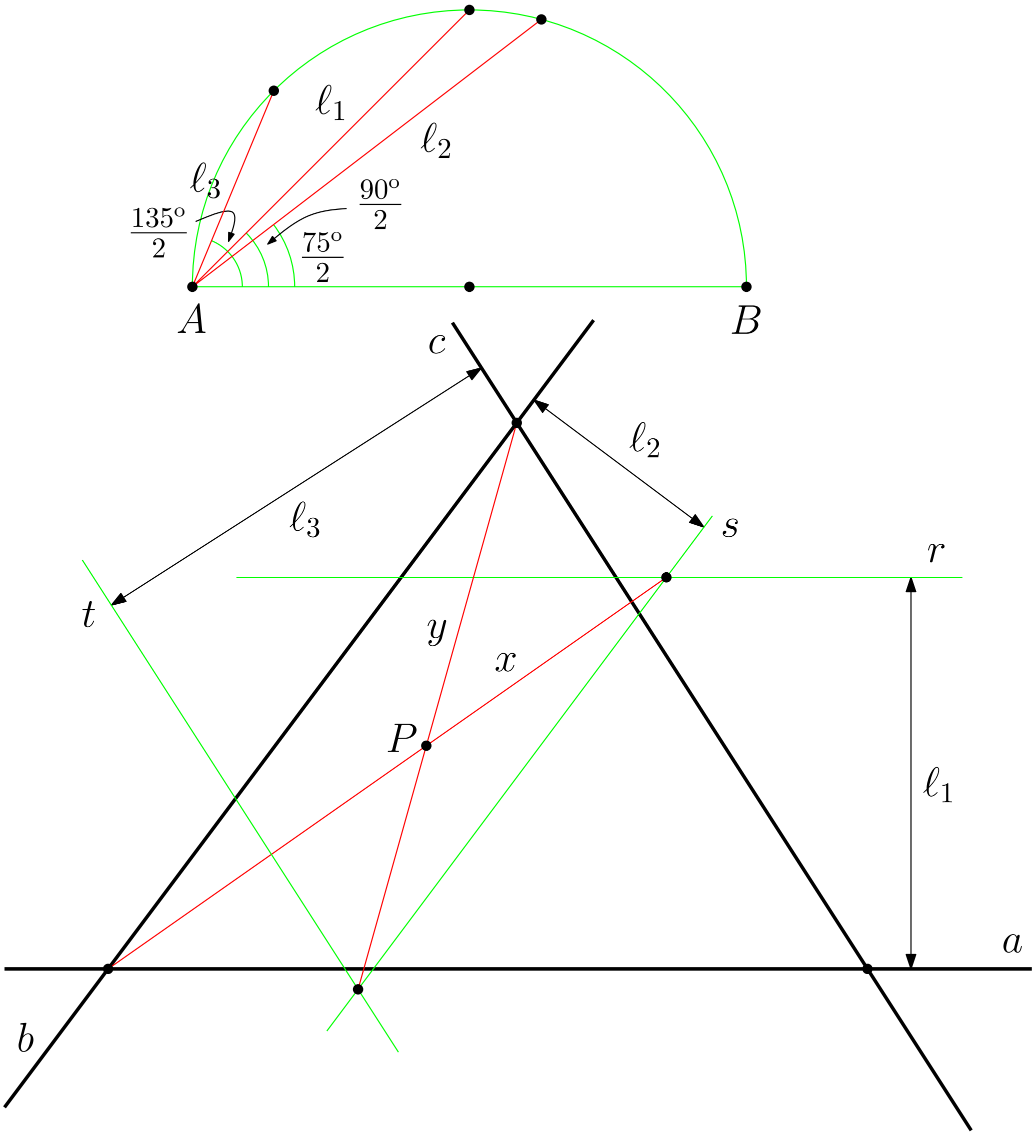
$$\mathrm{Pot}_{C_2}(S) = \overline{SF}.\overline{SF_1} = \overline{SP_1}.\overline{SP_2} = \mathrm{Pot}_{C_1}(S) = \begin{cases} \overline{ST_p}^2 = \mathrm{Pot}_{C_3}(S) \\ \overline{ST_q}^2 = \mathrm{Pot}_{C_4}(S) \end{cases}$$

Assim, os círculos C_3 e C_4 ficam determinados pelas tríades de pontos (F, F_1, T_p) e (F, F_1, T_q), respectivamente. Os círculos C_3 e C_4 são tangentes a C_1 em T_p e T_q, respectivamente. Com isto, o centro de C_3 é colinear com F' e T_p e o de C_4 com F' e T_q, o que permite determinar P e Q sobre r. Da figura-solução é simples perceber que

$$\begin{cases} \overline{PF'} - \overline{PF} = \overline{PF'} + \overline{PT_p} = \overline{F'T_p} = \overline{AA'} \\ \overline{QF} - \overline{QF'} = \overline{QT_q} - \overline{QF'} = \overline{F'T_q} = \overline{AA'} \end{cases}$$

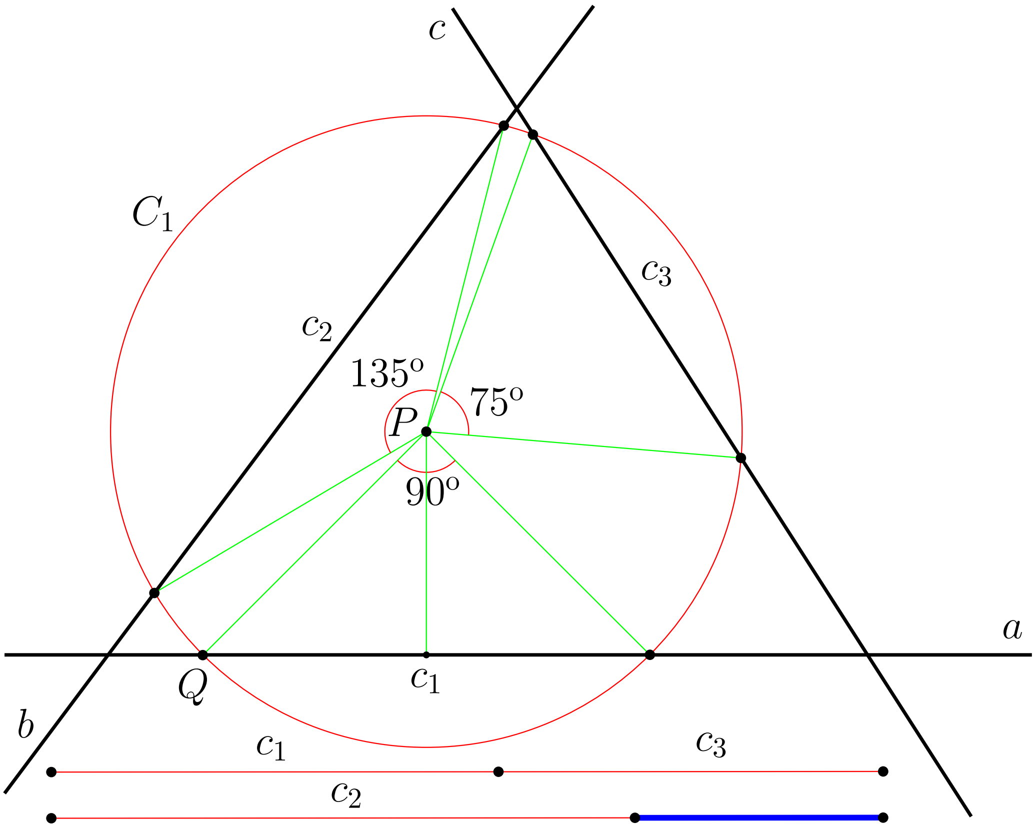
confirmando que P e Q pertencem à hipérbole.

ITA 1993, Questão 22: Dadas as retas a, b e c, traçar uma circunferência que seja interceptada por estas retas, segundo arcos de amplitudes respectivamente iguais a 90^o, 135^o e 75^o. Pergunta: Qual a diferença entre a soma das cordas definidas pelas retas nos arcos de amplitudes 90^o e 75^o e a corda correspondente ao arco de 135^o.



ITA 1993, Questão 22: Determinando o ponto P (baseado em solução de [8]).

Construção (baseada em solução de [8]): Seja p_{ij} a interseção das retas i e j. (i) Dado um diâmetro AB qualquer, determine as cordas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 relativas aos ângulos centrais 90^o, 135^o e 75^o, respectivamente; (ii) Trace as retas r, paralela a a a uma distância ℓ_1, s, paralela a b a uma distância ℓ_2, e t, paralela a c a uma distância ℓ_3; (iii) Trace as retas x, determinada pelos pontos p_{ab} e p_{rs}, e y, determinada pelos pontos p_{bc} e p_{st}, cuja interseção é o ponto $P \equiv p_{xy}$, centro da circunferência desejada; (iv) Trace a perpendicular a a por P e marque o ângulo de 45^o relativo a esta perpendicular, determinando o ponto Q sobre a; (v) Trace o círculo $C_1 \equiv (P, PQ)$, determinando as cordas c_1, c_2 e c_3 sobre a, b e c, respectivamente.

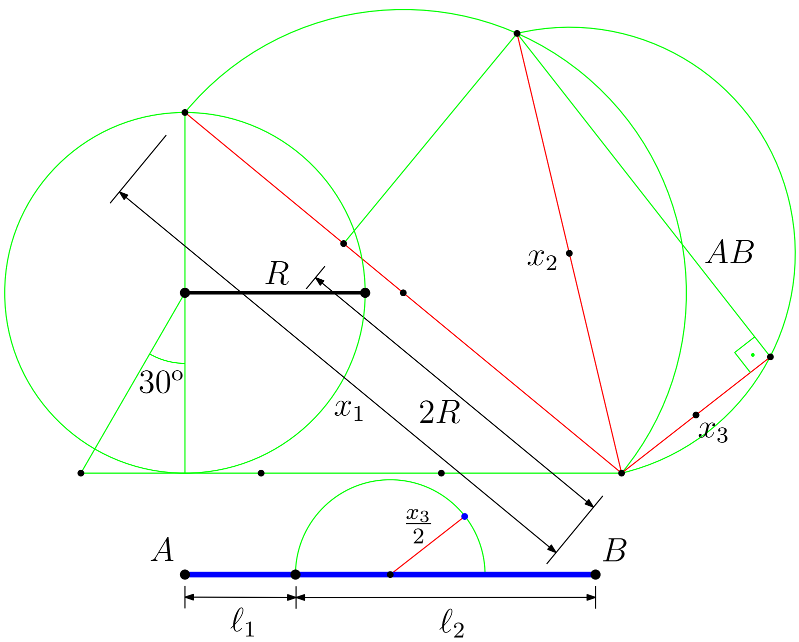


ITA 1993, Questão 22: Solução - (A) 33 mm.

Justificativa: O lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a duas retas concorrentes é constante é uma reta que passa pelo ponto de interseção das retas dadas. Assim, o lugar geométrico é completamente determinado por um ponto qualquer, que não o de interseção, que satisfaz a condição dada.

As distâncias d_a, d_b e d_c do ponto P às retas a, b e c, respectivamente, são tais que $x : \frac{d_a}{d_b} = \frac{\cos 45^o}{\cos 67.5^o}$ e $y : \frac{d_b}{d_c} = \frac{\cos 67.5^o}{\cos 37.5^o}$, o que permite determinar P.

ITA 1993, Questão 23: O segmento AB corresponde à soma de um lado de um quadrado com um lado de outro. A soma das áreas dos quadrados é equivalente à área de um círculo de raio R dado. Pergunta: Quanto medem aproximadamente os lados dos quadrados?



ITA 1993, Questão 23: Solução - (D) 40 mm e 15 mm.

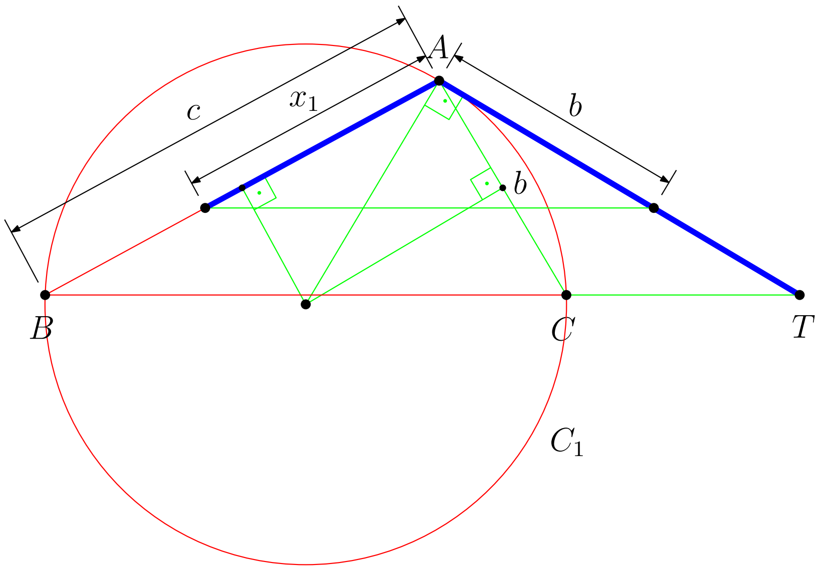
Construção: (i) Retifique a semi-circunferência de raio R, determinando o comprimento $x_1 = \pi R$; (ii) Determine a média geométrica $x_2 = \sqrt{2R.x_1}$; (iii) Construa o triângulo retângulo de hipotenusa x_2 e cateto AB, determinando o outro cateto $x_3 = \sqrt{2\pi R^2 - AB^2}$; (iv) Determine $\ell_{1,2} = \frac{AB \pm x_3}{2}$.

Justificativa: Do enunciado,

$$\begin{cases} \ell_1 + \ell_2 = AB \\ \ell_1^2 + \ell_2^2 = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow 2\ell^2 - 2\ell AB + AB^2 - \pi R^2 = 0 \Rightarrow \ell = \frac{AB \pm \sqrt{2\pi R^2 - AB^2}}{2}$$

ITA 1993, Questão 24: Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo ABC. Determinar dois segmentos de tal forma que o produto destes segmentos seja igual ao produto dos lados b e c. Um dos segmentos é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo no vértice A. Pergunta: Quanto mede a soma dos segmentos pedidos, considerando os dados na escala $1:50$?

sln: O enunciado do problema não determina o comprimento da tangente no vértice A. Desta forma, a questão deve ser anulada. Considerando que este segmento tangente é limitado pela reta suporte do lado BC, tem-se a solução a seguir.

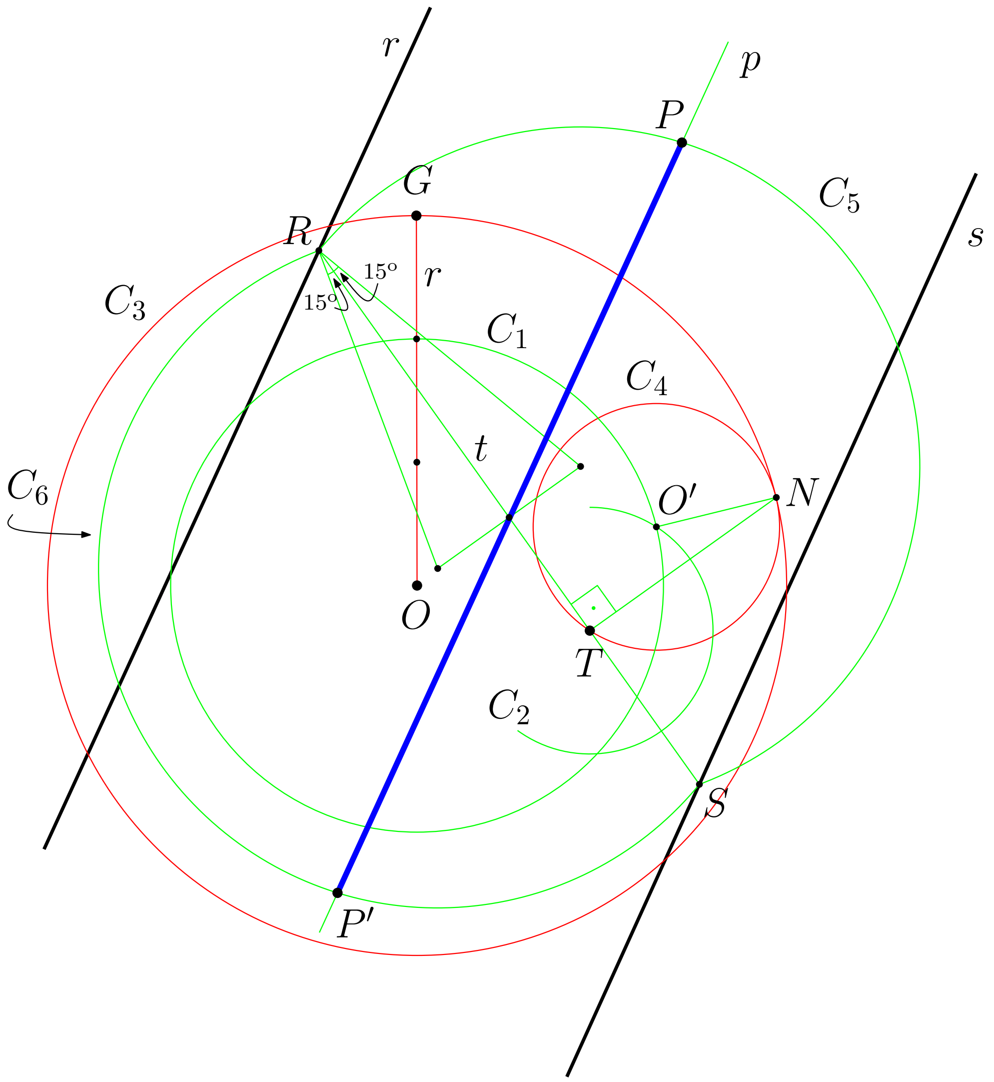


ITA 1993, Questão 24 (modificada): Solução - (C) $4{,}55$ **m.**

Construção: (i) Trace a circunferência C_1 circunscrita ao triângulo ΔABC ([2], Exercício 1.3); (ii) Trace a tangente à circunferência C_1 no vértice A, cuja interseção com o prolongamento do lado BC determina o ponto T; (iii) Determine a quarta proporcional $AT : b = c : x_1$.

Justificativa: A construção acima segue diretamente do enunciado da versão modificada do problema.

ITA 1993, Questão 25: De um tricúspide são dados: o centro O da circunferência diretora, o ponto gerador G e um ponto T da curva. Pede-se traçar por T uma reta tangente à curva. Pergunta: Quanto mede a menor distância entre dois pontos P e P', equidistantes das retas dadas r e s e que vêem a porção da tangente em T, compreendida entre r e s, sob ângulos de 75^o?



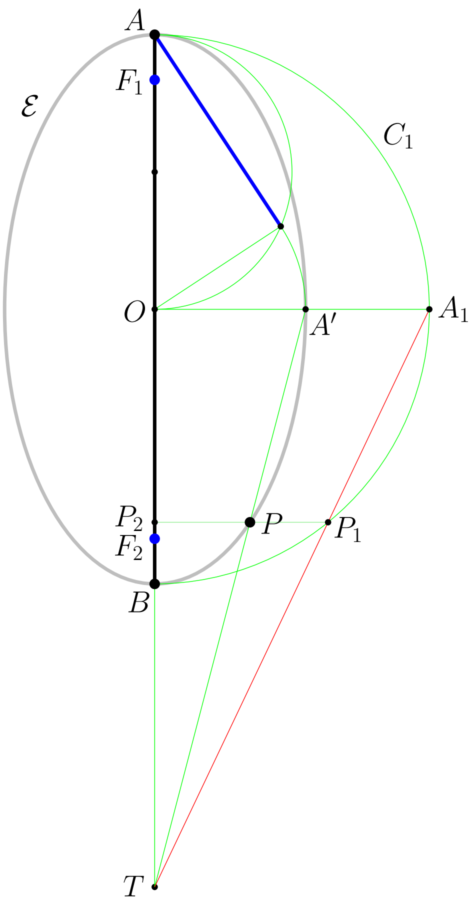
ITA 1993, Questão 25: Solução (E) 105 mm.

Construção: (i) Determine o raio do círculo gerador $r = \frac{OG}{3}$; (ii) Trace os círculos auxiliares $C_1 \equiv (O, 2r)$ e $C_2 \equiv (T, r)$, determinando o centro do círculo gerador O'; (iii) Trace os círculos diretor $C_3 \equiv (O, OG)$ e gerador $C_4 \equiv (O', r)$, determinando seu ponto de tangência N; (iv) Trace a perpendicular t a NT por T, que é a tangente desejada, determinando os pontos R e S sobre as retas r e s, respectivamente; (v) Trace a bissetriz p das retas r e s. Estas retas parecem ser paralelas, assim p é paralela a r e s passando pelo ponto médio de RS; (vi) Trace os arcos-capazes C_5 e C_6 do ângulo de 75^o em cada lado do segmento RS, determinando os pontos P e P' sobre p.

Justificativa: A tricúspide é uma hipociclóide em que o raio do círculo gerador r é $\frac{1}{3}$ do raio do círculo diretor. O centro O' do círculo gerador está a uma distância r tanto do ponto T quanto do círculo diretor, o que permite determinar O'. Assim, é possível traçar os círculos diretor e gerador (que contém T), determinando seu ponto de tangência N. A tangente à hipociclóide em T é perpendicular a NT. Tendo-se a tangente, a solução do problema é trivial.

III.2 Soluções de 1990

Questão 01: De uma elipse conhecemos o eixo maior $\overline{AB}$ e um ponto P pertencente à curva. Pergunta: Quanto mede a distância focal desta elipse?

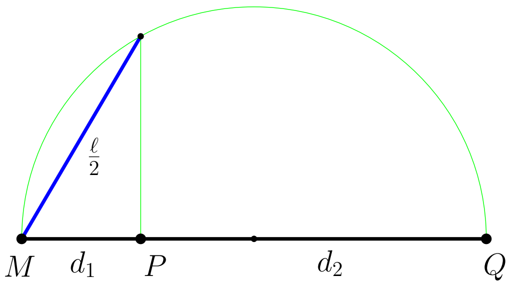


ITA 1990, Questão 01: Solução - (C) 51 mm.

Construção: (i) Determine o ponto médio O de AB e trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(O, OA)$; (ii) Trace perpendiculares a AB por P e O, determinando as respectivas interseções P_1 e A_1 sobre C_1, e ainda a projeção P_2 de P sobre AB; (iii) Determine a interseção T dos prolongamentos de AB e A_1P_1; (iv) Determine a interseção A' do prolongamento de TP com OA_1, vértice do semi-eixo menor da elipse; (v) Determine o outro cateto $OF_1 = OF_2$ do triângulo retângulo de hipotenusa OA e cateto OA_1, com F_1 e F_2 sobre AB, de modo que F_1F_2 é a distância focal desejada.

Justificativa: O ponto T é o centro de afinidade que transforma a circunferência C_1 na elipse $\mathcal{E}$, e, por isto mesmo, transforma os pontos P_1 e O_1 nas respectivas imagens P (dada) e A' (a se determinar).

Questão 02: O ponto M dado corresponde ao ponto médio de um segmento de reta $\overline{AB}$. Sendo dados os pontos P e Q, os quais são respectivamente os conjugados harmônicos interno e externo de $\overline{AB}$, pede-se determinar este segmento. Pergunta: Quanto mede o segmento $\overline{AB}$, considerando-se os dados na escala 1:25?



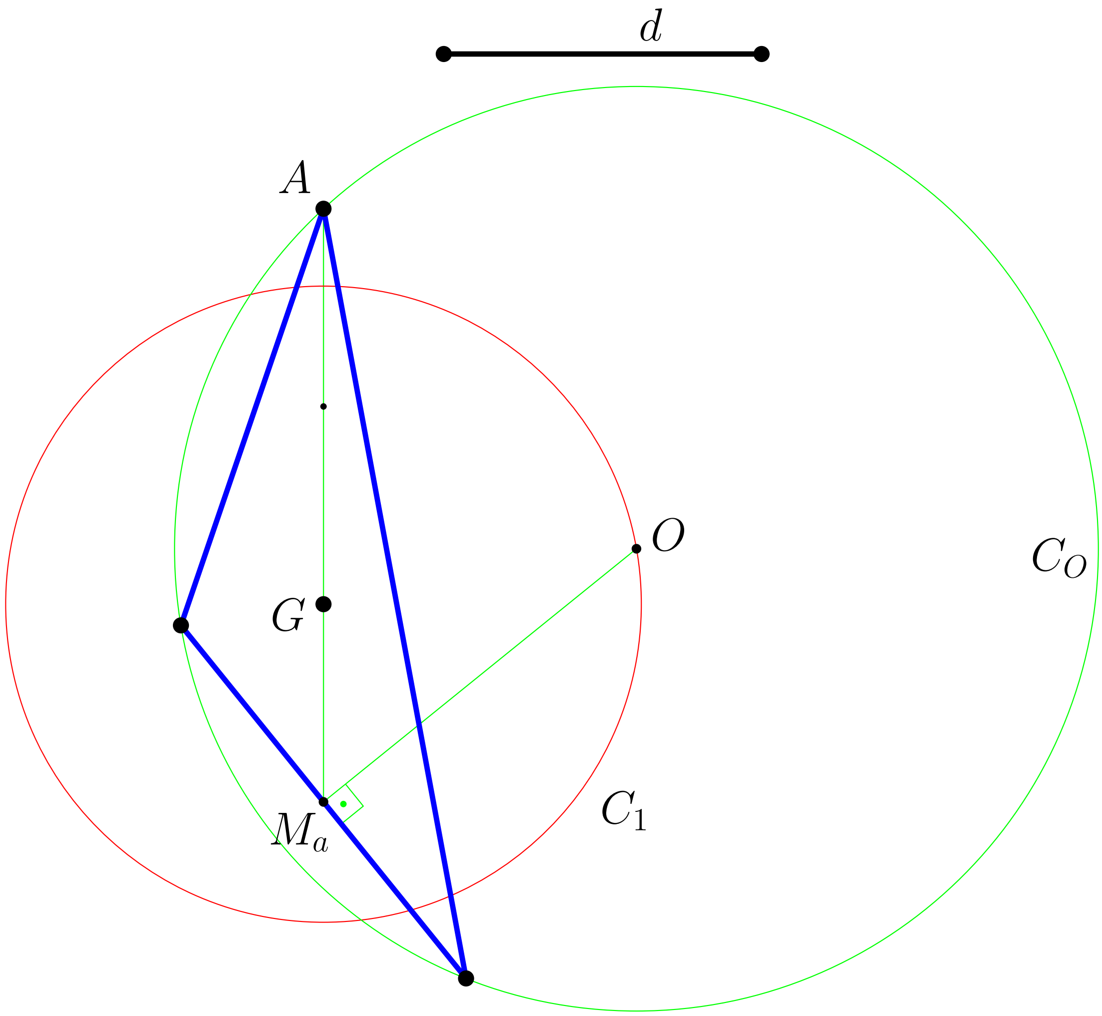
ITA 1990, Questão 02: Solução - (B) 1,60 m.

Construção: (i) Determine a média geométrica $\frac{\ell}{2}$ de MP e MQ.

Justificativa: Sejam $AB = \ell$, $MP = d_1$ e $PQ = d_2$, de modo que $AM = \frac{\ell}{2}$, $PB = (MB - MP) = (\frac{\ell}{2} - d_1)$ e $BQ = (PQ - PB) = (d_2 - \frac{\ell}{2} + d_1)$. Assim, da definição de conjugados harmônicos,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} \Rightarrow \frac{\frac{\ell}{2} + d_1}{\frac{\ell}{2} - d_1} = \frac{d_2 + d_1 + \frac{\ell}{2}}{d_2 + d_1 - \frac{\ell}{2}} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{d_1(d_1 + d_2)}$$

Questão 03: Construir o triângulo ABC do qual conhecemos o vértice A, o baricentro G e sabendo-se que o segmento dado d corresponde à distância entre o baricentro e o circuncentro deste triângulo. Pergunta: Quanto mede aproximadamente o maior lado do triângulo ABC?



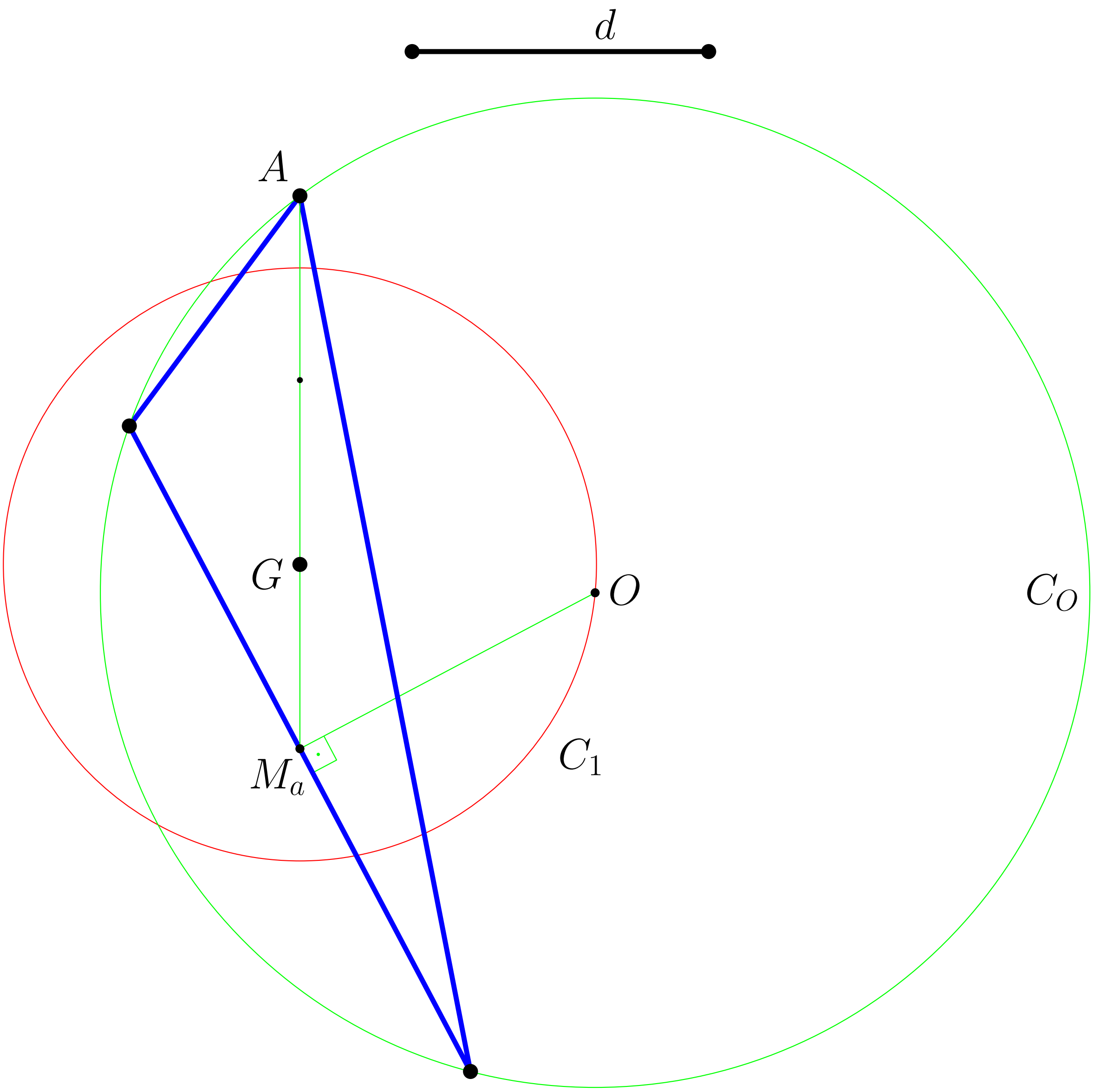
ITA 1990, Questão 03: Solução 1 - (X).

Construção: (i) Trace a reta suporte de AG e marque M_a, ponto médio do lado BC, tal que $AG = 2GM_a$, com G entre A e M_a; (ii) Trace a circunferência $C_1 \equiv \mathcal{C}(G, d)$, e escolha o circuncentro O sobre C_1 (tal que $OA > OM_a$); (iii) Trace a circunferência $C_O \equiv \mathcal{C}(O, OA)$; (iv) Trace por M_a uma perpendicular a OM_a, determinando os vértices B e C desejados sobre C_O.

Justificativa: Conforme indicado na construção dada, existem infinitas soluções para o problema, uma para cada posição do circuncentro O sobre C_1 (tal que $OA > OM_a$).

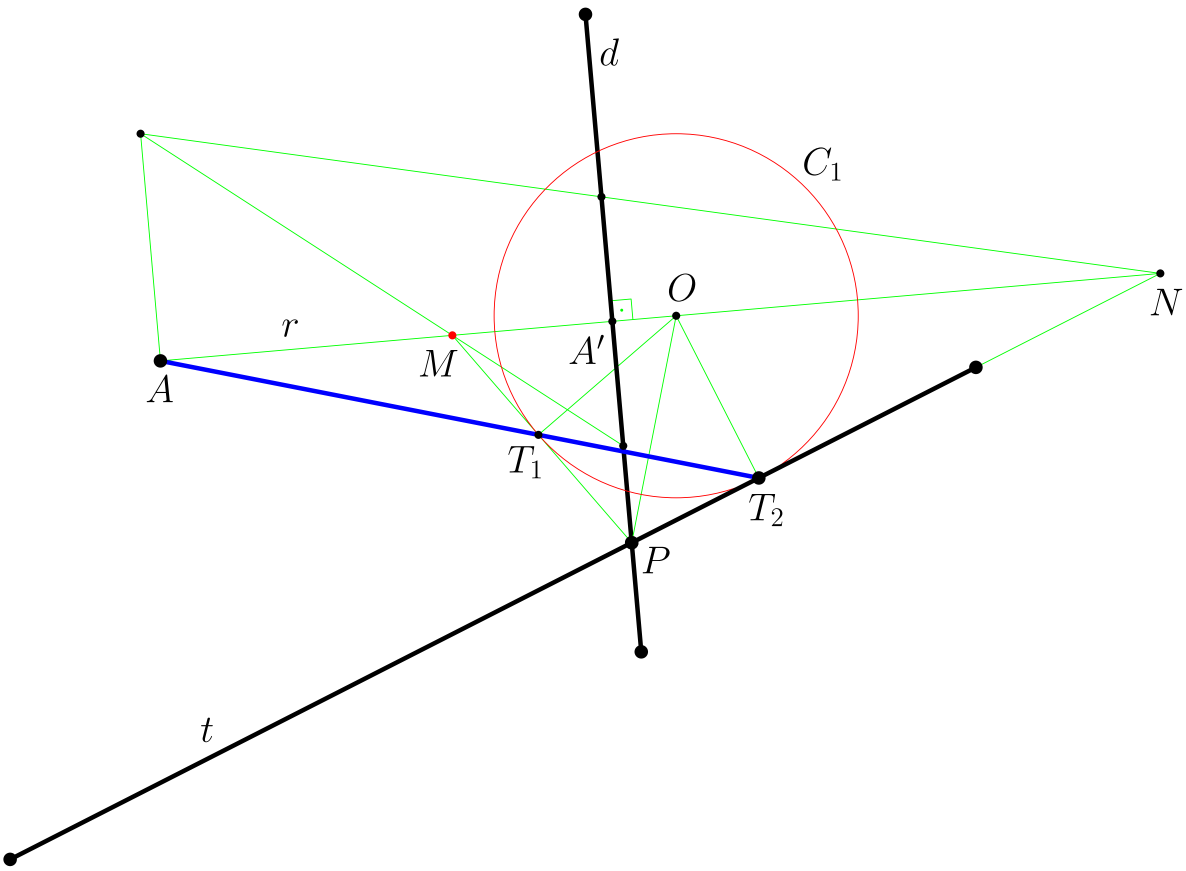
Determinado o ponto M_a, tal que $AG = 2GM_a$, e escolhendo o circuncentro sobre C_1, os vértices B e C desejados estão sobre C_O e são tais que BC é perpendicular a OM_a (já que M_a é médio de BC).

As figuras dadas exemplificam dois (dos inúmeros) triângulos que satisfazem as condições do problema, o que pode ser verificado pelo leitor interessado.



ITA 1990, Questão 03: Solução 2 - (X).

Questão 04: São dadas as retas t, d e o ponto A. Traçar uma circunferência tangente à reta t, de tal forma que a reta d seja a polar do ponto A em relação a esta circunferência. Pergunta: Qual é a distância entre o ponto A e o ponto de tangência da circunferência na reta t?



ITA 1990, Questão 04: Solução (baseada em solução do curso ETAPA) - (B) 81 mm.

Construção (baseada em solução do curso ETAPA): Seja P a interseção das retas d e t dadas. (i) Trace a reta r, perpendicular a d por A, determinando as interseções A' sobre d e N sobre t; (ii) Determine o ponto M, conjugado harmônico de N relativo ao segmento AA' (ver construção auxiliar); (iii) Trace a bissetriz do ângulo $M\hat{P}N$, determinando o ponto O, centro do círculo desejado, sobre a reta r; (iv) Trace a perpendicular à reta t por O, determinando o ponto de tangência T_2 sobre t e, consequentemente, a distância desejada $AT_2 = 81$ cm.

Obs: Na solução dada, o ponto A é externo e o ponto A' é interno a C_1. Existe uma outra solução para o problema, na qual A é interno e A' é externo à circunferência C_2. Nesse outro caso, o centro de C_2 é a interseção da bissetriz externa do ângulo $M\hat{P}N$ com a reta r.

Justificativa: Na figura-solução, seja M a interseção da tangente PT_1 ao círculo desejado por P.

No caso, a reta T_1T_2 é a polar de P (já que T_1 e T_2 são os pontos de tangência das tangentes por P), e como P pertence à polar d de A, então A pertence à polar T_1T_2 de P. Assim, a interseção de T_1T_2 com a reta r é o próprio ponto A, isto é, T_1, T_2 e A são colineares.

Aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo ΔPMN com a secante AT_1T_2, tem-se

$$\frac{T_2P.AN.T_1M}{T_1P.T_2N.AM} = 1 \Rightarrow \frac{AN.T_1M}{T_2N.AM} = 1 \Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{T_2N}{T_1M}.$$

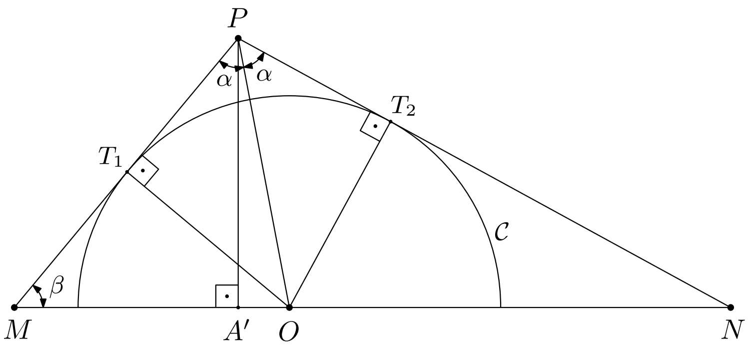
Com isso, usando o Lema abaixo, tem-se

$$\frac{AN}{AM} = \frac{A'N}{A'M},$$

de modo que o ponto M é o conjugado harmônico do ponto N relativo ao segmento AA'.

Lema: Em um triângulo ΔPMN são dados os pés A' e O da altura e da bissetriz, respectivamente, pelo vértice P. Seja ainda a circunferência $\mathcal{C}$ de centro O e tangente aos lados PM e PN nos pontos T_1 e T_2, respectivamente. Neste caso,

$$\frac{A'M}{T_1M} = \frac{A'N}{T_2N}.$$



ITA 1990, Questão 04, Lema.

Prova: Usando a notação da figura acima, têm-se

$$\begin{cases} M\hat{P}O = N\hat{P}O = \alpha \\ P\hat{M}N = \beta \end{cases} \Rightarrow P\hat{N}M = 180^{\text{o}} - (2\alpha + \beta),$$

e assim

$$\begin{aligned} T_1M &= OM\cos P\hat{M}N = OM\cos\beta, \\ T_2N &= ON\cos P\hat{N}M = ON\cos[180^{\text{o}} - (2\alpha+\beta)], \\ A'M &= PM\cos P\hat{M}N = PM\cos\beta, \\ A'N &= PN\cos P\hat{N}M = PN\cos[180^{\text{o}} - (2\alpha+\beta)]. \end{aligned}$$

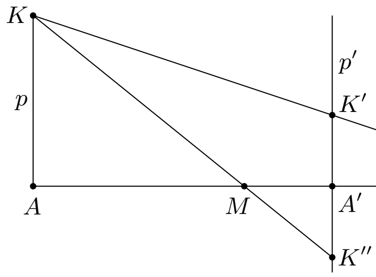
Além disso, pelo teorema das bissetrizes,

$$\frac{PM}{OM} = \frac{PN}{ON}.$$

Com isso, podemos escrever que

$$\frac{A'M}{T_1M} = \frac{PM\cos\beta}{OM\cos\beta} = \frac{PM}{OM} = \frac{PN}{ON} = \frac{PN\cos[180^{\text{o}} - (2\alpha+\beta)]}{ON\cos[180^{\text{o}} - (2\alpha+\beta)]} = \frac{A'N}{T_2N}.$$

Construção auxiliar: Dados os pontos colineares A, A' e N, com A' entre A e N, determine o ponto M, conjugado harmônico de N relativo ao segmento AA'.



ITA 1990, Questão 04, Construção Auxiliar - Solução 1.

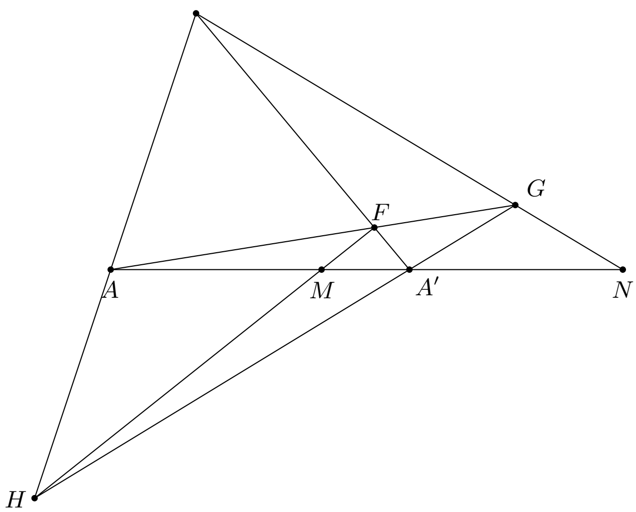
Solução 1: (i) Trace perpendiculares p e p' à reta AN pelos pontos A e A', respectivamente. (ii) Por um ponto K qualquer de p, trace o segmento KN, determinando o ponto K' sobre p'. (iii) Marque o ponto K'' sobre p', simétrico de K' em relação a A'. (iv) Trace o segmento KK'' determinando o ponto M desejado sobre a reta AN.

Justificativa: Das semelhanças dos triângulos ΔKAM e $\Delta K''A'M$ e dos triângulos ΔKAN e $\Delta K'A'N$, têm-se

$$\begin{cases} \dfrac{KA}{K''A'} = \dfrac{AM}{A'M} \\ \dfrac{KA}{K'A'} = \dfrac{AN}{A'N} \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{A'M} = \frac{AN}{A'N},$$

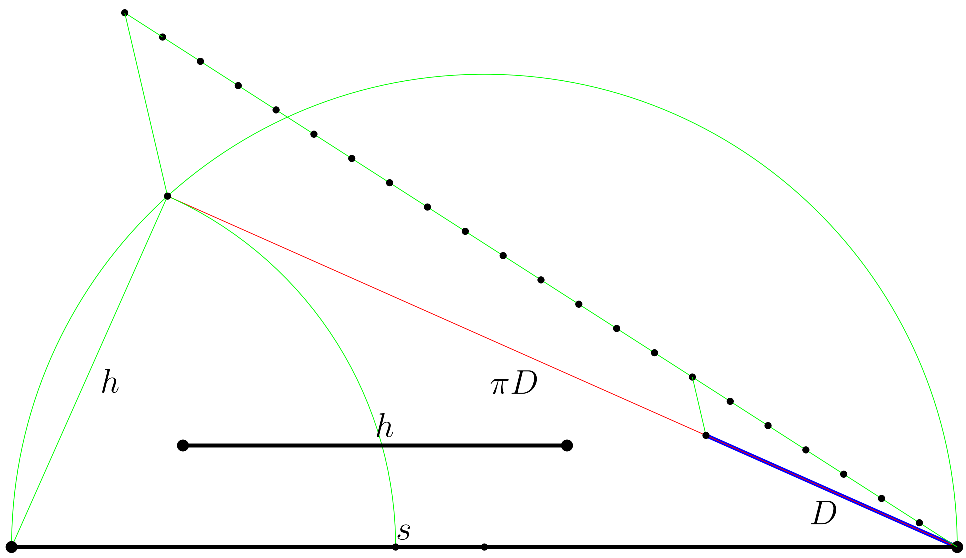
pois, por definição, $K'A' = K''A'$, e assim M e N são conjugados harmônicos de A e A'.

Solução 2 [12]: De um ponto E qualquer fora da reta AN, trace os segmentos EA, EA' e EN. Trace o segmento AG, onde G pertence ao segmento EN, determinando o ponto F sobre EA'. Seja H a interseção dos prolongamentos de GA' e EA. O segmento HF determina o ponto M sobre o segmento AA'.



ITA 1990, Questão 04, Construção Auxiliar - Solução 2.

Questão 05: De uma hélice cilíndrica são conhecidos o passo h e o comprimento s de uma espira. Pergunta: Quanto mede o diâmetro da circunferência da base dessa hélice?

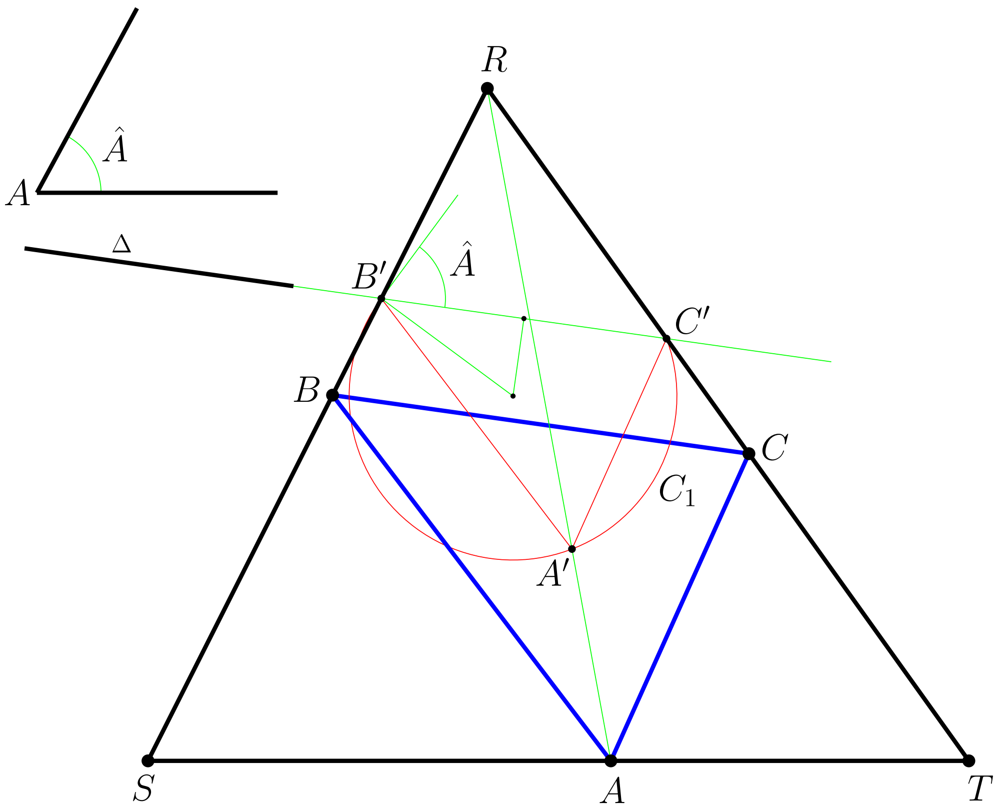


ITA 1990, Questão 05: Solução - (A) 34 mm.

Construção: (i) Determine o outro cateto $c_2 = \pi D$ de um triângulo retângulo de hipotenusa s e cateto h; (ii) Determine $D \approx \frac{7}{22}c_2$.

Justificativa: O passo h corresponde ao deslocamento vertical de uma espira completa de comprimento s, enquanto que o deslocamento horizontal é dado por $c_2 = \pi D$, onde D é o diâmetro desejado da base. Aproximando $\pi \approx \frac{22}{7}$, tem-se $D \approx \frac{7}{22}c_2$.

Questão 06: Inscrever em um triângulo dado RST um outro triângulo do qual se conhecem o vértice A, pertencente ao lado $\overline{ST}$, o ângulo $\hat{A}$ e a direção Δ do lado oposto $\overline{BC}$. Pergunta: Quanto mede aproximadamente o perímetro do triângulo inscrito ABC?

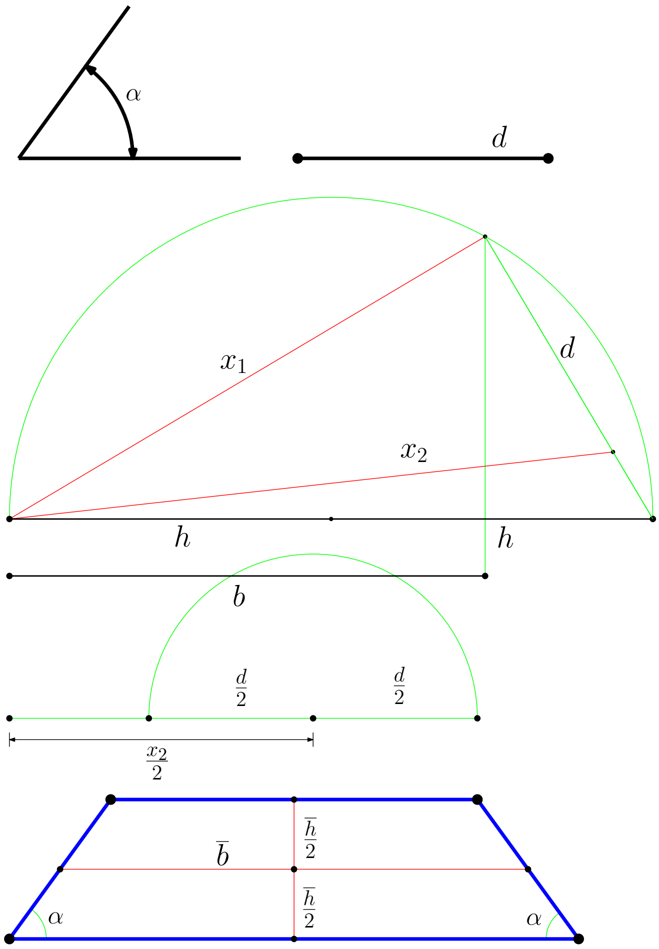


ITA 1990, Questão 06: Solução - (D) 162 mm.

Construção: (i) Trace um segmento com a direção Δ dada, determinando os pontos B' e C' sobre os lados do triângulo ΔRST; (ii) Trace o arco-capaz C_1 do ângulo $\hat{A}$ relativo ao segmento $B'C'$, determinando a interseção A' sobre o segmento RA; (iii) Determine o triângulo desejado ΔABC por homotetia do triângulo $\Delta A'B'C'$ com centro R e razão $r = \frac{RA}{RA'}$.

Justificativa: O triângulo $\Delta A'B'C'$ possui as propriedades desejadas: $B' \in RS$, $C' \in RT$, $B'\hat{A}'C' = \hat{A}$ e $B'C' \parallel \Delta$. Assim, o triângulo ΔABC desejado é homotético com o triângulo $\Delta A'B'C'$ com centro R e razão $\frac{RA}{RA'}$, transferindo todas estas propriedades também para o triângulo ΔABC e ainda com $A \in ST$, como desejado.

Questão 07: De um triângulo conhecemos a base $b = 60$ mm e a altura $h = 40$ mm. Construir um trapézio isósceles que lhe seja equivalente, sendo dados o ângulo α de sua base maior e o segmento d, que corresponde à diferença entre a base média e a altura deste trapézio. Pergunta: Quanto mede o perímetro do trapézio isósceles?



ITA 1990, Questão 07: Solução - (E) 166 mm.

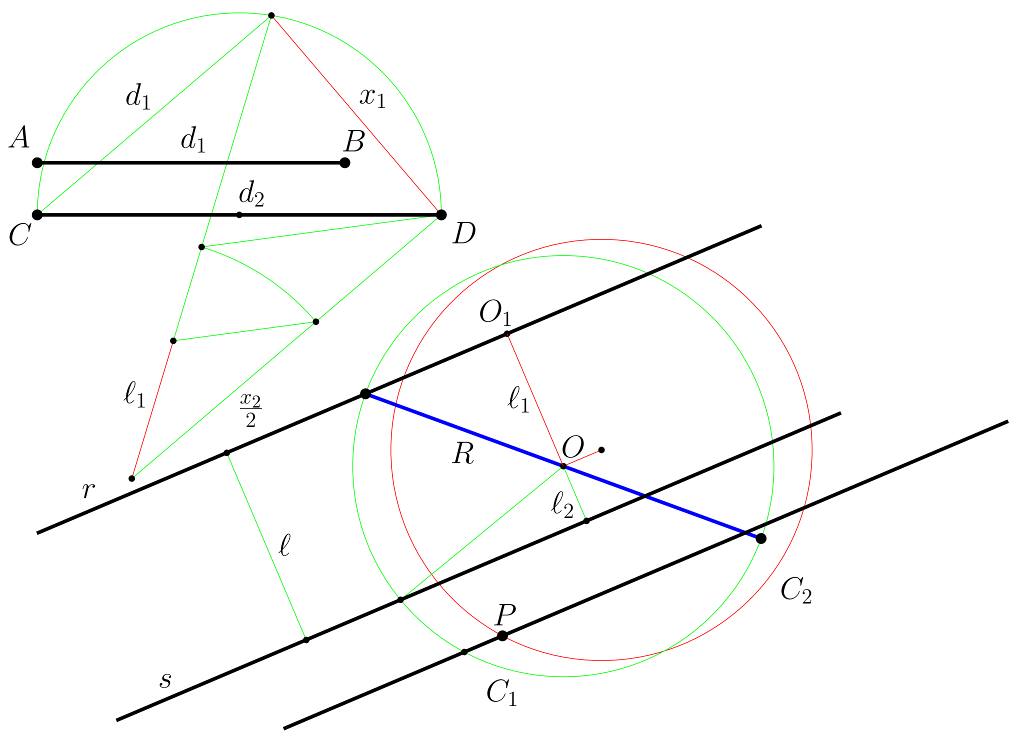
Construção: (i) Determine $x_1 = \sqrt{2bh}$; (ii) Determine a hipotenusa x_2 do triângulo retângulo de catetos x_1 e d; (iii) Determine $\overline{b} = \frac{x_2+d}{2}$ e $\overline{h} = \frac{x_2-d}{2}$; (iv) Trace um segmento de comprimento $\overline{b}$ e marque o ângulo α em suas laterais; (v) Trace paralelas acima e abaixo do segmento anterior a uma distância $\frac{\overline{h}}{2}$, determinando o trapézio desejado sobre as laterais obtidas no passo anterior.

Justificativa: Se $\overline{b}$ e $\overline{h}$ são, respectivamente, a base média e a altura do trapézio desejado, têm, então, que

$$\begin{cases} \overline{b}\overline{h} = \frac{bh}{2} \\ \overline{b} - \overline{h} = d \end{cases} \Rightarrow \overline{b}^2 - d\overline{b} - \frac{bh}{2} = 0 \Rightarrow \overline{b} = \frac{\sqrt{d^2+2bh}-d}{2} \text{ e } \overline{h} = \frac{\sqrt{d^2+2bh}+d}{2}$$

de modo que o trapézio desejado pode ser facilmente determinado.

Questão 08: Traçar uma circunferência que passe pelo ponto dado P e que determine nas retas paralelas r e s, dadas, cordas cujos comprimentos sejam respectivamente iguais aos segmentos também dados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Pergunta: Quanto mede o diâmetro da circunferência?



ITA 1990, Questão 08: Solução - (C) 64 mm.

Construção: (i) Determine $x_1 = \sqrt{d_2^2 - d_1^2}$; (ii) Determine $x_2 = \sqrt{(2\ell)^2 + x_1^2}$; (iii) Determine a terceira proporcional $2\ell : (x_2/2) : \ell_1$ e marque a distância $OO_1 = \ell_1$, sobre uma perpendicular comum a r com $O_1 \in r$; (iv) Determine $R = \sqrt{\ell_1^2 + \frac{d_1^2}{4}}$ e trace $C_1 \equiv \mathcal{C}(O, R)$; (v) A circunferência desejada C_2, que passa por P, pode ser obtida por simples translação de C_1 numa direção paralela a r.

Justificativa: Usando a notação da figura-solução, têm-se que

$$\begin{cases} R^2 = \ell_1^2 + \frac{d_1^2}{4} = \ell_2^2 + \frac{d_2^2}{4} \\ \ell = \ell_1 + \ell_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_1^2 - \ell_2^2 = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4} \\ \ell_1 + \ell_2 = \ell \end{cases} \Rightarrow \ell_1 = \frac{4\ell^2 + d_2^2 - d_1^2}{8\ell}$$

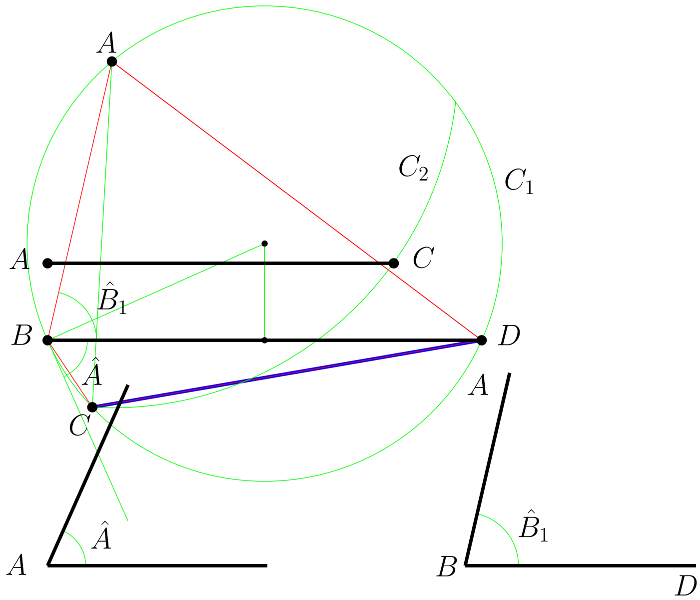
e ainda

$$R = \sqrt{\ell_1^2 + \frac{d_1^2}{4}}$$

sln: Na verdade, há outras soluções, com o centro do círculo fora da região entre as paralelas r e s.

III.3 Soluções de 1989

Questão 01: Construir um quadrilátero $ABCD$ inscritível em uma circunferência, conhecendo-se: o ângulo $\hat{A}$, o ângulo $A\hat{B}D$ e as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Pergunta: Quanto mede na escala 1:20 o lado $\overline{CD}$ do quadrilátero $ABCD$?

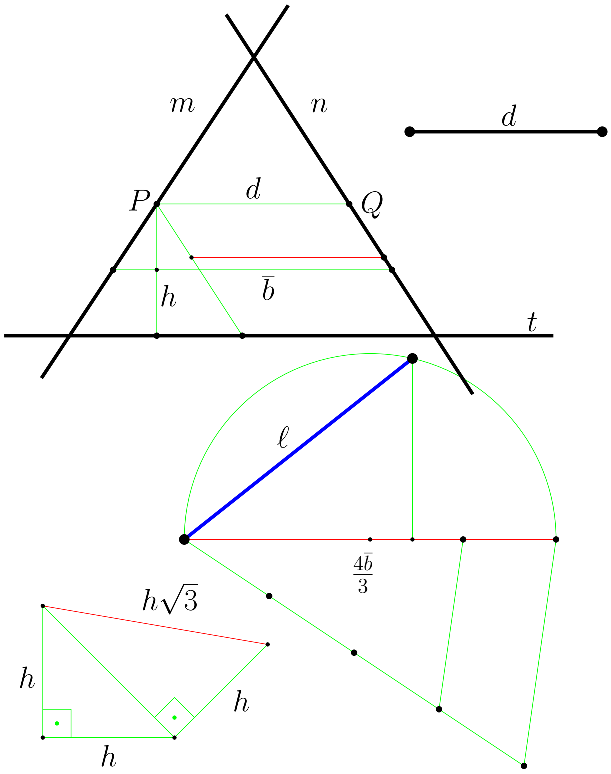


ITA 1989, Questão 01: Solução - (E) 1,08 m.

Construção: (i) Trace o círculo C_1 suporte do arco-capaz do ângulo $\hat{A}$ relativo ao segmento BD; (ii) Marque o ângulo $\hat{B}_1 = A\hat{B}D$ no vértice B do segmento BD, determinando o vértice A sobre C_1; (iii) Trace $C_2 \equiv \mathcal{C}(A, AC)$, determinando o vértice C, entre B e D, sobre C_1.

Justificativa: Os dados do problema determinam diretamente o triângulo ΔABD, enquanto que o vértice C, entre B e D, é facilmente determinado pela distância AC dada.

Questão 02: São dadas as retas m, n e t. Apoiar nas retas m e n um segmento de reta $\overline{PQ}$, paralelo à reta t e medindo a distância d, também dada. Construa um triângulo equilátero equivalente ao quadrilátero determinado por m, n, t e $\overline{PQ}$. Pergunta: Quanto mede o perímetro do triângulo equilátero?



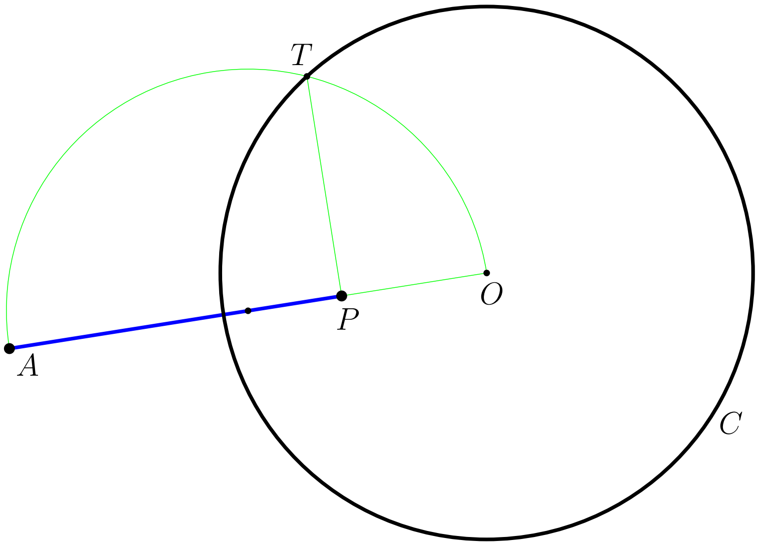
ITA 1989, Questão 02: Solução - (A) 117 mm.

Construção: (i) Marque a distância d dada a partir da reta n e paralela à reta t; (ii) Trace uma paralela à reta n pela extremidade da distância d marcada no passo anterior, determinando o vértice P sobre m e, consequentemente, o vértice Q sobre n; (iii) Determine a altura h do trapézio e sua base média $\bar{b}$, paralela à reta t pelo ponto médio de h; (iv) Determine o lado ℓ do triângulo equilátero desejado como a média geométrica de $\frac{4\bar{b}}{3}$ e $h\sqrt{3}$.

Justificativa: Por equivalência de áreas,

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \bar{b}h \Rightarrow \ell = \sqrt{\frac{4\bar{b}h\sqrt{3}}{3}}$$

Questão 03: Determine um ponto fixo P, que corresponde ao ponto de encontro das diagonais de todos os trapézios isósceles, inscritos na circunferência dada C, determinados cada um deles por retas secantes à circunferência C, traçadas a partir do ponto A. Pergunta: Quanto mede a distância $\overline{AP}$ na escala 1:75?

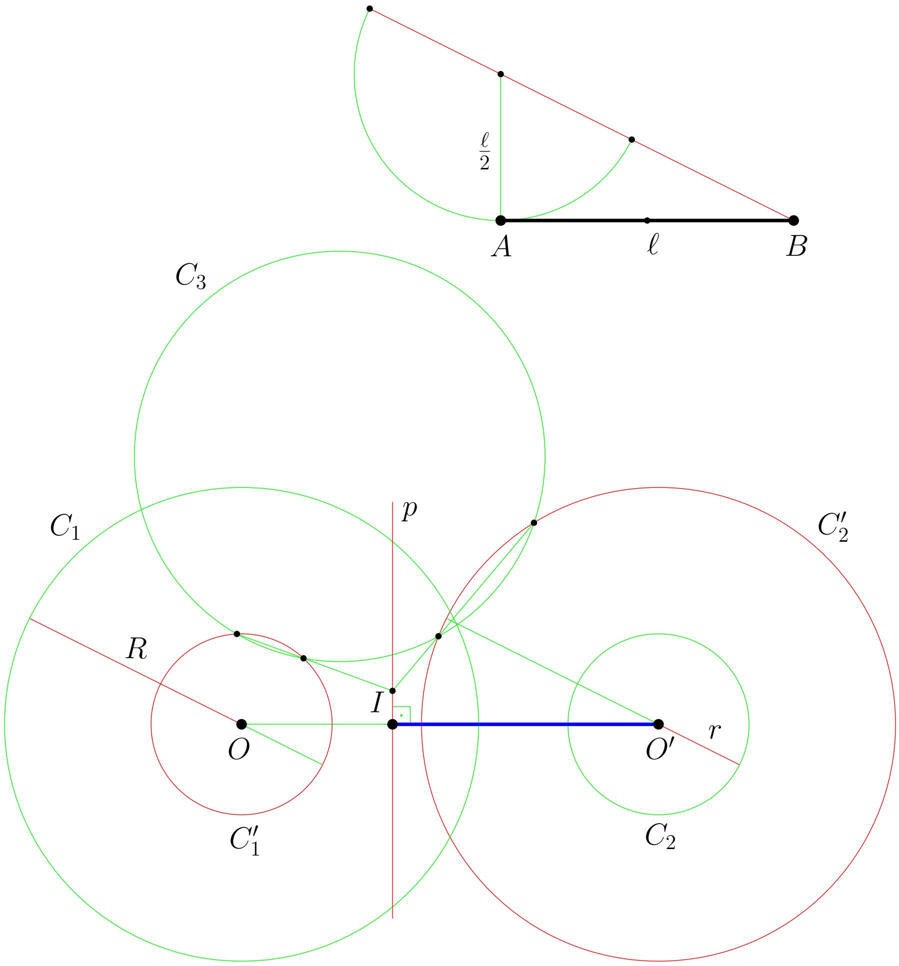


ITA 1989, Questão 03: Solução - (C) 3,45 m.

Construção: (i) Determine o centro O da circunferência C dada; (ii) Trace uma tangente a C por A; (iii) Determine o ponto desejado P pela projeção do ponto de tangência T sobre o segmento AO.

Justificativa: Os lados de mesmo comprimento dos trapézios isósceles são obtidos por secantes a C traçadas por A simétricas em relação ao segmento AO. No caso limite, as secantes se degeneram nas tangentes a C por A, as diagonais dos trapézios se degeneram no segmento que une os pontos de tangência, e o encontro das diagonais torna-se o ponto médio P desse segmento.

Questão 04: Os pontos O e O' dados são centros de duas circunferências cujos diâmetros são respectivamente iguais aos segmentos áureos externo e interno do segmento de reta $\overline{AB}$, também dado. Determine o lugar geométrico dos centros das circunferências que cortam simultaneamente as circunferências de centro O e O' segundo os seus diâmetros. Pergunta: Quanto mede a menor distância do ponto O' ao lugar geométrico pedido?

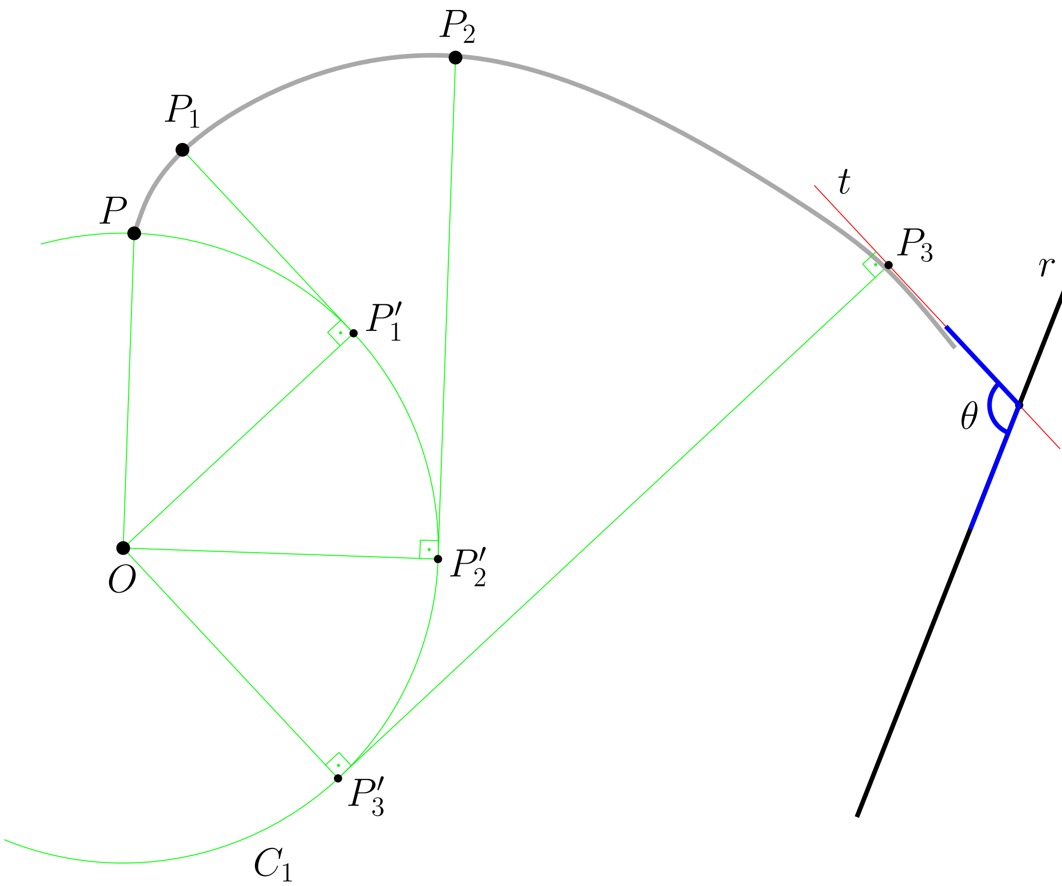


ITA 1989, Questão 04: Solução - (D) 37 mm.

Construção: (i) Determine os segmentos áureos externo R e interno r do segmento $AB = \ell$ tais que $R = \frac{(\sqrt{5}+1)\ell}{4}$ e $r = \frac{(\sqrt{5}-1)\ell}{4}$; (ii) Trace $C_1' \equiv \mathcal{C}(O, r)$ e $C_2' \equiv \mathcal{C}(O', R)$; (iii) Trace o círculo auxiliar C_3 secante a C_1' e C_2'; (iv) Determine a interseção I das cordas delimitadas por C_3 em C_1' e C_2'; (v) Trace a perpendicular p por I ao segmento OO', determinando o lugar geométrico desejado.

Justificativa: Sejam $\ell = AB$, $R = \frac{(\sqrt{5}+1)\ell}{4}$ e $r = \frac{(\sqrt{5}-1)\ell}{4}$. O lugar geométrico desejado é a reta p simétrica do eixo radical das circunferências $C_1 \equiv \mathcal{C}(O, R)$ e $C_2 \equiv \mathcal{C}(O', r)$ em relação ao ponto médio de OO'. Equivalentemente, o lugar geométrico desejado é o eixo radical das circunferências $C_1' \equiv \mathcal{C}(O, r)$ e $C_2' \equiv \mathcal{C}(O', R)$. Uma demonstração disto é dada em [3], Prova de Geometria de 1985/1986, 6ª questão, item (b).

Questão 05: O ponto O é o centro do círculo diretor de uma evolvente da qual são conhecidos os pontos P e P_1, sendo P o ponto de nascença da evolvente e P_1 o primeiro ponto desta obtido pelo processo usual de construção da curva. Determine os pontos subsequentes P_2 e P_3 e, por P_3, trace uma reta tangente à curva. Pergunta: Quanto mede aproximadamente o maior ângulo formado pela intersecção da reta tangente à curva com a reta r dada?

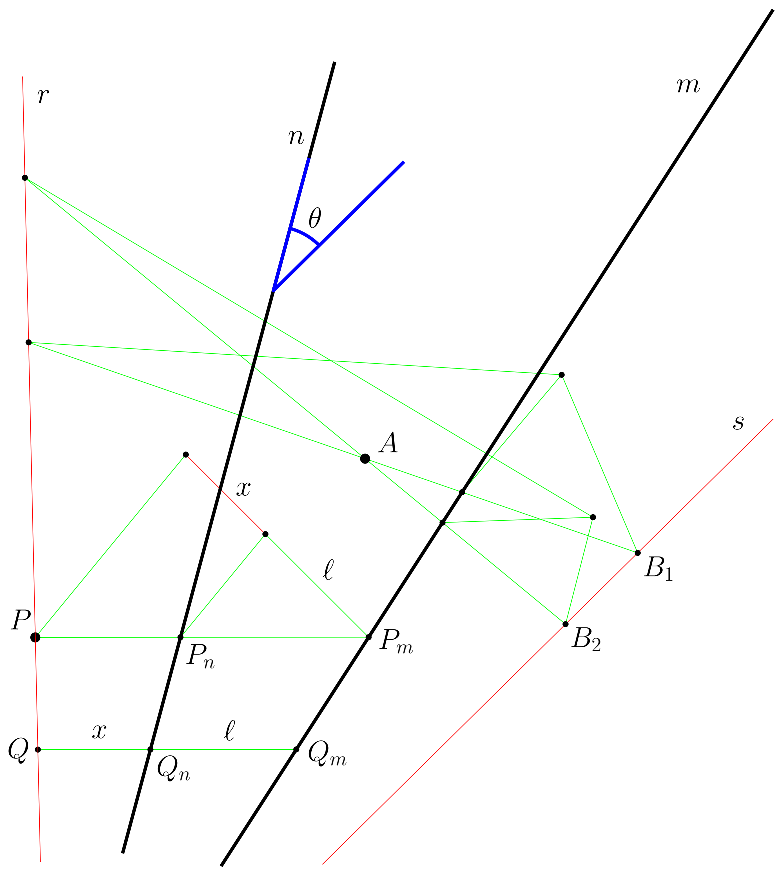


ITA 1989, Questão 05: Solução - (D) 115^o.

Construção: (i) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv \mathcal{C}(O, OP)$, dividindo-o em 8 partes a partir de P (só são necessárias 4 divisões, denotadas, na figura-solução, por P, P_1', P_2' e P_3'); (ii) Trace as respectivas tangentes a C_1 por cada divisão. Supostamente, a tangente a C_1 por P_1' deve passar por P_1, como de fato ocorre na figura-solução; (iii) Marque P_2 sobre a tangente por P_2' tal que $P_2'P_2 = 2P_1'P_1$ e P_3 sobre a tangente por P_3' a uma distância $P_3'P_3 = 3P_1'P_1$, determinando outros dois pontos da evolvente, como desejado; (i) A tangente t desejada é a perpendicular por P_3 à tangente por P_3'.

Justificativa: A construção da evolvente é detalhada em [11], pp. 295–296. A tangente ao círculo diretor é normal à evolvente. Logo, a tangente desejada é perpendicular a essa tangente.

Questão 06: Traçar uma reta r que passa pelo ponto dado P e pela intersecção de duas retas dadas m e n, sem usar essa intersecção. Determine o lugar geométrico dos pontos B, conjugados harmônicos do ponto A também dado, em relação ao ponto de encontro das retas m e r, com retas secantes a estas, traçadas pelo ponto A. Pergunta: Quanto mede aproximadamente o menor ângulo formado pela intersecção do lugar geométrico pedido com a reta n?

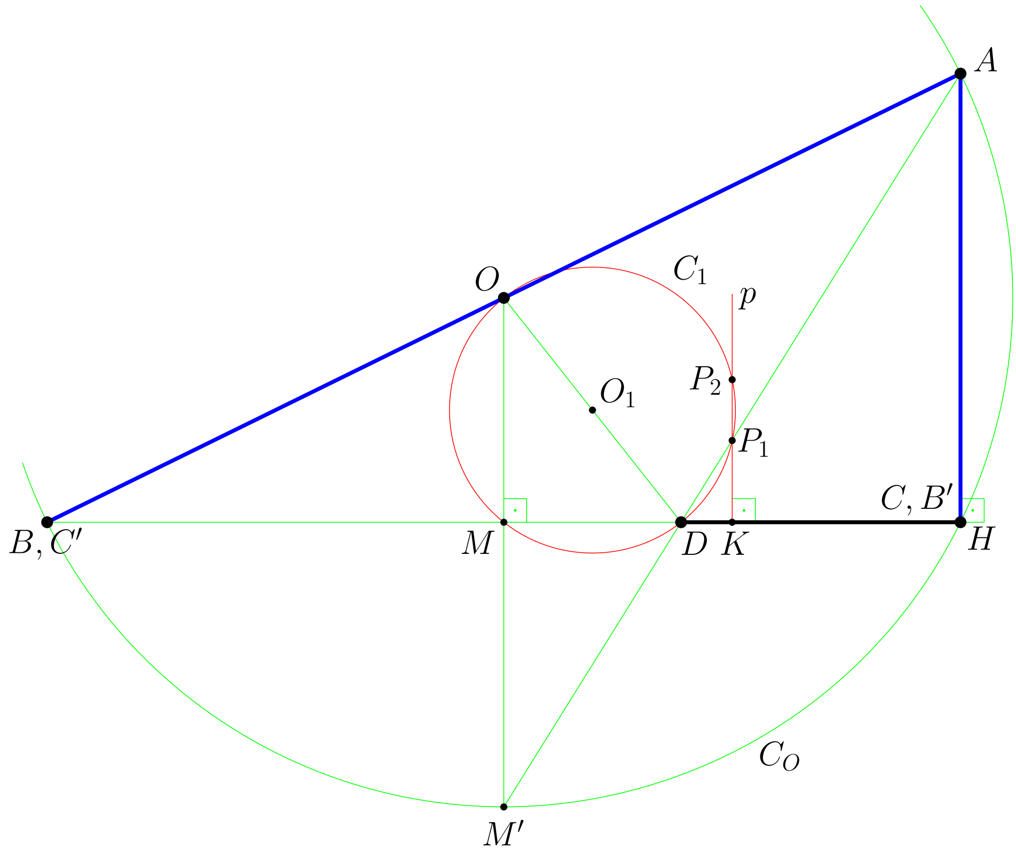


ITA 1989, Questão 06: Solução - (B) 31°**.**

Construção: (i) Trace, por P, uma secante qualquer a m e n, determinando os pontos de interseção P_m e P_n, respectivamente, sobre essas retas; (ii) Trace uma paralela a secante do item anterior e marque o ponto Q tal que $QQ_n : Q_nQ_m = PP_n : P_nP_m$, determinando a reta r suporte de PQ; (iii) Trace por A duas secantes a r e m e determine os respectivos conjugados harmônicos B_1 e B_2 de A em relação às interseções das secantes com r e m; (iv) O lugar geométrico desejado é a reta suporte s de B_1B_2.

Justificativa: As retas r, m, n e s formam um feixe harmônico, em que suas interseções com uma secante comum qualquer perfazem uma divisão harmônica.

Questão 07: Construir um triângulo ABC, conhecendo-se: a posição do centro O da circunferência circunscrita, o pé H da altura referente ao vértice A e o ponto D, que é o encontro da bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ com o lado $\overline{BC}$. Pergunta: Quanto mede o lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC?



ITA 1989, Questão 07: 1ª Solução (baseada em solução do curso ETAPA) - (X).

1ª Construção (baseada em solução do curso ETAPA): (i) Trace a circunferência $C_1 \equiv \mathcal{C}(O_1, OO_1)$, onde O_1 é o ponto médio de OD, determinando a projeção M (ponto médio do lado BC) do circuncentro O sobre a reta suporte de DH; (ii) Trace pelo ponto médio K do segmento MH a perpendicular p a DH, determinando as interseções P_1 e P_2 sobre C_1; (iii) Prolongue DP_1, determinando a interseção A sobre a perpendicular por H ao segmento DH. O prolongamento de DP_2 gera uma segunda solução para o problema; (iv) Trace a circunferência $C_O \equiv \mathcal{C}(O, OA)$, determinando os vértices B e C sobre o prolongamento de DH.

Justificativa: Na figura-solução, seja M' a interseção da perpendicular OM à reta suporte do segmento DH com a circunferência C_O circunscrita ao triângulo ΔABC. Uma análise angular simples indica que

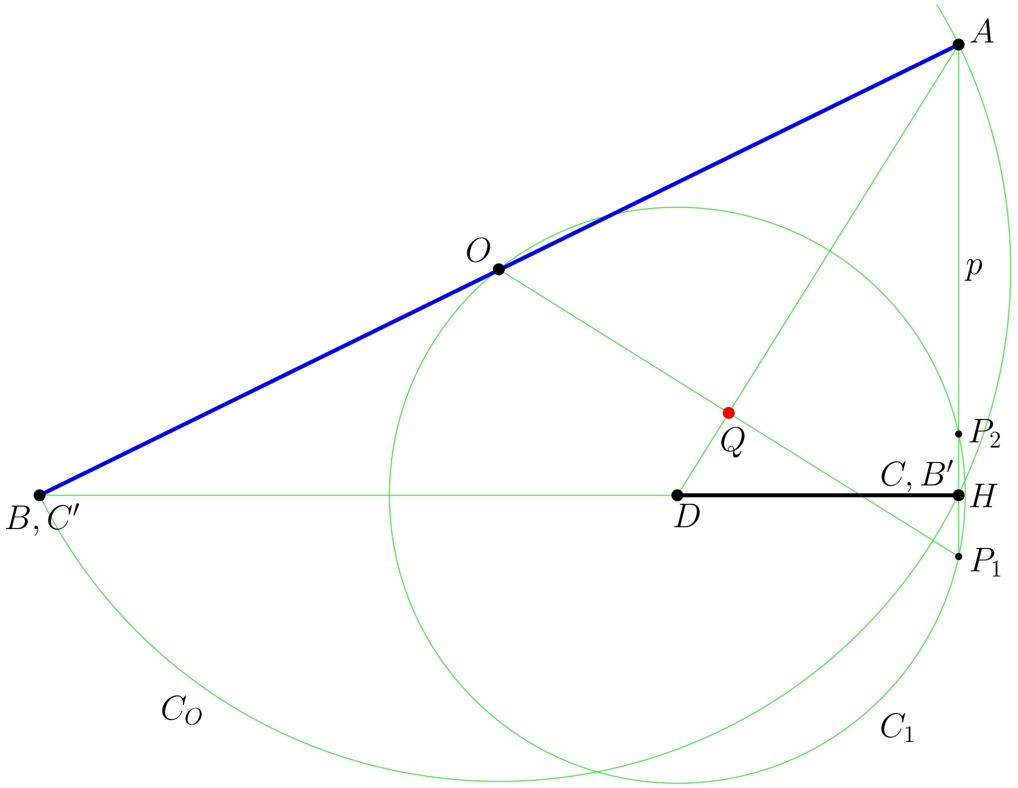
$$A\hat{O}M' = A\hat{O}C + C\hat{O}M' = 2\hat{B} + \hat{A} \Rightarrow O\hat{A}M' = O\hat{M}'A = \frac{180^{\text{o}} - A\hat{O}M'}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 2\hat{B} - \hat{A}}{2} = \frac{\hat{C} - \hat{B}}{2}.$$

Logo, a reta AM' é a própria bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$, de modo que D pertence a AM'.

Ainda no triângulo isósceles $\Delta AOM'$, com $OA = OM'$, seja P_1 a altura do vértice O relativa ao lado AM'. Temos então duas propriedades que nos permitem determinar P_1, pelo fato do triângulo $\Delta AOM'$ ser isósceles: (a) OP_1 é perpendicular a AM' (e, pela discussão anterior, consequentemente, a AD), de modo que P_1 pertence à circunferência de diâmetro OD; (b) P_1 é o ponto médio de AM'. Traçando então as paralelas OM, P_1K e AH (todas elas perpendiculares a DH), tem-se que a projeção K de P_1 em DH é o ponto médio de MH.

SLN: Com os dados do problema, o ponto H coincide com um dos vértices do lado BC do triângulo.

SLN: Além das duas possíveis soluções para o vértice A, os vértices B e C podem ser intercambiados, gerando na verdade quatro possíveis respostas para o problema, que, por isso mesmo, deveria ser anulado.



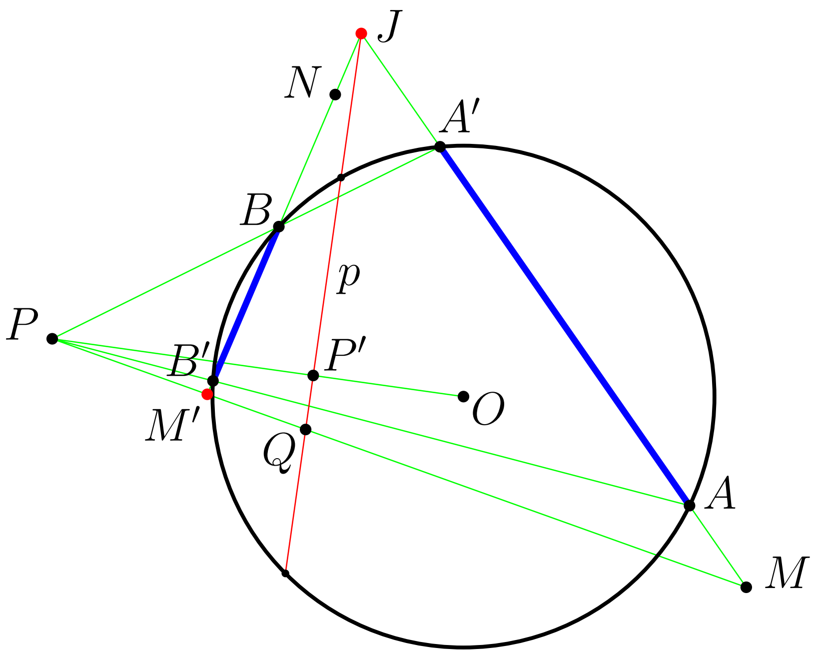
ITA 1989, Questão 07: 2ª Solução (baseada em solução de Harold Connelly (Hyacinthus)) - (X).

2ª Construção (baseada em solução de Harold Connelly (Hyacinthus)): (i) Trace a circunferência $C_1 \equiv \mathcal{C}(D, DO)$, determinando os pontos P_1 e P_2 sobre a perpendicular p por H a DH; (ii) Determine o ponto médio Q do segmento OP_1; (iii) Prolongue DQ, determinando a interseção A sobre p. O prolongamento de DQ', onde Q' é o ponto médio de OP_2, gera uma segunda solução para o problema; (iv) Trace a circunferência $C_O \equiv \mathcal{C}(O, OA)$, determinando os vértices B e C sobre o prolongamento de DH.

Justificativa: Da discussão da solução anterior, o segmento AD é a bissetriz de $O\hat{A}H$.

A presente solução se baseia na construção do triângulo auxiliar isósceles ΔOAP_1, de base OP_1, de modo que as altura, mediana e bissetriz por A sejam coincidentes entre si e perpendiculares ao lado OP_1. A construção desse triângulo auxiliar requer a determinação do ponto P_1, que, pela caracterização do problema e do triângulo ΔOAP_1, possui as seguintes propriedades: (a) P_1 pertence à perpendicular a DH por H; (b) P_1 é tal que OP_1 seja perpendicular a DQ, onde Q é o ponto médio de OP_1. Essa segunda propriedade faz com que P_1 pertença à circunferência C_1, de centro D e raio DO.

Questão 08: São dados: uma circunferência de centro O e três pontos M, N e P. Pelos dois primeiros traçar duas retas secantes à circunferência, determinando nos pontos de contato os segmentos $\overline{MAA'}$ e $\overline{NBB'}$, de tal forma que as cordas $\overline{AB'}$ e $\overline{A'B}$ se encontrem no ponto P. Pergunta: Quanto mede aproximadamente a diferença entre os comprimentos das cordas $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$?



ITA 1989, Questão 08: Solução (baseada em solução do curso ETAPA) - (B) 32 mm.

Construção (baseada em solução do curso ETAPA): (i) Trace a reta polar p do ponto P relativa à circunferência C dada (ver construção auxiliar); (ii) Trace a reta PM, determinando o ponto Q sobre p; (iii) Determine o conjugado harmônico M' do ponto M relativo ao segmento PQ (ver construção auxiliar da Questão 04 de 1990); (iv) Trace a reta $M'N$, determinando os pontos B e B' sobre C e o ponto J sobre p; (v) Trace a reta JM, determinando os pontos A e A' sobre C, tais que AB' e $A'B$ se interceptam em P, conforme desejado.

Construção auxiliar: Dados um ponto P e a circunferência $C \equiv \mathcal{C}(O, r)$, determine a reta polar p de P em relação a C.

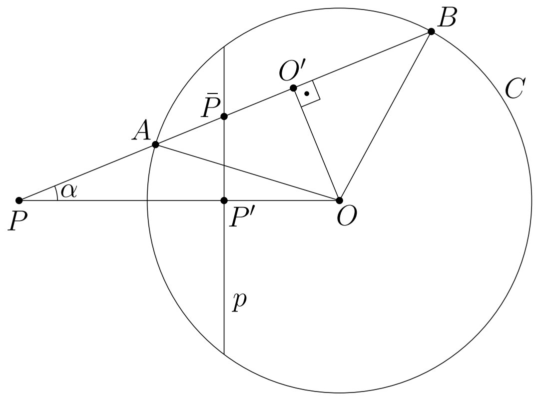
Solução: A polar p é a reta que passa pelos pontos de tangência das tangentes a C por P, ou ainda, p é a perpendicular a PO pelo ponto P' simétrico de P em relação a C.

Justificativa: No caso, tendo-se as secantes PBA' e $PB'A$, a interseção J das retas BB' e AA' necessariamente pertence à reta polar p do ponto P em relação à circunferência C (ver o Lema 2 a seguir ou Teorema 4 de [13]). Na figura-solução, os pontos A, A', B e B' desejados são as interseções das secantes JM e JN com C, e a chave do problema é a determinação do ponto J.

Além disso, a reta polar p do ponto P em relação à circunferência C é o lugar geométrico dos pontos $\bar{P}$ conjugados harmônicos de P em relação às cordas determinadas pelas secantes a C partindo de P (ver Lema 1). Assim, qualquer ponto da polar p externo a C (incluindo o ponto J, chave da nossa solução) define um feixe harmônico $J(P, B', P_1, A)$, onde P_1 é a interseção da secante $PB'A$ com a polar p.

Com isso, o ponto J desejado é tal que: (i) $J \in p$; (ii) $J(P, M', Q, M)$ constitui um feixe harmônico, com $Q \in p$ e M' tal que $\frac{PM'}{QM'} = \frac{PM}{QM}$. Essas propriedades nos levam à construção detalhada anteriormente.

Lema 1:



ITA 1989, Questão 08: Lema 1.

Na figura acima, seja p a polar do ponto P relativa à circunferência $C \equiv \mathcal{C}(O, r)$, com $PO = \ell$. Logo, por definição,

$$P'O = \frac{r^2}{\ell} \Rightarrow PP' = PO - P'O = \frac{\ell^2 - r^2}{\ell}.$$

Seja ainda $AO' = O'B = x$. Com isso, têm-se que:

$$\begin{cases} PA = PO' - AO' = \ell\cos\alpha - x, \\ A\bar{P} = P\bar{P} - PA = \frac{PP'}{\cos\alpha} - PA = \frac{\ell^2 - r^2}{\ell\cos\alpha} - (\ell\cos\alpha - x) = \frac{\ell^2\,\mathrm{sen}^2\alpha - r^2 + x\ell\cos\alpha}{\ell\cos\alpha} = \frac{x(\ell\cos\alpha - x)}{\ell\cos\alpha}, \\ PB = PO' + O'B = \ell\cos\alpha + x, \\ \bar{P}B = PB - P\bar{P} = PB - \frac{PP'}{\cos\alpha} = (\ell\cos\alpha + x) - \frac{\ell^2 - r^2}{\ell\cos\alpha} = \frac{-\ell^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + r^2 + x\ell\cos\alpha}{\ell\cos\alpha} = \frac{x(\ell\cos\alpha + x)}{\ell\cos\alpha}. \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{PA}{\bar{P}A} = \frac{PB}{\bar{P}B} = \frac{\ell\cos\alpha}{x},$$

de modo que $\bar{P}$ é o conjugado harmônico de P em relação ao segmento AB.

Lema 2: Na figura-solução, sejam $\bar{P}_1$ e $\bar{P}_2$ as respectivas interseções das secantes $PB'A$ e PBA' com a polar p, de modo que, pelo Lema 1, P e $\bar{P}_1$ dividem o segmento $B'A$ harmonicamente e P e $\bar{P}_2$ dividem o segmento BA' harmonicamente.

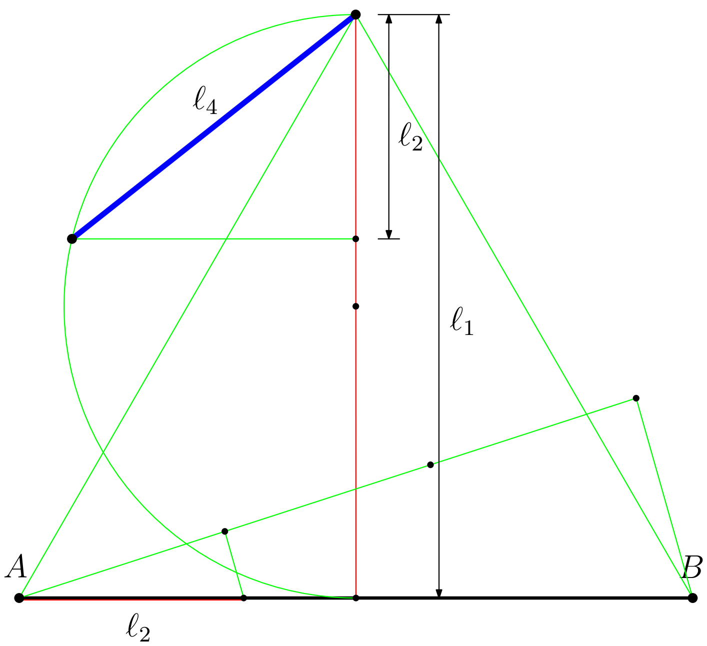
Nessa mesma figura, seja J a interseção da reta-suporte de BB' com a polar p, de modo que $J(P, B, \bar{P}_2, A')$ e $J(P, B', \bar{P}_1, A)$ perfazem feixes harmônicos.

Suponha, então, que o prolongamento de JA' intercepte a secante $PB'A$ num ponto $\bar{A}$ supostamente distinto de A, de modo que, por projetividade, $J(P, B', \bar{P}_1, \bar{A})$ também perfaz um feixe harmônico.

Assim, como $J(P, B', \bar{P}_1, A)$ e $J(P, B', \bar{P}_1, \bar{A})$ são feixes harmônicos, devemos necessariamente ter $\bar{A} \equiv A$, de modo que BB' e AA' se interceptam sobre a polar p, como era desejado demonstrar.

III.4 Soluções de 1988

ITA 1988, Questão 01: O segmento AB dado é o semi-perímetro de um hexágono regular. Sem construir esse hexágono, pede-se traçar um quadrado de área equivalente. Pergunta: Quanto mede o lado do quadrado?
Obs: Mostrar todas as construções geométricas.



ITA 1988, Questão 01: Solução - (C) 48 mm.

Construção: (i) Determine a média geométrica ℓ_4 de $\ell_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}p_6$ e $\ell_2 = \frac{p_6}{3}$.

Justificativa: As áreas do hexágono S_6 e quadrado S_4 são, respectivamente,

$$\begin{cases} S_6 = p_6 a_6 \\ S_4 = \ell_4^2 \end{cases}$$

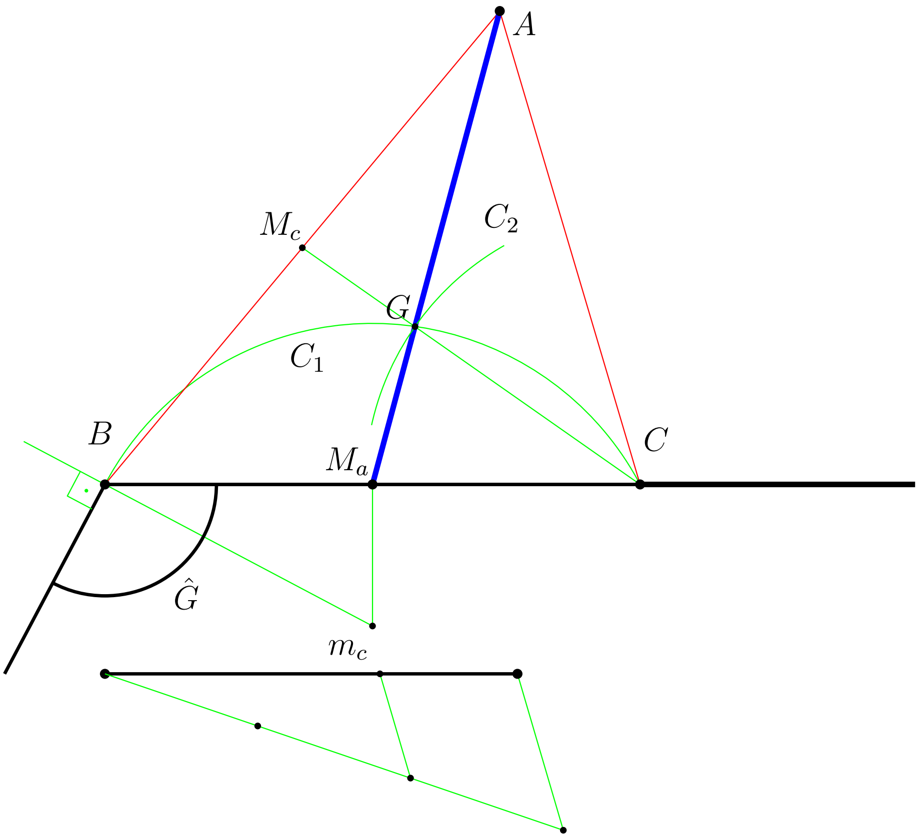
onde

$$\begin{cases} p_6 = 3\ell_6 \\ a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell_6 \end{cases} \Rightarrow a_6 = \frac{\sqrt{3}}{6}p_6$$

de forma que

$$\ell_4 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6}p_6}$$

ITA 1988, Questão 02: Construir um triângulo sendo conhecidos: o lado a, a mediana m_c e o ângulo $\hat{G}$, formado pelas medianas m_c e m_b. A mediana m_a mede?

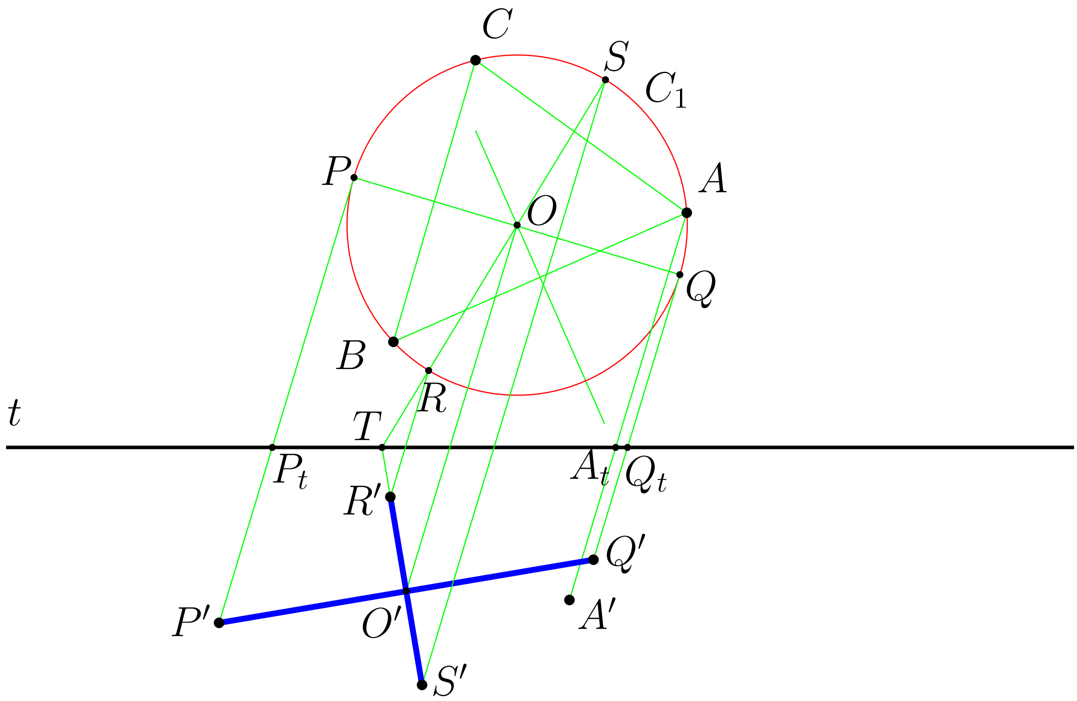


ITA 1988, Questão 02: Solução - (C) 65 mm.

Construção: (i) Trace o arco-capaz C_1 do ângulo $\hat{G}$ relativo à corda $BC = a$; (ii) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(C, \frac{2m_c}{3})$, cuja interseção com C_1 é o baricentro G; (iii) Prolongue CG e marque o ponto M_c tal que $CM_c = m_c$; (iv) Prolongue BM_c e marque o vértice A tal que $BA = 2BM_c$; (v) Trace a mediana AM_a, onde M_a é o ponto médio de BC.

Justificativa: O baricentro G, o encontro das medianas de um triângulo, dista $\frac{2m_c}{3}$ do vértice C e deve pertencer ao arco-capaz de $\hat{G}$ relativo ao lado BC.

ITA 1988, Questão 03: Seja t um eixo de afinidade; A, B e C pontos que pertencem a uma circunferência e A' o ponto afim de A. Quanto medem, aproximadamente, os eixos maior e menor da elipse afim da circunferência que contém A, B e C?

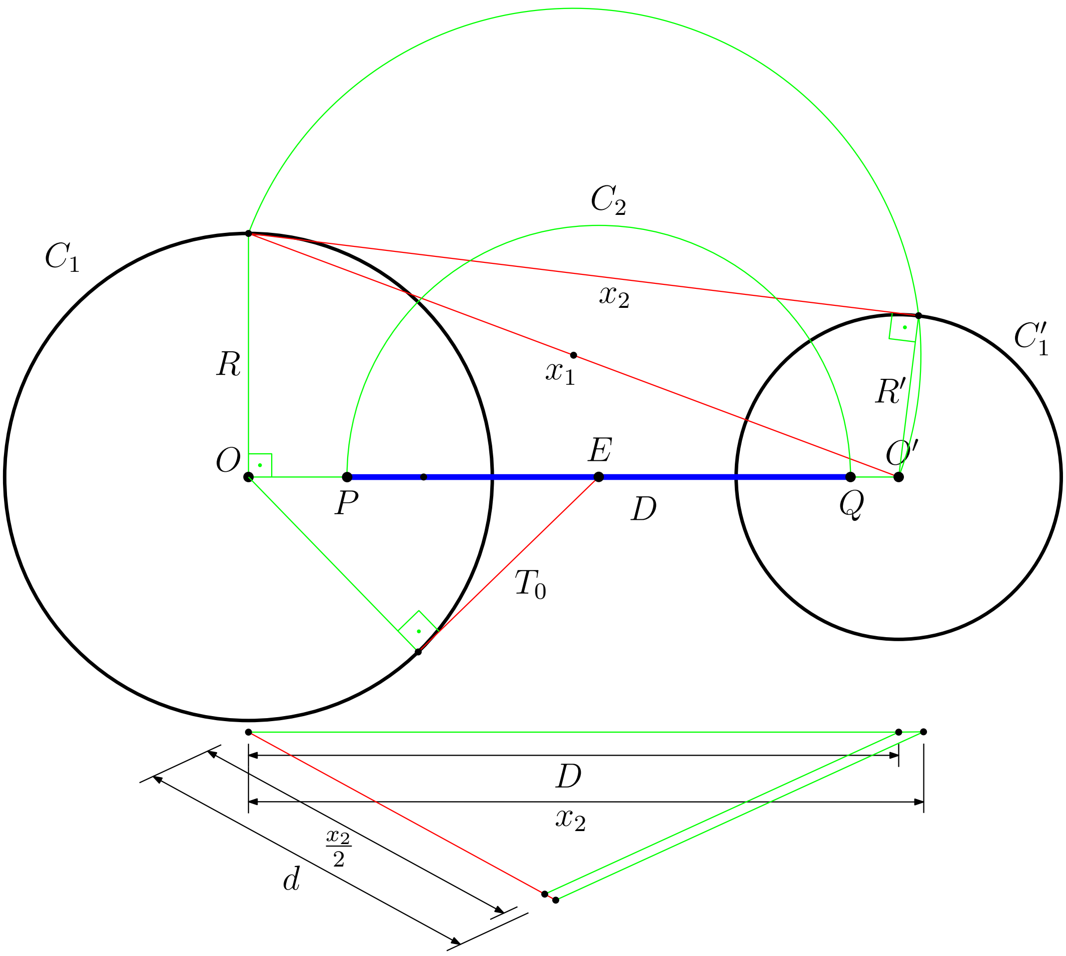


ITA 1988, Questão 03: Sem Solução.

Construção: (i) Determine o circuncentro O do triângulo ΔABC e trace o círculo $C_1 \equiv (O, OA)$ circunscrito a este triângulo (ver [2], Problema 1.3) (ii) Trace AA', cuja interseção com o eixo t é o ponto A_t; (iii) Trace por O uma perpendicular a AA', cujas interseções com C_1 são os pontos P e Q; (iv) Determine os pontos P' e Q' afins de P e Q, respectivamente, extremos do eixo maior da elipse desejada; (v) Trace uma perpendicular por O', médio de $P'Q'$, cuja interseção com o eixo t é o ponto auxiliar T; (vi) Trace TO, cujas interseções com C_1 são os pontos R e S; (vii) Determine os pontos R' e S' afins de R e S, respectivamente, extremos do eixo menor da elipse desejada.

Justificativa: Um ponto X' é afim de X se $XX' \parallel AA'$ e $XX_t : AA_t = X_tX' : A_tA'$, onde X_t é a interseção de XX' com o eixo t. Dada a direção AA', a transformação de afinidade correspondente mapeia o diâmetro PQ (perpendicular a AA') de C_1 no eixo maior da elipse. O eixo menor é ortogonal ao eixo maior com centro O' comum, transformação afim do centro O de C_1.
sln: Não há opção correspondente ao resultado obtido. A questão deve ter sido anulada.

ITA 1988, Questão 04: Determinar dois pontos fixos P e Q por onde passam todas as circunferências ortogonais às circunferências de centros O e O'. Pergunta: Quanto mede a distância PQ?



ITA 1988, Questão 04: Solução - (D) 67 mm.

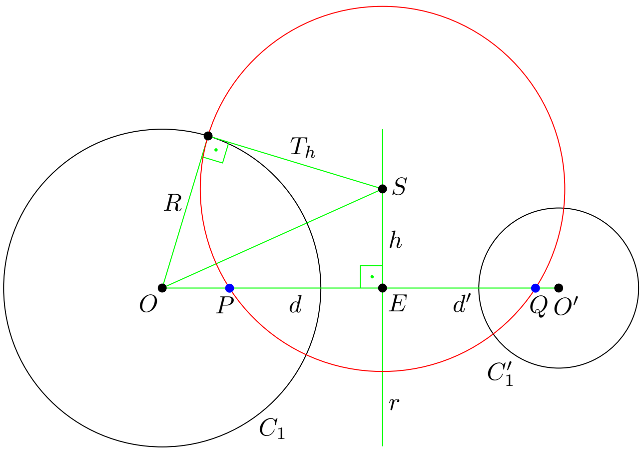
Construção: (i) Trace o triângulo retângulo de catetos $D = OO'$ e R, determinando a hipotenusa $x_1 = \sqrt{D^2 + R^2}$; (ii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa x_1 e cateto R', determinando o outro cateto $x_2 = \sqrt{D^2 + R^2 - R'^2}$; (iii) Determine a quarta proporcional $D : \frac{x_2}{2} = x_2 : d$ e marque o ponto E entre O e O' e tal que $OE = d$; (iv) Trace por E uma tangente, de comprimento T_0, a C_1; (v) Trace $C_2 \equiv \mathcal{C}(E, T_0)$, cujas interseções com a reta suporte de OO' são os pontos P e Q tais que $PQ = 2T_0$.

Justificativa: O eixo radical r dos círculos C_1 e C_1' é o lugar geométrico dos pontos com mesma potência relativa aos dois círculos. Logo, o eixo r é também o lugar geométrico dos pontos cujas tangentes a C_1 e C_1' têm os mesmos comprimentos. O raio de um círculo C_x ortogonal a C_y é igual ao comprimento da tangente a C_y pelo centro de C_x. Logo, o eixo r é também o lugar geométrico dos centros dos círculos simultaneamente ortogonais aos círculos C_1 e C_1' ([5], pp. 208–209).

Seja o ponto E, interseção do eixo r com o segmento OO', e sejam as distâncias $d = OE$, $d' = EO'$ e $D = OO'$. Desta forma,

$$\begin{cases} d + d' = D \\ d^2 - R^2 = d'^2 - R'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{D^2+R^2-R'^2}{2D} \\ d' = \frac{D^2+R'^2-R^2}{2D} \end{cases}$$

o que permite determinar a posição do ponto E e do eixo radical r.

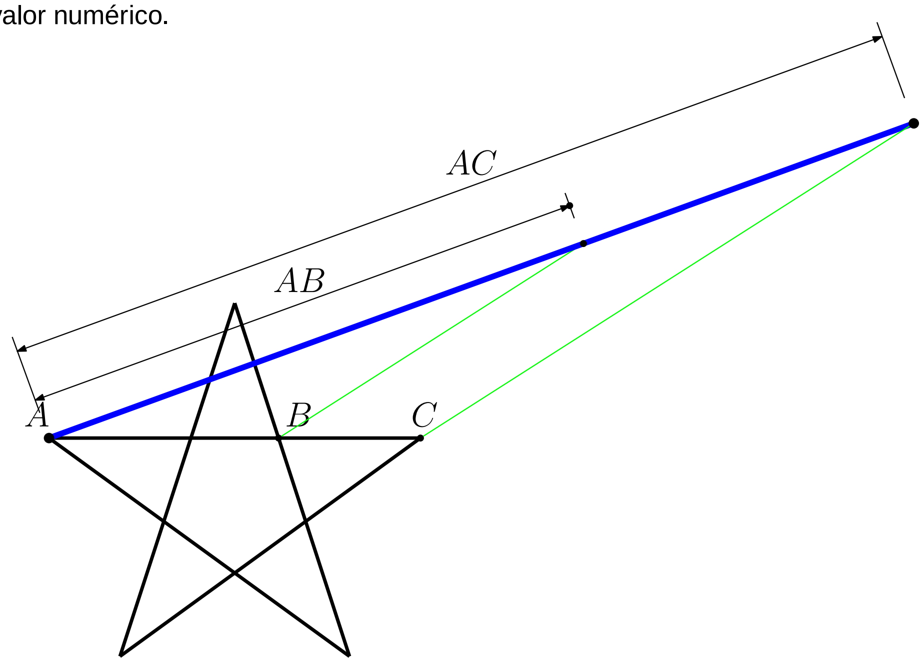


ITA 1988, Questão 04: Análise.

Seja S um ponto do eixo radical r tal que $ES = h$ e seja T_h o comprimento da tangente por S a C_1. Situando a origem de eixos cartesianos em E, com o eixo x ao longo da reta suporte de OO' e o eixo y ao longo do eixo radical r, a equação geral do círculo de centro em S e ortogonal a C_1 é dada por $x^2 + (y - h)^2 = T_h^2$. Fazendo $y = 0$, ou seja, obtendo as interseções deste círculo com a reta suporte do segmento OO', tem-se $x^2 = (T_h^2 - h^2) = (d^2 - R^2)$ que é constante para todo ponto S em r. Logo, estas interseções são os pontos fixos P e Q desejados. Em particular, se T_0 é o comprimento da tangente por E a C_1, então $PE = EQ = T_0$, de forma que $PQ = 2T_0$.

ITA 1988, Questão 05: O segmento AB pertence a um pentágono estrelado. Quanto mede o segmento AC? Escala: 1:25.

Obs: O desenho do pentágono estrelado abaixo é apenas uma demonstração do que se pede, não possuindo valor numérico.

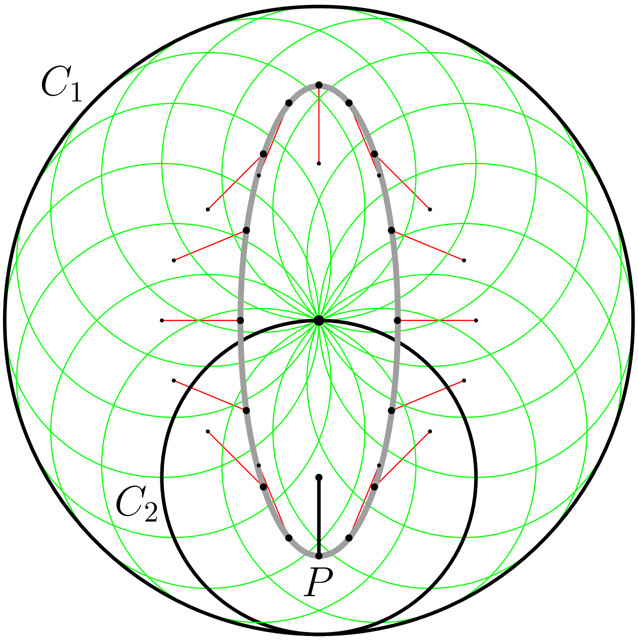


ITA 1988, Questão 05: Solução - (D) 293,25.

Construção: (i) Trace a quarta proporcional $\overline{AB} : \overline{AC} = AB : AC$, onde os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ pertencem ao pentágono estrelado.

Justificativa: O esboço do pentágono estrelado dado transforma o problema na determinação de uma simples quarta proporcional.

ITA 1988, Questão 06: Construa uma hipociclóide encurtada de tal forma que a cíclica seja uma elipse, sabendo-se que os pares de números dados correspondem respectivamente ao raio do círculo diretor e do círculo gerador da curva. Qual é o par de valores correto?

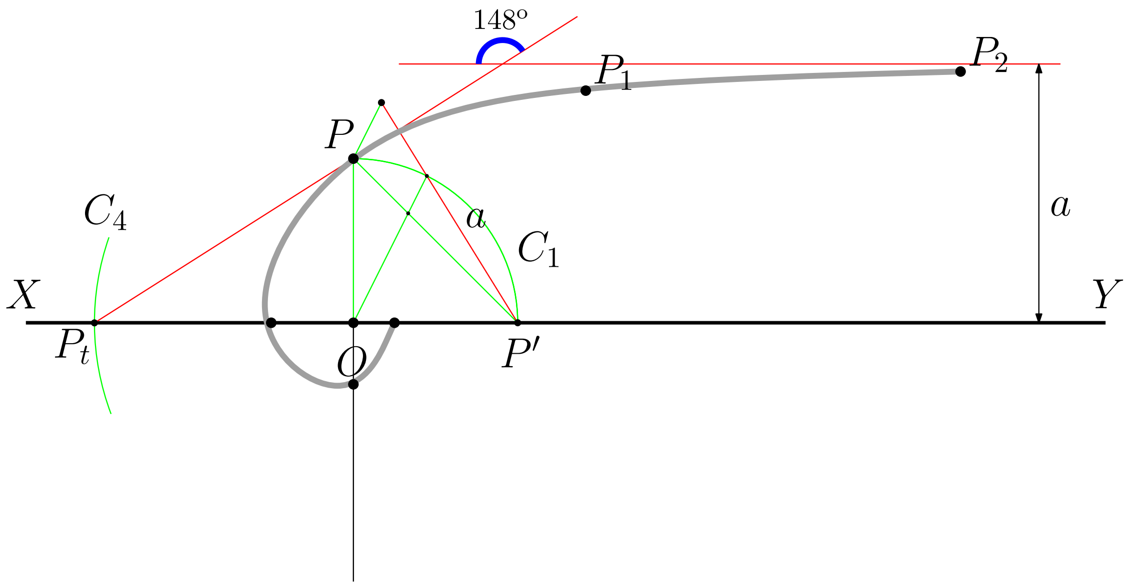


ITA 1988, Questão 06: Solução (A) 40 e 20 mm.

Construção: (i) Divida os círculos diretor C_1 e gerador C_2 usando 16 raios auxiliares em cada círculo; (ii) Marque o ponto P sobre o raio de C_2; (iii) Para cada raio auxiliar de C_1, contado no sentido horário, marque a imagem do ponto P no raio auxiliar de C_2, contado no sentido anti-horário; (iv) Una os pontos obtidos no passo anterior para compor a elipse desejada.

Justificativa: Para que hipociclóide encurtada seja uma elipse, o raio do círculo gerador deve ser metade do raio do círculo diretor [11], pp. 303–304. A única alternativa que satisfaz esta relação é a opção (A), representada acima.

ITA 1988, Questão 07: P, P_1 e P_2 são pontos que pertencem a uma espiral hiperbólica de eixo polar XY e pólo O. Trace a assíntota da espiral e, pelo ponto P, uma reta tangente à curva. Pergunta: Qual é, aproximadamente, a medida do maior ângulo formado pela interseção da assíntota com a tangente?

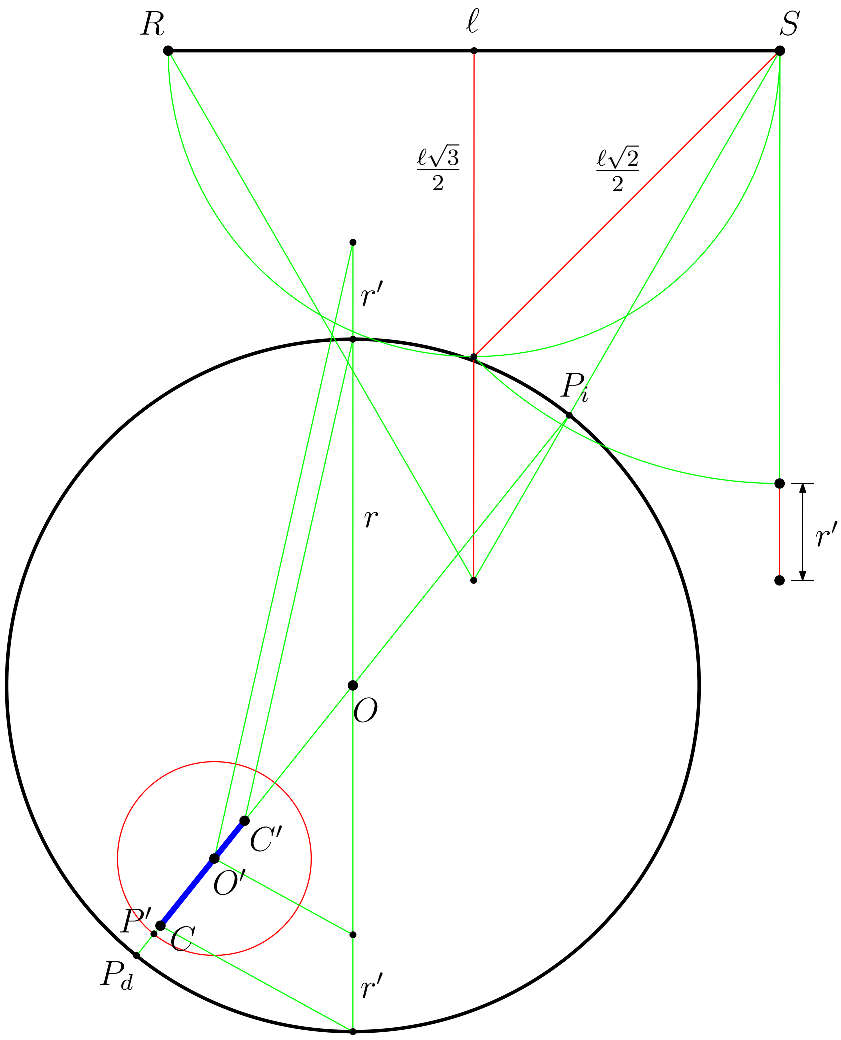


ITA 1988, Questão 07: Solução - (B) 148°.

Construção: (i) Trace qualquer um dos cículos $C_1 \equiv (O, OP)$, $C_2 \equiv (O, OP_1)$ ou $C_3 \equiv (O, OP_2)$, determinando P', P'_1 ou P'_2, respectivamente, sobre o eixo XY, à direita de O; (ii) Retifique qualquer um dos arcos PP', $P_1P'_1$ ou $P_2P'_2$, resultando no comprimento a; (iii) Trace a assíntota da espiral paralela a XY a uma distância a; (iv) Trace $C_4 \equiv (O, a)$, cuja interseção com o eixo XY determina o ponto P_t; (v) Trace P_tP, que é a tangente à espiral por P, determinando o ângulo desejado com a assíntota;

Justificativa: Na espiral hiperbólica, o raio vetor é inversamente proporcional ao ângulo deste com o eixo polar. Com isto, a medida a do arco associada ao raio vetor é constante e a assíntota é a paralela a uma distância a do eixo. Além disto, a sub-tangente por um ponto da espiral é constante e igual a a também (ver [11], pp. 263–265).

ITA 1988, Questão 08: São dados: A circunferência de centro O, o ponto O' e o segmento RS, que é o perímetro de uma circunferência cujo centro é O'. Trace a circunferência de centro O' e determine os centros de homotetia das duas circunferências. Pergunta: Quanto mede a distância entre os centros de homotetias direta e inversa das duas circunferências?



ITA 1988, Questão 08: Solução - (D) 18 mm.

Construção: (i) Construa a circunferência de centro O' e comprimento RS ([2], Exercício 4.4); (ii) Determine a quarta proporcional $(r - r') : OO' = r : x_1$, e marque o centro C de homotetia direta, externo a OO' e mais próximo de O', tal que $OC = x_1$; (iii) Determine a quarta proporcional $(r + r') : OO' = r : x_2$, e marque o centro C' de homotetia inversa, entre O e O', tal que $OC' = x_2$.

Justificativa: Do enunciado,

$$RS = 2\pi r' \approx 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})r' \Rightarrow r' \approx \frac{RS(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2}$$

O centro C da homotetia direta está fora do segmento OO', mais próximo de O', tal que $CO' = x_1'$ e $CO = x_1$. Este ponto C mapeia O em O' e ainda o ponto P_d em P', indicados na figura-solução, de forma que

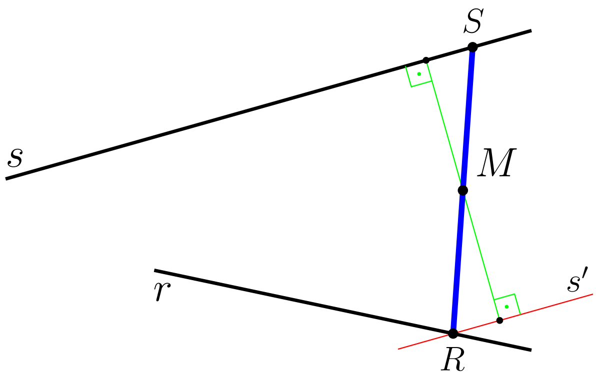
$$\begin{cases} CO - CO' = OO' \\ \frac{CO}{CO'} = \frac{CP_d}{CP'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_1' = OO' \\ \frac{x_1}{x_1'} = \frac{r - x_1}{r' - x_1'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{OO'r}{r-r'} \\ x_1' = \frac{OO'r'}{r-r'} \end{cases}$$

Já o centro C' da homotetia inversa está entre O e O', também mais próximo de O', tal que $OC' = x_2$ e $C'O' = x_2'$. Este ponto C' mapeia O em O' e ainda o ponto P_i em P', indicados na figura-solução, de forma que

$$\begin{cases} C'O + C'O' = OO' \\ \frac{C'O}{C'O'} = \frac{C'P_i}{C'P'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_2' = OO' \\ \frac{x_2}{x_2'} = \frac{x_2 + r}{x_2' + r'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{OO'r}{r+r'} \\ x_2' = \frac{OO'r'}{r+r'} \end{cases}$$

III.5 Soluções de 1987

ITA 1987, Questão 01: Dadas duas retas r e s e um ponto M entre elas, pede-se determinar dois pontos R e S nas retas dadas, sendo $MR = MS$. O valor do segmento RS é:

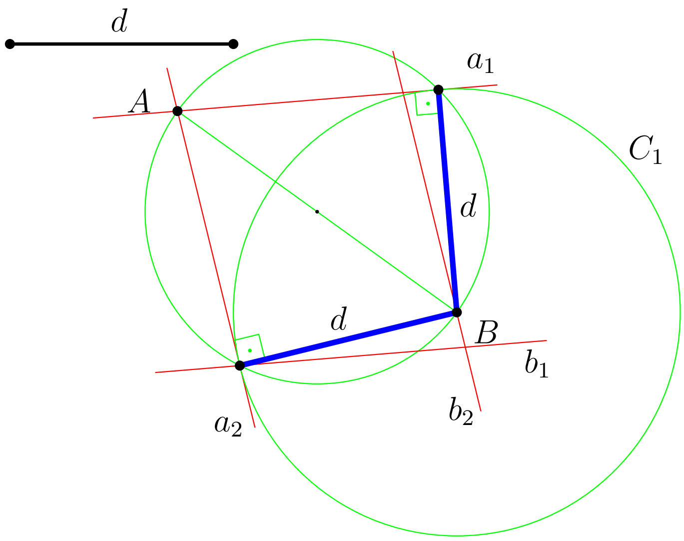


ITA 1987, Questão 01: Solução - (E) 38 mm.

Construção: (i) Trace a reta s' simétrica da reta s em relação ao ponto M, cuja interseção com a reta r determina o ponto R; (ii) Trace a reta RM, cuja interseção do prolongamento com a reta s é o ponto S.

Justificativa: O ponto R (que pertence à reta r) é o simétrico do ponto S (que pertence à reta s) em relação ao ponto M.

ITA 1987, Questão 02: Passar, pelos pontos dados, retas a e b paralelas e separadas pelo segmento d também dado. O segmento perpendicular pelo ponto B, até a reta que passa pelo ponto A, mede:

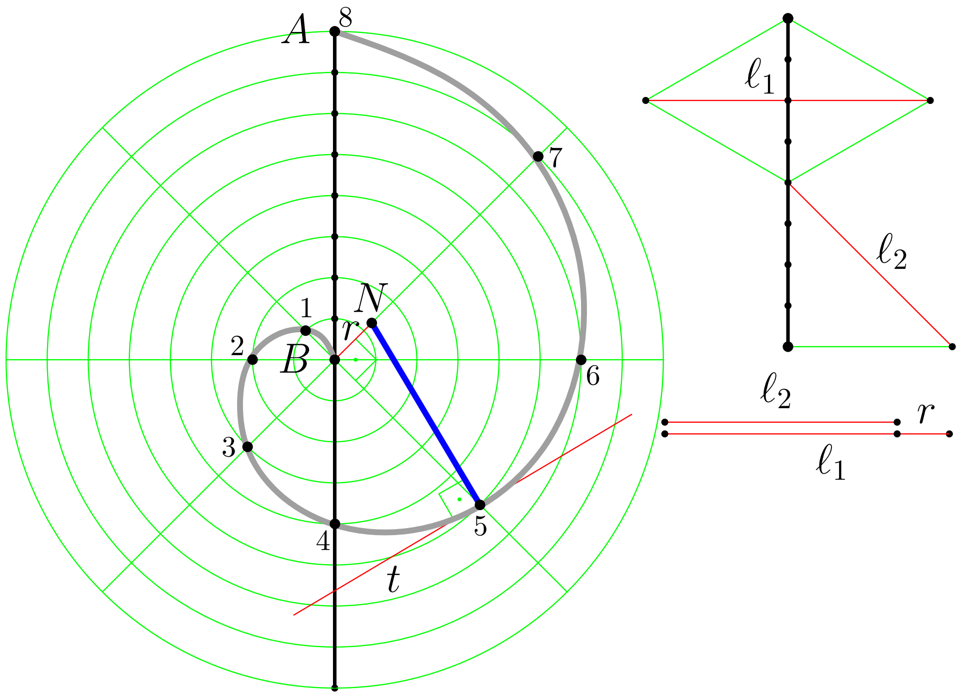


ITA 1987, Questão 02: Solução - (D) 30 mm.

Construção: (i) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(B, d)$; (ii) Trace as tangentes a_1 e a_2 por A a C_1; (iii) Trace por B paralelas b_1 e b_2 às retas a_1 E a_2, respectivamente.

Justificativa: As tangentes a_1 e a_2 ao círculo C_1, de centro B e raio d, distam necessariamente d do ponto B. A partir disto, traçam-se as paralelas b_1 e b_2, respectivamente, a a_1 e a_2. Como pode-se perceber, há dois pares de retas que satisfazem as condições do enunciado.
sln: O problema não requer construção alguma, já que a distância d entre as retas paralelas é dada no enunciado.

ITA 1987, Questão 03: Dado o passo AB construir a espiral de Arquimedes, usando 8 pontos. Pelo 5^o ponto, traçar uma tangente a essa espiral. A normal a essa tangente mede:



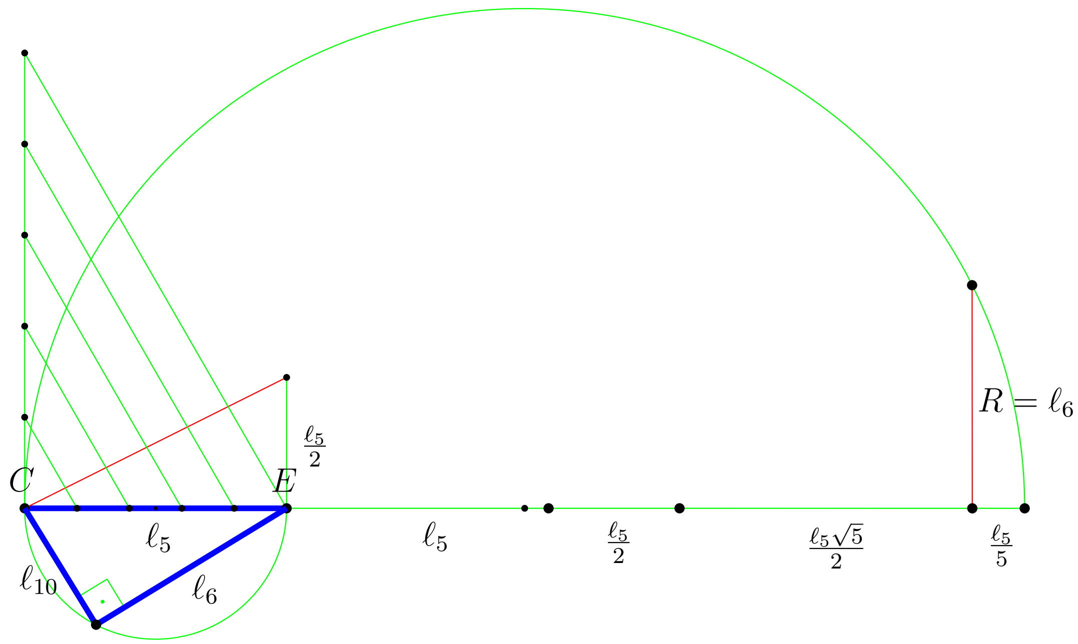
ITA 1987, Questão 03: Solução - (D) 26.

Construção: (i) Divida o segmento AB em 8 partes iguais e trace 8 círculos de centros em B e raios determinados por cada uma destas 8 partes; (ii) Marque sobre cada círculo, em seqüência, do menor para o maior, pontos espaçados a cada 45^o; (iii) Trace a espiral, unindo os pontos determinados no passo anterior; (iv) Determine o raio r da circunferência de comprimento AB (ver [2], Problema 4.4); (v) Marque sobre a reta suporte dos pontos '3' e '7' a distância $BN = r$; (vi) Trace a reta N'5', que é a normal desejada; (vii) Trace a tangente t, perpendicular a N'5' pelo ponto '5'.

Justificativa: A espiral de Arquimedes é caracterizada por $R(\theta) = \frac{AB}{2\pi}\theta$, onde θ é dado em radianos. Nesta espiral, a subnormal (projeção da reta normal na reta perpendicular ao raio B'5') é constante [11], pp. 259–260, e igual ao passo normalizado $r = \frac{AB}{2\pi} \approx AB\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$. Isto permite determinar a normal e, subseqüentemente, a tangente em um dado ponto da espiral.

ITA 1987, Questão 04: Construir um triângulo isósceles equivalente ao setor circular conhecido. A base desse triângulo mede aproximadamente:
sln: Questão Anulada. Existem infinitos triângulo isósceles equivalentes a um setor circular dado.

ITA 1987, Questão 05: O segmento CE dado é o lado de um pentágono inscrito em um círculo. Construa um triângulo retângulo, sabendo-se que sua hipotenusa é igual ao segmento CE e que os catetos são lados de polígonos inscritos no mesmo círculo. Pergunta: Qual é o perímetro do triângulo?



ITA 1987, Questão 05: Solução - (D) 83 mm.

Construção: (i) Determine o raio $R = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell_5$ do círculo circunscrito ao pentágono de lado $CE = \ell_5$ ([2], Exercício 2.26); (ii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa ℓ_5 e cateto $R = \ell_6$, determinando o outro cateto $\ell_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

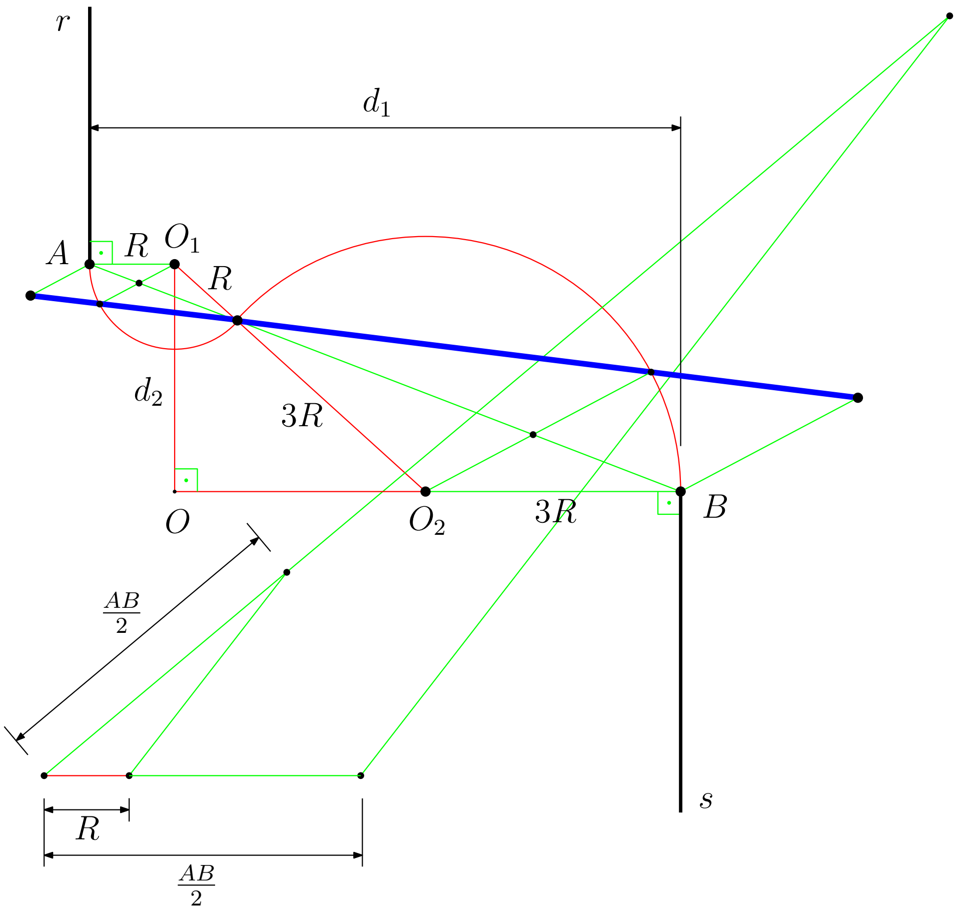
Justificativa: De [5], pp.232–233, tem-se

$$\left\{\begin{array}{l} \ell_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,R \\ \ell_6 = R \\ \ell_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,R \end{array}\right. \Rightarrow \ell_5^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2$$

e ainda

$$R = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell_5$$

ITA 1987, Questão 06: Dadas as retas r e s paralelas, concordá-las nos pontos A e B por uma curva plana composta de dois arcos, sabendo-se que o raio de um deles é o triplo do outro. Quanto mede a diferença entre os comprimentos dos arcos concordantes?



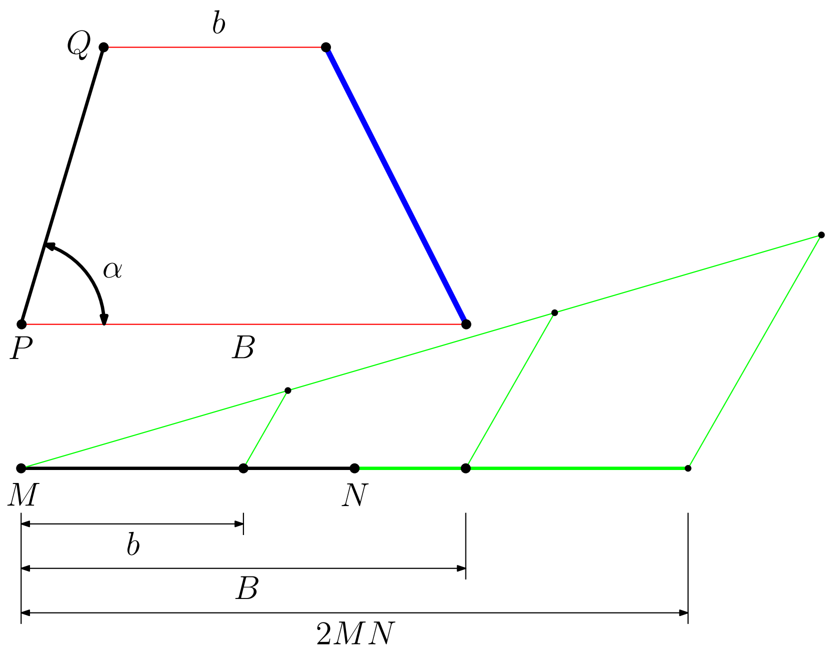
ITA 1987, Questão 06: Solução - (B) 55 mm.

Construção: (i) Determine a quarta proporcional $2d_1 : \frac{AB}{2} = \frac{AB}{2} : R$, onde d_1 é a distância entre as retas r e s; (ii) Marque os pontos O_1 e O_2, sobre as perpendiculares a r por A e a s por B, respectivamente, e tais que $AO_1 = R$ e $BO_2 = 3R$; (iii) Trace, até o segmento O_1O_2, os arcos concordantes de raios R e $3R$ e centros O_1 e O_2, respectivamente; (iv) Retifique os arcos concordantes, usando, por exemplo, o método de D'Ocagne ([1], pp. 63–65).

Justificativa: Do triângulo retângulo ΔOO_1O_2, tem-se

$$(4R)^2 = (d_1 - 4R)^2 + d_2^2 \Rightarrow R = \frac{d_1^2 + d_2^2}{8d_1} = \frac{AB^2}{8d_1}$$

ITA 1987, Questão 07: O segmento PQ é um dos lados não paralelos de um trapézio. O segmento MN é o que une os pontos médios dos lados não paralelos. O segmento PQ forma com a base maior um ângulo igual a α. Sabe-se que a base maior é o dobro da base menor. Quanto mede o lado não paralelo a PQ?



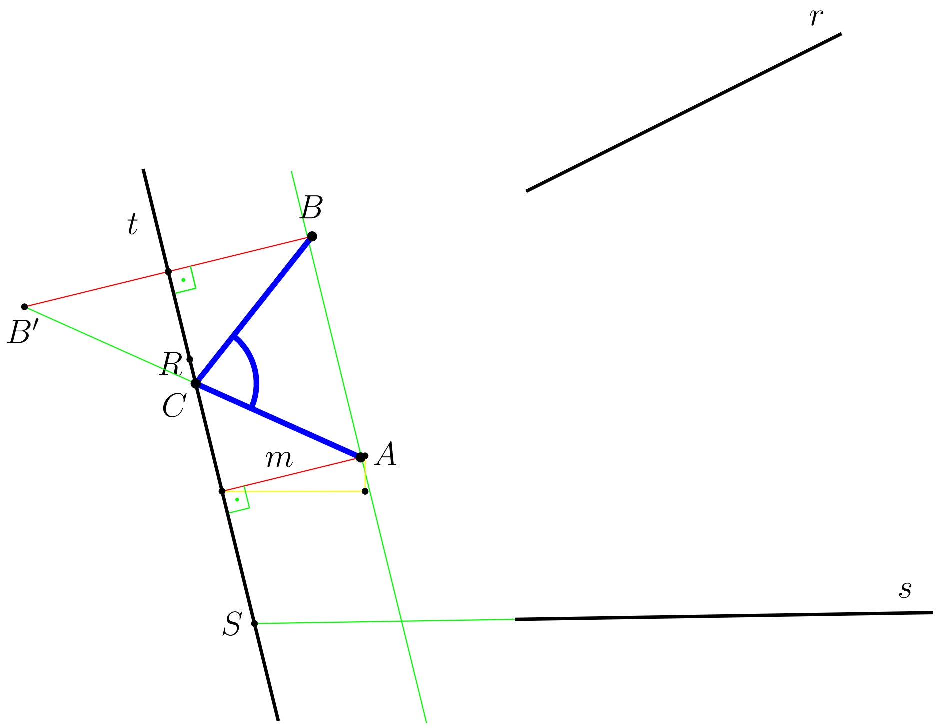
ITA 1987, Questão 07: Solução - (B) 41 mm.

Construção: (i) Determine os comprimentos das bases maior $B = \frac{4MN}{3}$ e menor $b = \frac{2MN}{3}$; (ii) Trace PQ fazendo o ângulo α com a base maior; (iii) Trace a partir de Q a base menor paralela à base maior; (iv) Complete o trapézio unindo os extremos das duas bases.

Justificativa: Como MN é a base média do trapézio, tem-se que

$$MN = \frac{B+b}{2} = \frac{2b+b}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{2MN}{3} \\ B = \frac{4MN}{3} \end{cases}$$

ITA 1987, Questão 08: São dadas as retas r, s e t, assim como o ponto B. Trace a bissetriz do ângulo formado por r e s e determine sobre a mesma um ponto A, distante 20 mm à direita da reta t. Trace o menor caminho entre os pontos A e B, com um ponto em t. Pergunta: Qual é a medida do ângulo formado pelos segmentos que determinam este menor caminho?
Obs: t é perpendicular à bissetriz do ângulo formado por r e s.



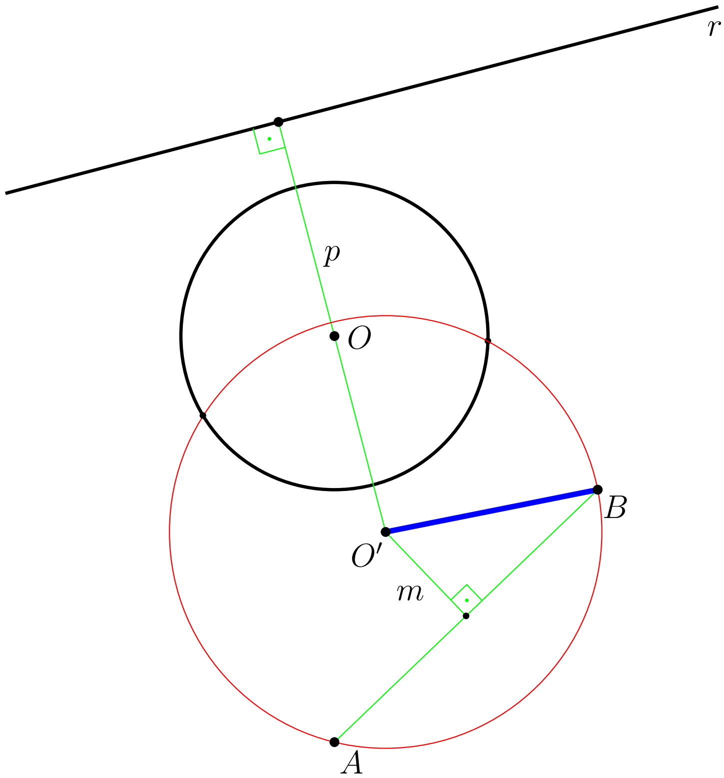
ITA 1987, Questão 08: Solução - (D) 75°.

Construção: (i) Prolongue as retas r e s, cujas respectivas interseções com a reta t determinam os pontos R e S; (ii) Trace a mediatriz m de RS e marque sobre m o ponto A, 20 mm à direita de t; (iii) Determine o ponto B', simétrico de B em relação a t, e trace a reta $B'A$, cuja interseção com a reta t é o ponto C, que define o caminho desejado BCA.

Justificativa: A bissetriz do ângulo entre r e s é perpendicular a t e equidistante dos pontos R e S. Logo, esta bissetriz é a mediatriz m de RS. Como $(BC + CA) = (B'C + CA)$, no caminho desejado B', C e A são colineares, o que permite determinar o ponto $C \in t$.
sln: A sentença “distante 20 mm à direita da reta t” é dúbia. O ponto A está 20 mm à direita de t ou está 20 mm de t, à direita?

III.6 Soluções de 1986

ITA 1986, Questão 16: Dados: Uma circunferência de centro O; uma reta; dois pontos A e B. Pede-se: O raio da circunferência que passa pelos dois pontos e é secante à circunferência dada e determina nela uma secante paralela à reta r.

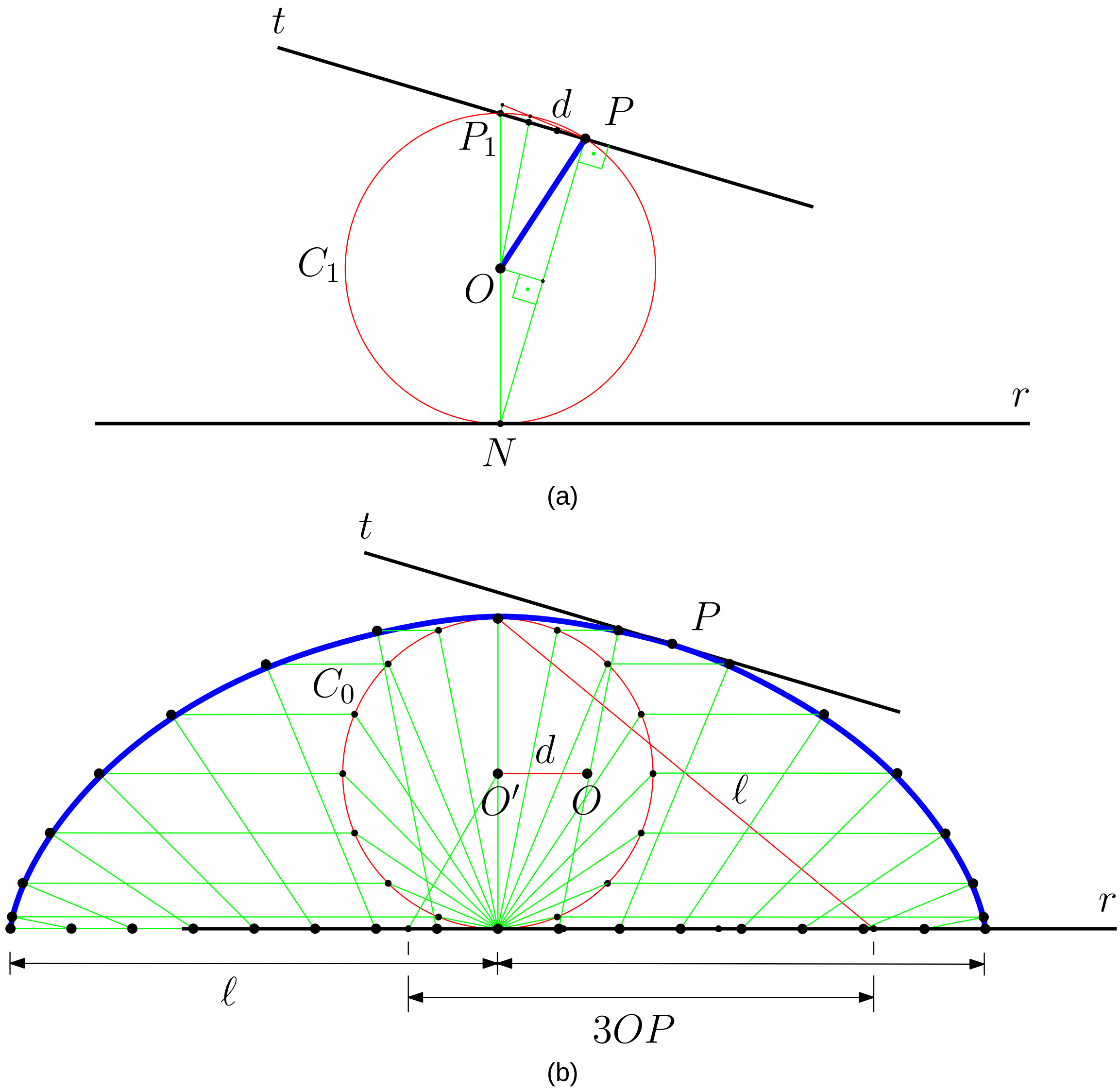


ITA 1986, Questão 16: Solução - (C) 29 mm .

Construção: (i) Trace a mediatriz m de A e B; (ii) Trace por O uma perpendicular p à reta r, cuja interseção com a mediatriz m é o centro O' da circunferência desejada.

Justificativa: Naturalmente que o centro O' da circunferência desejada está sobre a mediatriz de A e B. Além disto, a mediatriz da secante determinada pelos dois círculos passa pelos seus centros. Esta mediatriz passa por O, é perpendicular a r e passará também por O'.

ITA 1986, Questão 17: Conhecendo-se: t, reta tangente a uma cíclica; P, ponto de tangência; r, diretriz da cíclica. Pede-se: O raio da circunferência geradora, assim como a construção de um ciclo dessa curva, passando por P.



ITA 1986, Questão 17: (a) Solução - (A) 20 mm; (b) Cíclica.

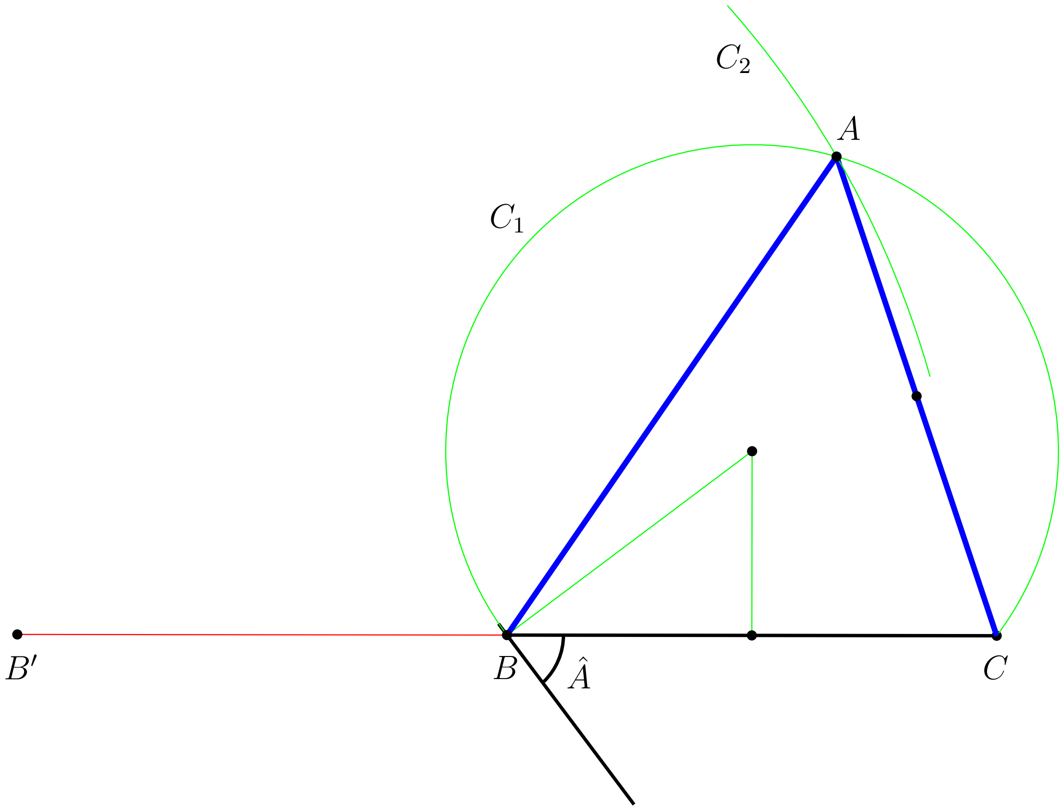
Construção: Determinação do raio: (i) Trace por P a normal à tangente t, determinando o ponto N sobre a diretriz r; (ii) Trace a mediatriz de PN e uma perpendicular à diretriz por N, cuja interseção é o centro O do círculo gerador, o que permite determinar o raio OP desejado.

Traçado da cíclica (ver [11], pp. 279–281): (iii) Prolongue ON, determinando o ponto P_1 sobre o círculo $C_1 \equiv (O, OP)$; (iv) Retifique o arco PP_1, usando, por exemplo, o método de d'Ocagne (ver [1], pp. 63–65). (v) Determine o círculo $C_0 \equiv T_d(C_1)$, onde d é o deslocamento para a esquerda de uma distância igual à do arco PP_1 retificado; (vi) Retifique o círculo C_0 e marque o comprimento ℓ da semi-circunferência para cada lado de N', interseção de C_0 com r; (vii) Divida C_0 em 16 partes iguais e una N' a cada um dos 16 pontos; (viii) Divida cada distância ℓ em 8 partes iguais e trace paralelas aos segmentos correspondentes obtidos no item anterior; (ix) Trace paralelas a r por cada uma das 16 divisões de C_0, cujas interseções com os respectivos segmentos do item anterior pertencem à cíclica.

Justificativa: A normal por P é a corda NP do círculo gerador da cíclica desejada. Com isto, o centro O pode ser obtido pela interseção da perpendicular a r por N com a mediatriz de NP.

ITA 1986, Questão 18: De um triângulo ABC conhecemos: Um lado, uma mediana e o ângulo oposto ao lado dado. Pede-se o valor dos outros dois lados.

- a = 65 mm; m_b = 63 mm.



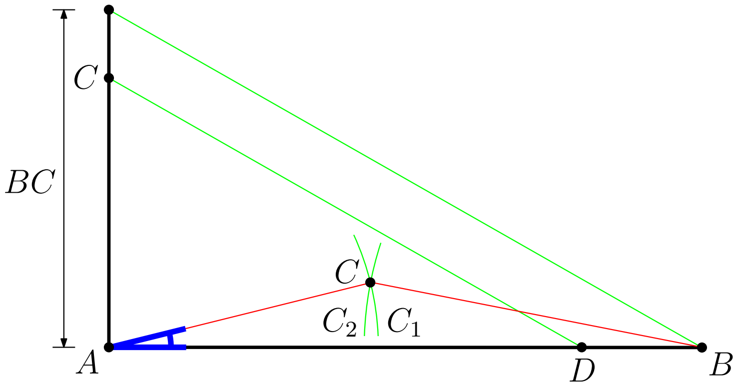
ITA 1986, Questão 18: Solução - (E) 68 e 77 mm.

Construção: (i) Marque os pontos colineares B', B e C', nesta ordem, tais que $B'B = BC = a$; (ii) Trace o arco-capaz C_1 do ângulo $\hat{A}$ relativo ao lado $BC = a$; (iii) Trace $C_2 \equiv \mathcal{C}(B', 2m_b)$, cuja interseção com C_1 é o vértice A.

Justificativa: Seja M_b o ponto médio de AC. No triângulo auxiliar $\Delta B'CA$, B é médio de $B'C$, e assim BM_b é a base média relativa ao lado $B'A$ deste triângulo, de forma que $B'A = 2BM_b = 2m_b$. Além disto, é simples perceber que o vértice A pertence ao arco-capaz C_1 do ângulo $\hat{A}$ relativo ao lado $BC = a$.

sln: Este problema foi um dos que mais me causaram dificuldade, apesar de sua simples solução.

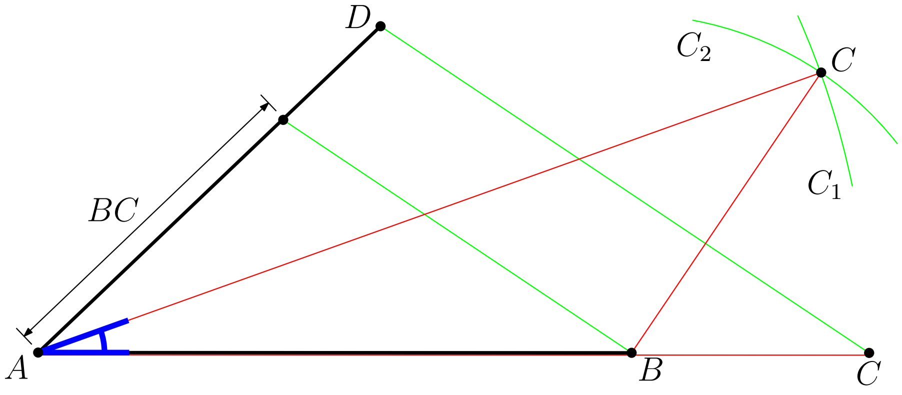
ITA 1986, Questão 19: Os segmentos AB e BC são os lados de um triângulo ABC. Determinar o ângulo do vértice A, sabendo-se que o lado AC é a quarta proporcional dos segmentos AB, BC e AD.



ITA 1986, Questão 19: Solução - (?).

Construção: (i) Determine a quarta proporcional $AB : BC = AD : AC$; (ii) Trace os círculos $C_1 \equiv \mathcal{C}(A, AC)$ e $C_2 \equiv \mathcal{C}(B, BC)$, cuja interseção é o vértice C.

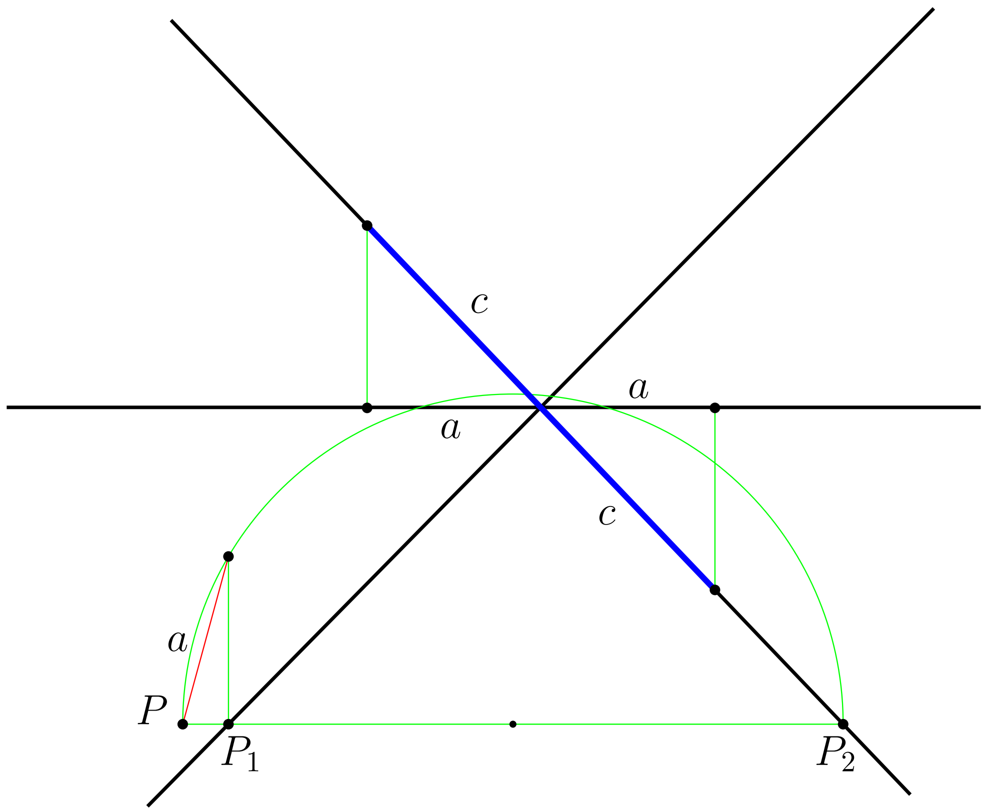
Justificativa: A solução segue diretamente do enunciado do problema.
sln: A solução do problema acima, para os comprimentos dados $AB \approx 79$ mm, $BC \approx 45$ mm e $AD \approx 63$ mm, pela Lei dos Cossenos, determina $\hat{A} = 14^{\mathrm{o}}$, que não corresponde a qualquer opção de resposta. Considerando AC como a quarta proporcional dos segmentos BC, AB e AD, isto é, fazendo $BC : AB = AD : AC$, então $\hat{A} = 20^{\mathrm{o}}$, como obtido abaixo.



ITA 1986, Questão 19 (modificada): Solução - (E) 20°.

ITA 1986, Questão 20: Determinar a distância focal da hipérbole, conhecendo-se: As assíntotas e o ponto P pertencente à curva.
Construção: (i) Trace por P uma paralela ao eixo transverso determinando os pontos P_1e P_2 sobre as assíntotas; (ii)Determine a média geométrica $a = \sqrt{PP_1.PP_2}$; (iii) Marque a distância a, sobre o eixo transverso, em cada lado do centro, interseção das assíntotas, da hipérbole; (iv) Trace perpendiculares ao eixo transverso pelas marcações do item anterior, determinando sobre qualquer uma das assíntotas a distância focal desejada.

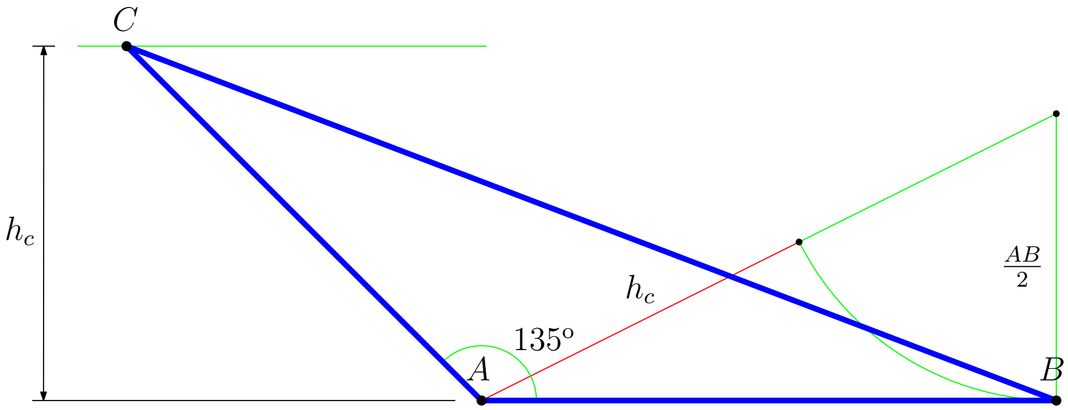
Justificativa: Traçando por P uma paralela ou uma perpendicular ao eixo transverso, as respectivas interseções com as assíntotas, P_1 e P_2 devidos à paralela ou P_3 e P_4 devidos à perpendicular, são tais que $a = \sqrt{PP_1.PP_2}$ e $b = \sqrt{PP_3.PP_4}$. A partir do centro, podemos traçar um retângulo de lados $2a$ e $2b$ cujas diagonais estão sobre as assíntotas e têm comprimentos $2c$.



ITA 1986, Questão 20: Solução - (D) 65 mm.

III.7 Soluções de 1985

ITA 1985, Questão 16: Determine o perímetro de um triângulo ABC dados o lado $AB = 75$ mm, o ângulo $\hat{A} = 135^{\text{o}}$ e que a altura do vértice C é o segmento áureo de AB.



ITA 1985, Questão 16: Solução - (D) 270 mm.

Construção: (i) Trace o ângulo de $\hat{A} = 75^{\text{o}}$ com vértice em $\hat{A}$; (ii) Determine o segmento áureo h_c de AB; (iii) Trace uma paralela a AB a uma distância h_c, cuja interseção com o outro lado do ângulo $\hat{A}$ é o vértice C.

Justificativa: O vértice C fica facilmente determinado pela altura h_c e pelo fato de que $C\hat{A}B = 135^{\text{o}}$. Algebricamente, tem-se que

$$h_c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$$

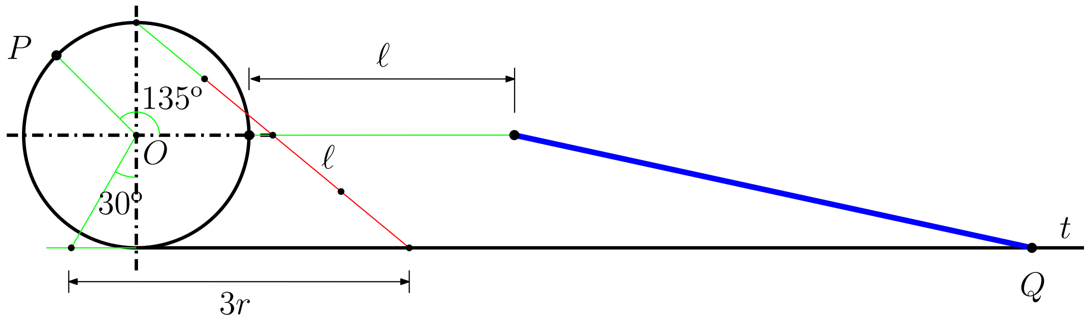
Com isto, $AC = h_c\sqrt{2}$ e, pela Lei dos Cossenos, tem-se

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos 135^{\text{o}} \\ &= AB^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{2}\right)^2 AB^2 + 2\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{2}AB^2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3AB^2 \end{aligned}$$

De modo que o perímetro desejado é

$$AB + AC + BC = \left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) AB = 270 \text{ mm}$$

ITA 1985, Questão 17: São dados do problema: uma circunferência de raio r, um ponto P que lhe pertence, uma reta t a ela tangente e um ponto Q dessa reta. Girando-se a circunferência de 135° sobre a reta, sem deslizar, determinar a distância do ponto P ao ponto Q.

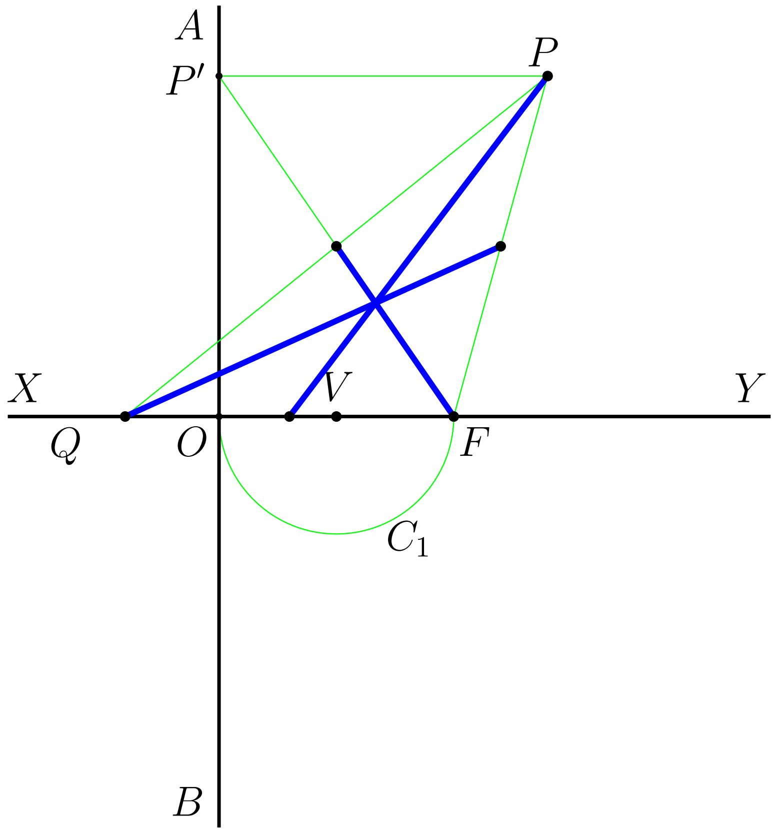


ITA 1985, Questão 17: Solução - (C) 70 mm.

Construção: (i) Retifique a semi-circunferência e determine $\ell = \frac{3}{4}\pi r$ de seu comprimento; (ii) Marque a nova posição do ponto P, rotacionado de 135^o no sentido horário e transladado horizontalmente de uma distância ℓ em relação à posição original.

Justificativa: O ângulo de 135^o corresponde a um deslocamento horizontal ℓ igual a $\frac{3}{4}$ da semi-circunferência. O movimento do ponto P é a composição da rotação de 135^o em torno do centro da circunferência e da translação horizontal da distância ℓ.

ITA 1985, Questão 18: De uma parábola são conhecidos: o eixo XY, a diretriz AB, o vértice V e um ponto P de tangência. Encontrar a soma dos comprimentos das medianas do triângulo definido pelo ponto P, pelo foco F e um ponto Q determinado pela interseção da reta tangente à parábola no ponto P com o eixo XY.



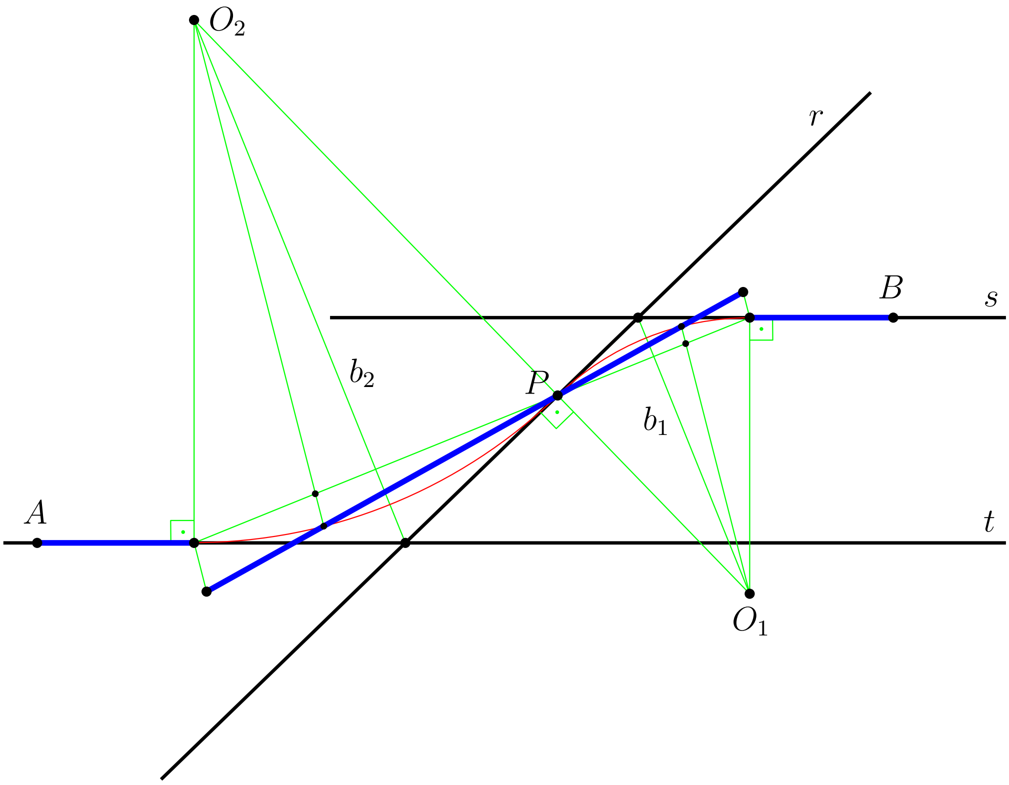
ITA 1985, Questão 18: Sem Solução.

Construção: (i) Trace $C_1 \equiv (V, VO)$, onde O é a interseção do eixo XY com a diretriz AB, determinando o foco F sobre o eixo XY; (ii) Trace a mediatriz de FP', onde P' é a projeção de P sobre a diretriz AB. Esta mediatriz é a tangente à parábola por P (ver observação abaixo), cuja interseção com o eixo XY é o ponto Q desejado; (iii) Trace as medianas do triângulo ΔPFQ.

Justificativa: A tangente por um ponto P de uma parábola é a mediatriz da reta FP', onde P' é a projeção de P sobre a diretriz.

sln: O foco também poderia ser determinado pela interseção do círculo (P, PP') com o eixo XY. Na figura do enunciado, o foco assim obtido seria incompatível com o dado acima, e a questão poderia (deveria?) ser anulada.

ITA 1985, Questão 19: As retas s e t são os eixos de um duto que descreve uma curva definida por dois arcos de circunferência concordantes. Determinar graficamente o comprimento do duto entre os pontos A e B, sabendo-se que ambos os arcos de concordância são tangentes à reta r no ponto P. Escala do desenho: 1:10.

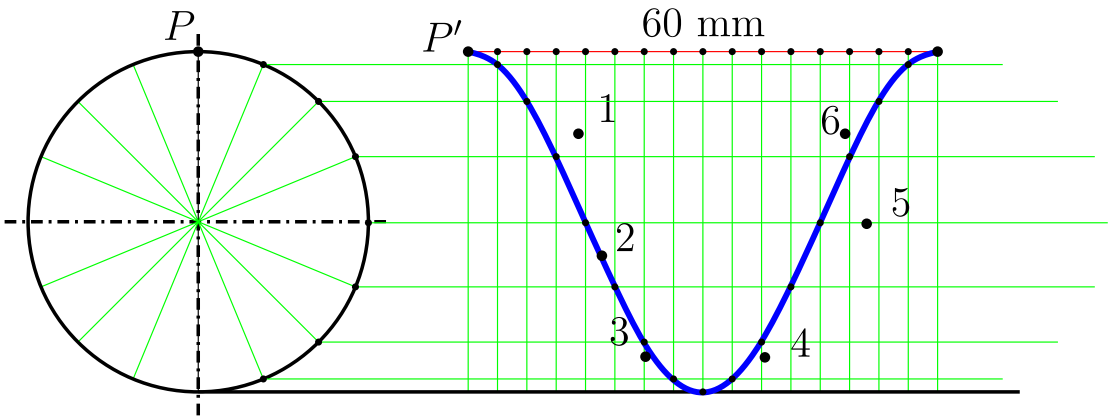


ITA 1985, Questão 19: Solução - (E) 1220 mm .

Construção: (i) Trace as bissetrizes b_1, do ângulo obtuso formado pelas retas s e r, e b_2, do ângulo obtuso formado pelas retas t e r; (iii) Trace a perpendicular por P da reta r, cujas interseções com as bissetrizes b_1 e b_2 determinam os centros O_1 e O_2, respectivamente, dos arcos concordantes; (iv) Trace as perpendiculares por O_1 à reta s e por O_2 à reta r, cuja interseção com cada reta determina o ponto de tangência do respectivo arco com a própria reta; (v) Trace os arcos concordantes e retifique-os, usando, por exemplo, o método de d'Ocagne ([1], pp. 63–65).

Justificativa: O arco de centro O_1 é tangente simultaneamente às retas s e r. Logo, O_1 está sobre a bissetriz do ângulo formado pelas duas retas. Analogamente, o centro O_2 do outro arco está sobre a bissetriz do ângulo formado pelas retas t e r. Como os arcos concordantes são tangentes à reta r em P, os seus centros devem pertencer também à perpendicular à reta r neste mesmo ponto.

ITA 1985, Questão 20: Uma hélice de 60 mm de passo é traçada sobre uma superfície cilíndrica de diâmetro D. Na representação gráfica de seu desenvolvimento, iniciado no ponto P, qual o par de pontos assinalados pertence à curva?



ITA 1985, Questão 20: Solução - (E) 2 - 4.

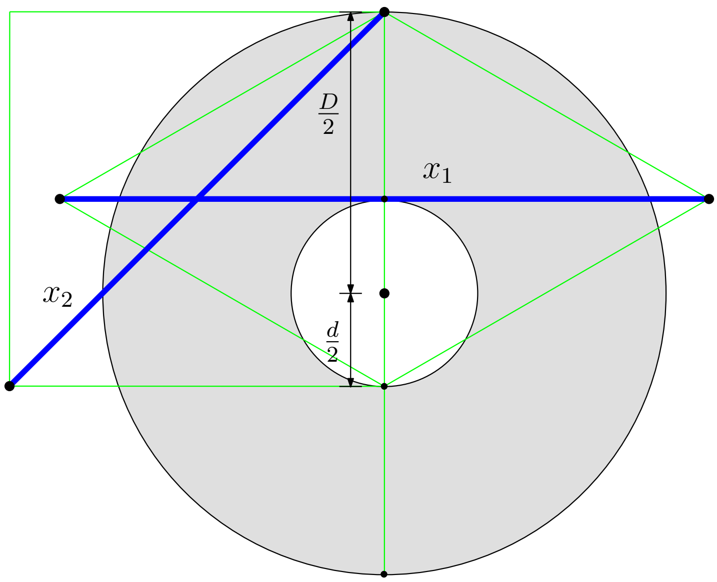
Construção: (i) Marque a partir de P a distância de 60 mm e divida-a em 16 partes iguais; (ii) Divida o círculo de diâmetro D em 16 partes iguais, e trace paralelas à diretriz por cada uma dos extremos destas partes, cujas interseções com as divisões correspondentes obtidas no item anterior pertencem à hélice desejada.

Justificativa: O passo define o deslocamento do ponto P ao longo da rotação da hélice. A composição destes dois movimentos define o traçado da curva.
sln: Na construção acima, a hélice obtida contém o ponto 2, sendo que os pontos 3 e 4 estão bem próximos a ela.

III.8 Soluções de 1984

ITA 1984, Questão 16: Um topógrafo pretende medir a altura de uma torre. Para tanto localiza o teodolito num ponto A conveniente e faz uma visada horizontal para o ponto B localizado a 100 m de distância. Em seguida visa o topo da torre (ponto C) verificando ser de 40º o ângulo que o teodolito forma com a horizontal. Determinar a altura da torre, sabendo-se ser esta a média proporcional da distância AB. O visor do teodolito está a $1{,}50$ m do solo. Escala: 1:10^3
sln: Questão Anulada. A frase "sabendo-se ser esta [a altura da torre] a média proporcional da distância AB" não tem sentido.

ITA 1984, Questão 17: Determinar, graficamente, o comprimento desenvolvido de um anel de diâmetro externo D (75 mm) e diâmetro interno d (25 mm) usando equivalência de áreas.



ITA 1984, Questão 17: Solução - (A) 157 mm.

Construção: (i) Determine as grandezas $x_1 = (D+d)\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $x_2 = (D+d)\frac{\sqrt{2}}{2}$, e faça $\ell \approx (x_1 + x_2)$.

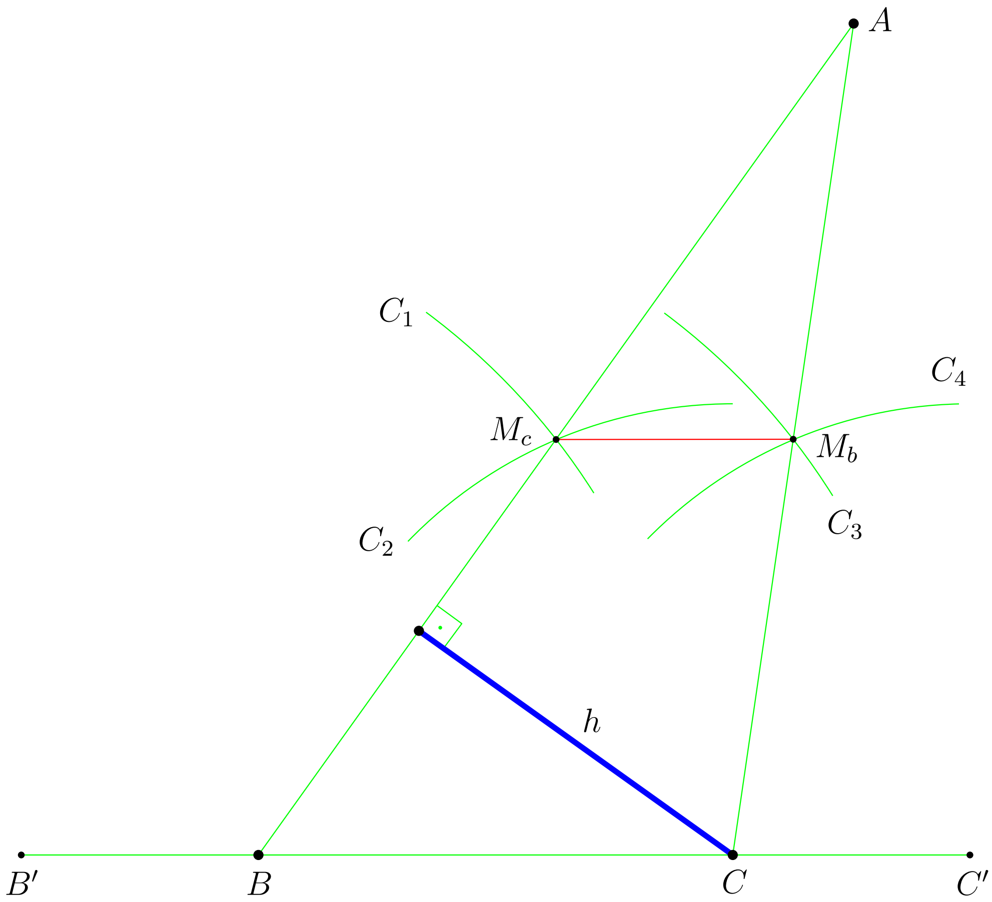
Justificativa: Pela equivalência das áreas, tem-se

$$\ell\frac{(D-d)}{2} = \pi\frac{(D^2-d^2)}{4} \Rightarrow \ell = \pi\frac{(D+d)}{2} \approx (\sqrt{3}+\sqrt{2})\frac{(D+d)}{2}$$

ou seja, $\ell = 50\pi \approx 157\ \mathrm{mm}$.

ITA 1984, Questão 18: Determinar, graficamente, a altura referida ao lado AB de um triângulo ABC, conhecendo-se o valor das medianas M_B e M_C, bem como o comprimento do lado BC.

- M_B = 90 mm; M_C = 60 mm; BC = 63 mm.

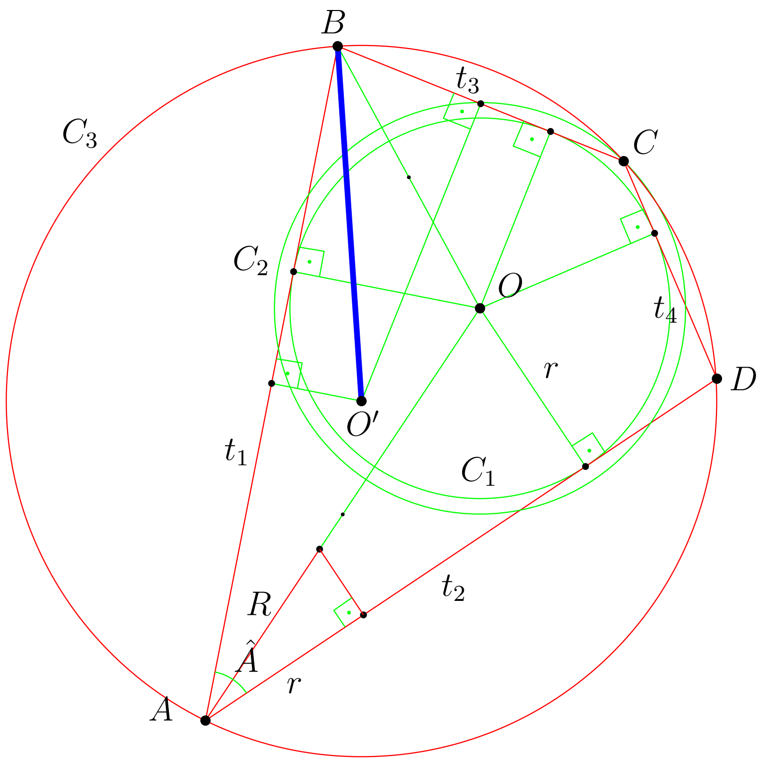


ITA 1984, Questão 18: Solução - (E) 51 mm.

Construção: (i) Marque os pontos B', B, C e C' colineares, nesta ordem, tais que $B'B = CC' = \frac{BC}{2}$; (ii) Trace as circunferências $C_1 \equiv \mathcal{C}(B', M_B)$ e $C_2 \equiv \mathcal{C}(C, M_C)$, cuja interseção é o ponto M_c médio de AB; (iii) Determine a altura h desejada de C relativa a BM_c; (iv) (opcional) Trace as circunferências $C_3 \equiv \mathcal{C}(B, M_B)$ e $C_4 \equiv \mathcal{C}(C', M_C)$, cuja interseção é o ponto M_b médio de AC; (v) (opcional) Prolongue BM_c e CM_b, cuja interseção é o vértice A.

Justificativa: Pela construção, $B'M_c = BM_b = M_B$, $C'M_b = CM_c = M_C$, de forma que $M_cM_b \parallel BC$ e $M_cM_b = \frac{BC}{2}$. Logo, M_cM_b é a base média do triângulo relativa ao lado BC.

ITA 1984, Questão 19: Construir um quadrilátero $ABCD$ que seja inscritível e tal que nele seja inscrita uma circunferência de centro O e raio r (25 mm). Determinar o raio da circunferência que circunscreve o quadrilátero, sabendo-se que seu lado AB mede 90 mm.

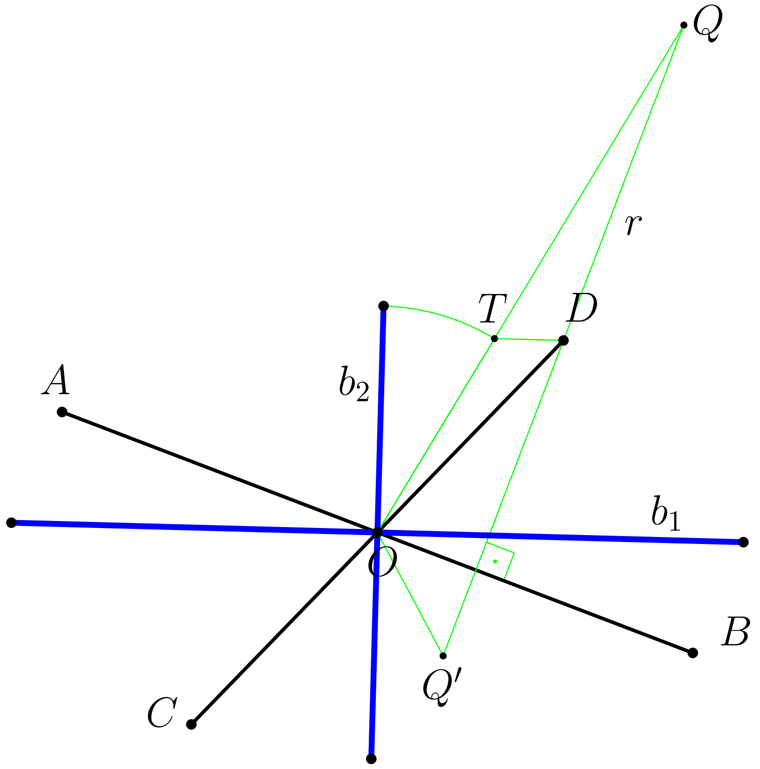


ITA 1984, Questão 19: Solução - (B) 47 mm.

Construção: (i) Trace a circunferência $C_1 \equiv \mathcal{C}(O, r)$; (ii) Trace as tangentes t_1 e t_2 a C_1 por A, definindo o ângulo $\hat{A}$, e marque sobre t_1 o vértice B tal que $AB = 90$ mm; (iii) Trace a outra tangente t_3 por B a C_1; (iv) Trace o triângulo retângulo de ângulo $\frac{\hat{A}}{2}$ e cateto adjacente r, determinando a hipotenusa R; (v) Trace a circunferência $C_2 \equiv \mathcal{C}(O, R)$, cuja interseção com o prolongamento de t_3 é o vértice C; (vi) Trace as mediatrizes dos lados AB e BC, cuja interseção é o centro O' da circunferência C_3 circunscrita ao quadrilátero; (vii) (opcional) Trace a tangente t_4 por C a C_1, cua interseção com t_2 é o vértice D.

Justificativa: O quadrilátero $ABCD$ é inscritível (e, diga-se de passagem, também circunscritível). Logo, seus lados são tangentes à circunferência C_1 e o vértice C vê o círculo C_1 sob um ângulo $\hat{C} = (180^{\text{o}} - \hat{A})$. Logo, $CO = \frac{r}{\cos \hat{A}}$, valor este determinado no passo (iv) da construção acima.

ITA 1984, Questão 20: As retas AB e CD são diâmetros conjugados de uma elipse. Determinar o valor de seus diâmetros maior e menor.



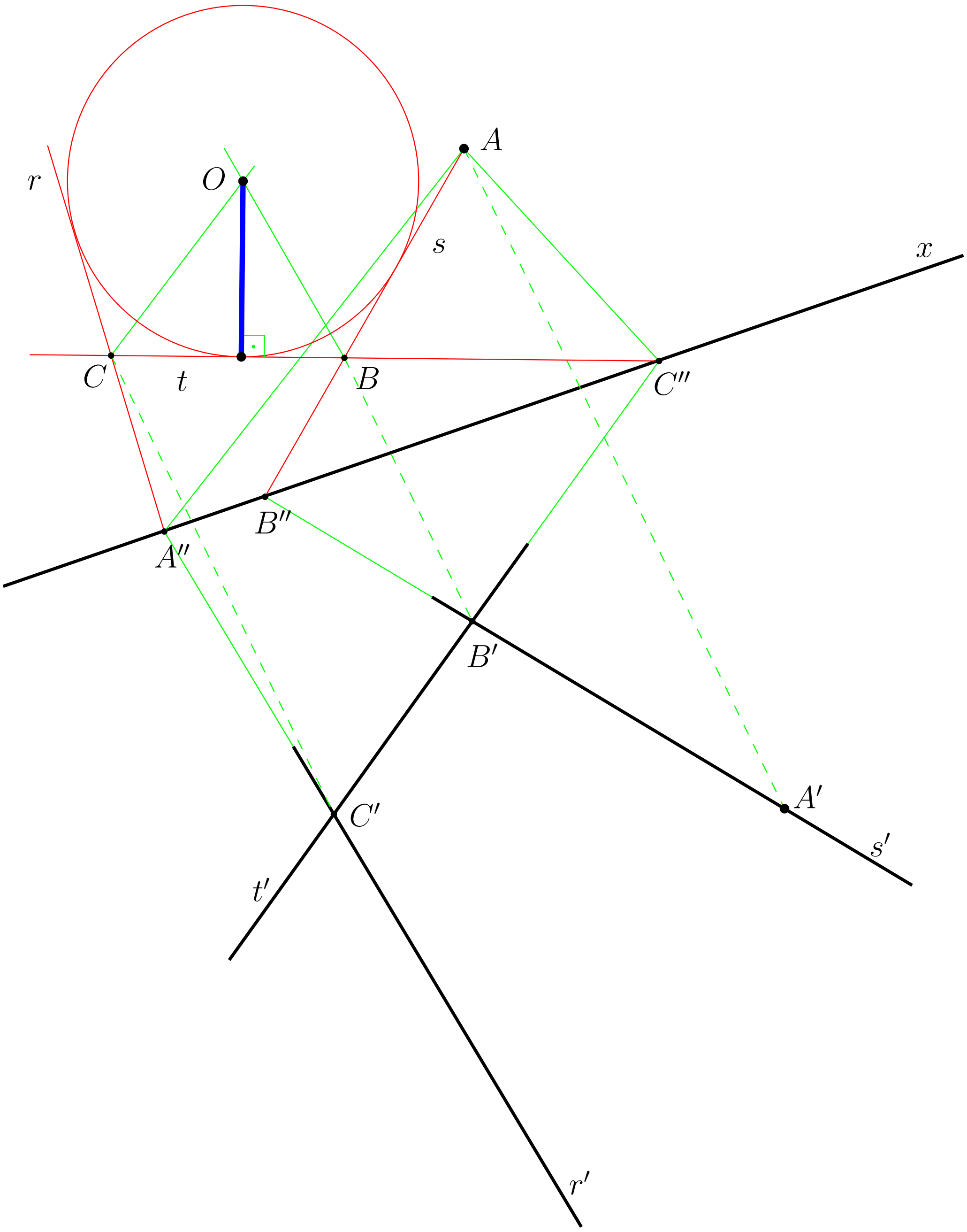
ITA 1984, Questão 20: Solução - (C) 96 mm e 57 mm.

Construção: (i) Trace por D uma perpendicular r a AB, determinando sobre r os pontos Q e Q', tais que $DQ = DQ' = AO$, onde O é a interseção de AB e CD; (ii) Trace as bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados pelas retas OQ e OQ', determinando as direções dos eixos da elipse; (iii) Trace por D uma paralela a b_1, determinando o ponto T sobre OQ tal que TQ e OT são os comprimentos dos semi-eixos da elipse.

Justificativa: Ver [11], p. 230.

III.9 Soluções de 1983

ITA 1983, Questão 16: As retas r', s' e t' são figuras afins das retas r, s e t. Determinar o raio da circunferência tangente às retas r, s e t, sabendo-se que os pontos A e A' são pontos afins e x é o eixo de afinidade.



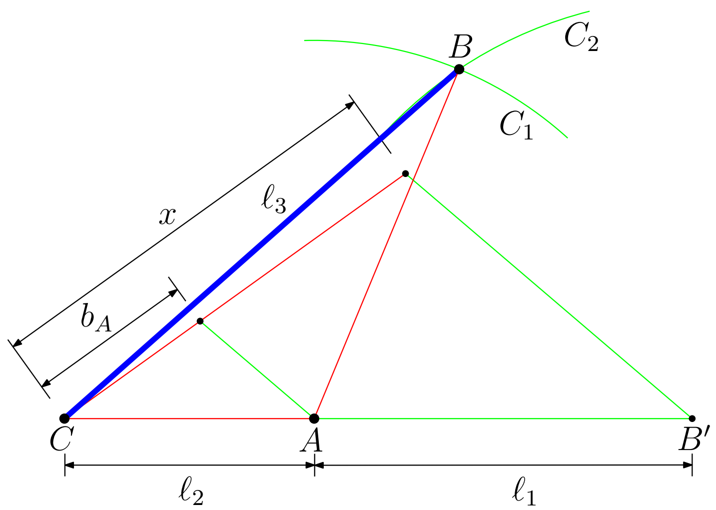
ITA 1983, Questão 16: Solução - (B) 25 mm.

Construção: (i) Sejam as interseções B', de s' com t', e C', de r' com t'; (ii) Prolongue r', s' e t', cujas interseções com a reta x são os pontos A'', B'' e C'', respectivamente; (iii) A reta s é determinada por AB'', cuja interseção com uma paralela por B' a AA' é o ponto B; (iv) A reta t é determinada por BC'', cuja interseção com uma paralela por C' a AA' é o ponto C; (v) A reta r é determinada por CA''; (vi) Trace as bissetrizes dos ângulos obtusos entre r e t em C e entre s e t em B, determinando o centro O da circunferência desejada.

Justificativa: A transformação de afinidade de pontos se dá por retas paralelas a AA', que são pontos afins. As interseções de r', s' e t' com o eixo de afinidade x pertencem às respectivas retas afins r, s e t. As interseções de r', s' e t' entre si se transformam nas interseções de r, s e t. Assim, determinamos as retas s, t e r, nesta ordem. O centro da circunferência tangente a r, s e t está sobre as bissetrizes dos ângulos formados por estas três retas.

ITA 1983, Questão 17: Determinar o comprimento aproximado do lado oposto ao vértice A de um triângulo qualquer, sendo dados os lados ℓ_1 e ℓ_2 que definem o vértice A. É conhecido também o comprimento da bissetriz b_A, de origem em A.

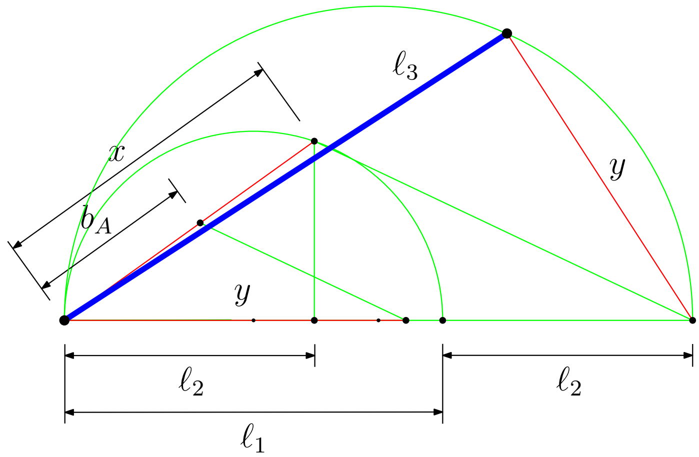
- ℓ_1 = 50 mm ℓ_2 = 33 mm b_A = 22 mm



ITA 1983, Questão 17: Solução I (geométrica; baseada em solução do Curso ETAPA) - (B) 70 mm.

Construção I (geométrica; baseada em solução do Curso ETAPA): (i) Determine os pontos C, A e B', colineares e com A entre C e B', tais que $CA = \ell_2$ e $AB' = \ell_1$; (ii) Determine a quarta proporcional de $\ell_2 : b_A = (\ell_1 + \ell_2) : x$; (iii) Trace os círculos $C_1 \equiv \mathcal{C}(A, \ell_1)$ e $C_2 \equiv \mathcal{C}(B', x)$, cuja interseção define o vértice B.

Justificativa I (geométrica; baseada em solução do Curso ETAPA): No triângulo original ΔABC, seja $\hat{A} = 2\alpha$, de forma que na figura-solução tenhamos o ângulo externo $B'\hat{A}B = (180^o - 2\alpha)$. Da construção acima, o triângulo $\Delta ABB'$ é isósceles e tal que $A\hat{B'}B = A\hat{B}B' = \alpha$, de forma que BB' é paralelo à bissetriz b_A no triângulo ΔABC. Com isto, $\ell_2 : b_A = (\ell_1 + \ell_2) : BB'$, e o vértice B pode ser determinado já que são conhecidas as distâncias AB e BB'.



ITA 1983, Questão 17: Solução II (algébrica) - (B) 70 mm.

Construção II (algébrica): (i) Determine a média proporcional $x = \sqrt{\ell_1\ell_2}$; (ii) Determine a quarta proporcional $x : b_A = (\ell_1 + \ell_2) : y$; (iii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa $(\ell_1 + \ell_2)$ e cateto y, determinando o outro cateto ℓ_3.

Justificativa II (algébrica): Pelos Teoremas das Bissetrizes e de Stewart, têm-se

$$\begin{cases} \frac{m}{\ell_1} = \frac{n}{\ell_2} = \frac{m+n}{\ell_1+\ell_2} = \frac{\ell_3}{\ell_1+\ell_2} \Rightarrow m = \frac{\ell_3\ell_2}{\ell_1+\ell_2} \text{ e } n = \frac{\ell_3\ell_1}{\ell_1+\ell_2} \\ \ell_1^2 m + \ell_2^2 n = (mn + b_A^2)\ell_3 \end{cases}$$

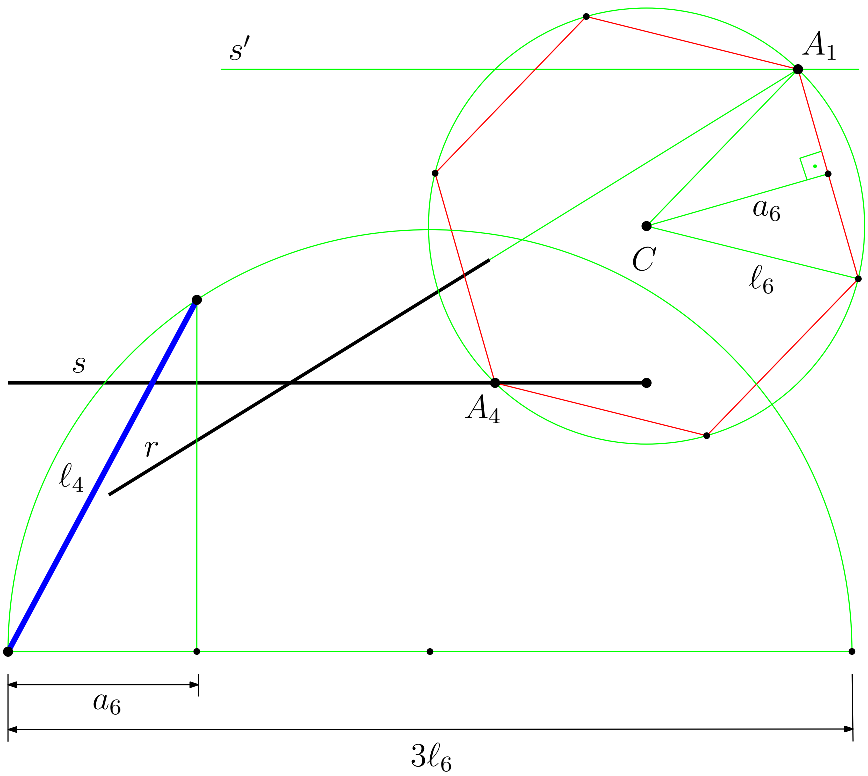
Logo,

$$\frac{\ell_1^2\ell_3\ell_2}{\ell_1+\ell_2} + \frac{\ell_2^2\ell_3\ell_1}{\ell_1+\ell_2} = \left[\frac{\ell_3^2\ell_1\ell_2}{(\ell_1+\ell_2)^2} + b_A^2\right]\ell_3$$

e então

$$\ell_3 = (\ell_1+\ell_2)\sqrt{1 - \frac{b_A}{\ell_1\ell_2}} = (50+33)\sqrt{1 - \frac{22^2}{50 \times 33}} \approx 70 \text{ mm}$$

ITA 1983, Questão 18: São dadas as retas r e s e um ponto C. Construir um hexágono regular, tal que tenha o ponto C como centro da circunferência circunscrita e dois vértices opostos do hexágono estão um sobre a reta r e outro sobre a reta s. Determinar graficamente o lado do quadrado de área equivalente à do hexágono.



ITA 1983, Questão 18: Solução - (E) 50 mm.

Construção: (i) Trace a reta s' paralela a s de modo que o ponto C seja equidistante de s' e s, determinando sobre a reta r um vértice A_1 do hexágono de lado $\ell_6 = CA_1$; (ii) Determine a média proporcional ℓ_4 do semi-perímetro $p_6 = 3\ell_6$ e do apótema a_6 do hexágono.

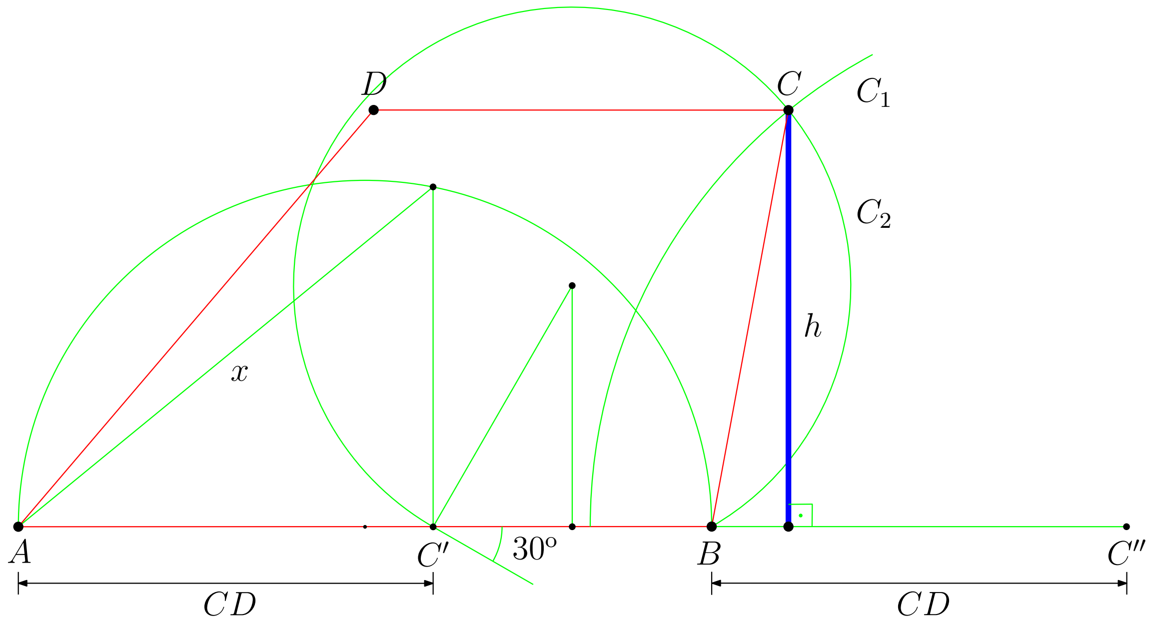
Justificativa: Como A_1 e A_4 são opostos, por simetria C é médio de A_1A_4. Logo, a reta s' é lugar geométrico de A_1, assim como a reta r, o que determina o vértice A_1. Por equivalência de áreas, tem-se $\ell_4^2 = p_6 a_6$, ou seja

$$\ell_4 = \sqrt{3\ell_6.a_6}$$

sln: Minha construção deu de fato $\ell \approx 53$ mm.

ITA 1983, Questão 19: Determinar graficamente a altura do trapézio $ABCD$, conhecendo-se:

- Base AB = 92 mm;   Base CD = 55 mm.
- A diagonal BD é média proporcional dos segmentos AB e CD.
- O ponto E é o ponto de concurso das retas suportes dos lados AD e BC e o ângulo $A\hat{E}B = 30^{\text{o}}$.
- Identificação dos pontos A, B, C e D no sentido anti-horário.

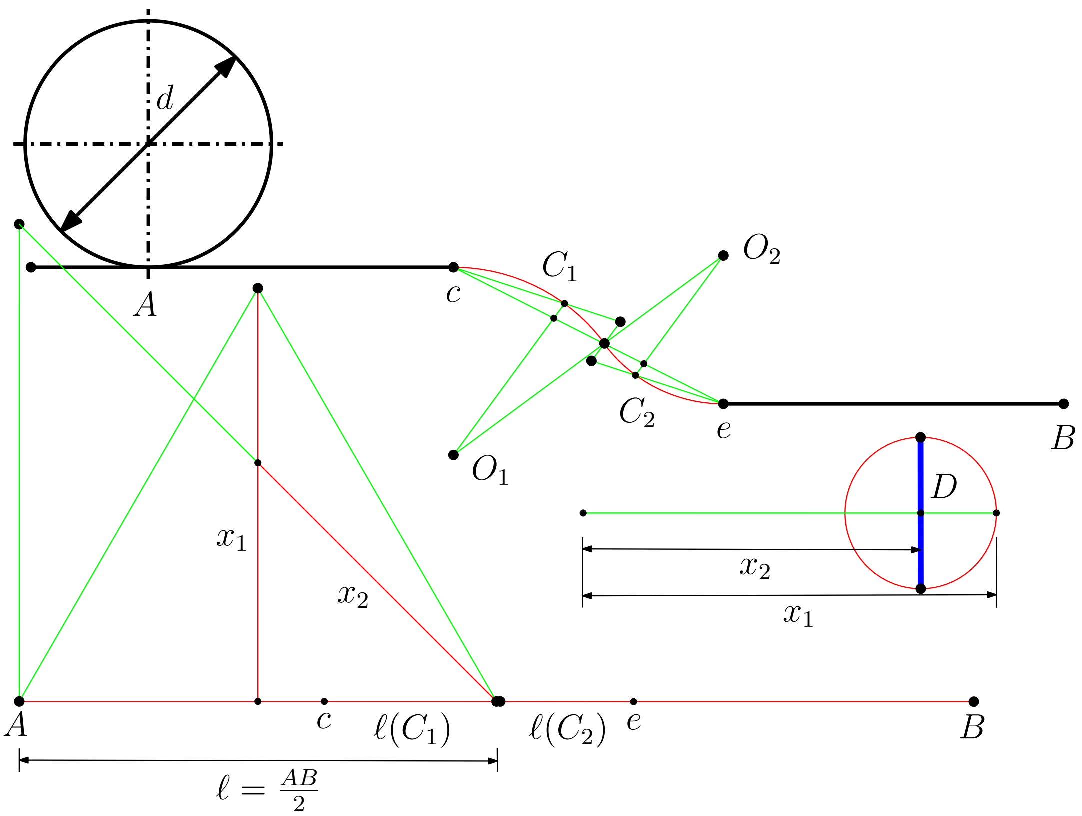


ITA 1983, Questão 19: Solução - (D) 55mm.

Construção: (i) Marque os pontos A, C', B e C'', nesta ordem, colineares e tais que $AC' = BC'' = CD$; (ii) Determine a média proporcional $x = BD = \sqrt{AB.CD}$; (ii) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(C'', x)$; (iii) Trace o arco-capaz C_2 do ângulo de 30º relativo à corda $C'B$, cuja interseção com o círculo C_1 é o vértice C do trapézio; (iv) Determine a altura desejada h de C relativa à base AB; (v) (opcional) Marque a distância CD à esquerda de C, paralelamente a AB, para determinar o vértice D.

Justificativa: Como $AC' = CD$ e $AC' \parallel CD$, então $AC'CD$ formam um paralelogramo, de modo que $C'\hat{C}B = A\hat{E}B = 30^{\text{o}}$. Além disto, como $BC'' = CD$ e $BC'' \parallel CD$, então $BC''CD$ também formam um paralelogramo, de modo que $C''C = BD$, o que permite determinar o vértice C.

ITA 1983, Questão 20: Uma roda de diâmetro d está em repouso, apoiada sobre a semi-reta de origem c, no ponto A. Em dado instante é posta em movimento, girando, sem deslizar, até atingir o ponto B, onde pára. Sabendo-se que os pontos c e e são ligados por dois arcos de circunferência, de centros O_1 e O_2 e considerando que a roda, para completar o trajeto, deu duas voltas completas, determinar o valor aproximado de seu diâmetro. A solução terá que ser inteiramente gráfica.



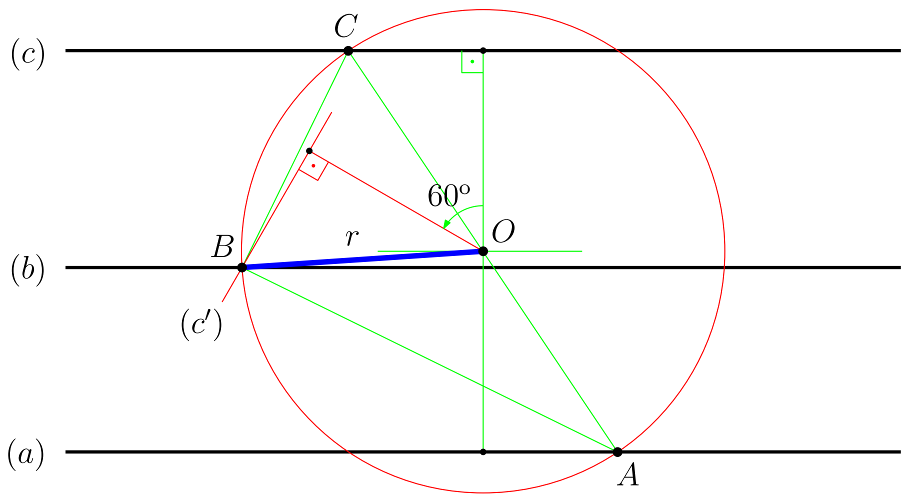
ITA 1983, Questão 20: Solução - (C) 20 mm.

Construção: (i) Trace o arco C_1 de centro em O_1 e raio O_1c do ponto c ao segmento O_1O_2; (ii) Trace o arco C_2 de centro em O_2 e raio O_2e do segmento O_1O_2 ao ponto e; (iii) Retifique os arcos C_1 e C_2, usando, por exemplo, o método de d'Ocagne ([1], pp. 63–65), determinando o comprimento total AB; (iv) Determine o círculo cujo comprimento é $\ell = \frac{AB}{2}$ ([2], Exercício 4.4).

Justificativa: Os arcos devem concordar no ponto pertencente ao segmento O_1O_2. O diâmetro D do círculo de comprimento $\ell \approx (\sqrt{3}+\sqrt{2})D$ pode ser determinado por $D \approx 2(x_1 - x_2)\ell$, com $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$ e $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell$.

III.10 Soluções de 1982

ITA 1982, Questão 16: As retas a, b e c são lugares geométricos de três pontos, respectivamente, A, B e C, que pertencem a uma circunferência. Sabendo-se que nesta circunferência o arco AB mede 120º e o arco BC mede 60º, pergunta-se qual o valor de seu raio.

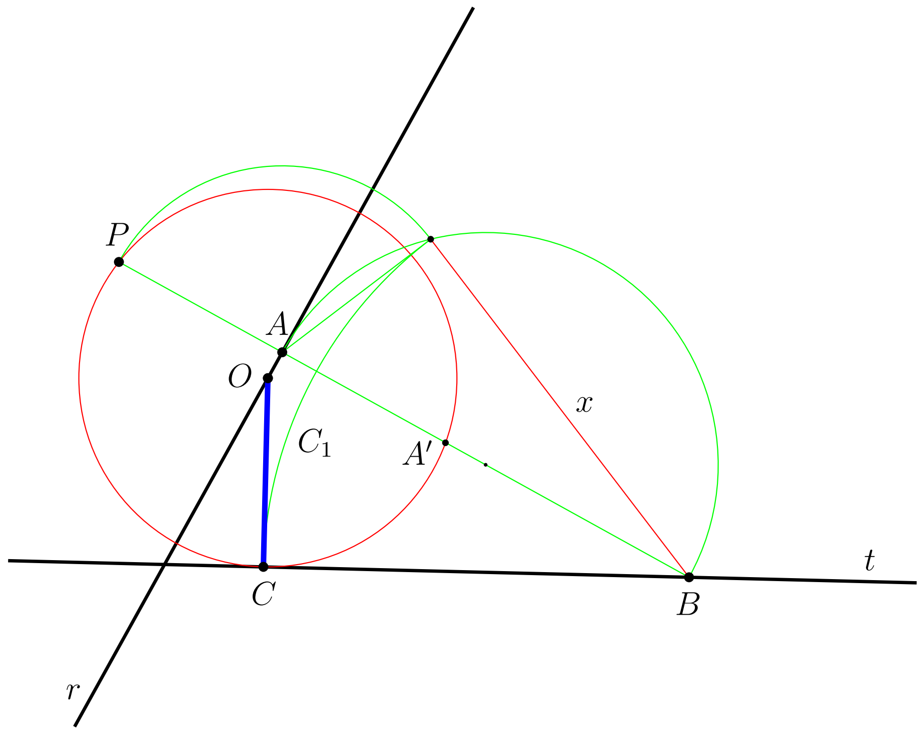


ITA 1982, Questão 16: Solução - (A) 32 mm.

Construção: (i) Trace a reta equidistante das retas a e c e tome um ponto O qualquer sobre esta reta; (ii) Determine a rotação $c' = R_{O,60^{\circ}}(c)$ da reta c de um ângulo de 60° em torno de O, cuja interseção com a reta b é o vértice B, determinando o raio desejado $r = OB$.

Justificativa: Como $A\hat{O}B = 120^{\circ}$ e $B\hat{O}C = 60^{\circ}$, então $A\hat{O}C = 180^{\circ}$ e o ponto O é médio de AC. Com isto, o ponto B pode ser obtido pela rotação do ponto C de 60° em torno de O. O raio r desejado pode ser determinado por $r = OB = OC = OA = BC$.

ITA 1982, Questão 17: São dadas duas retas r e t e um ponto P. Determinar o raio da circunferência que passa por P, é tangente à reta t, sendo a reta r o lugar geométrico do centro O.



ITA 1982, Questão 17: Solução - (D) 25 mm.

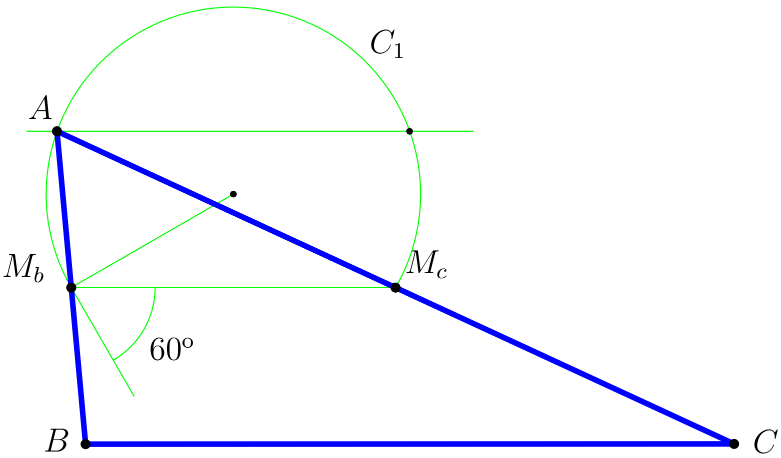
Construção: (i) Trace por P uma perpendicular à reta r, determinando os pontos A em r e B em t; (ii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa AB e cateto PA, determinando o outro cateto x; (iii) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(B, x)$, cujas interseções com a reta t são os pontos C e C'; (iv) Trace por C uma perpendicular à reta t, cuja interseção com r é o centro O da circunferência desejada.

Justificativa: A potência do ponto B em relação à circunferência solução é

$$BC^2 = BA'.BP = (BA - AA')(BA + AP) = BA^2 - AP^2$$

pois $AA' = PA$, sendo A' a interseção de BP com a circunferência solução, já que PA' é ortogonal à r. A equação anterior, determina a posição do ponto C.
sln: Na verdade, há uma segunda solução gerada pelo ponto C'.
sln: Outra solução seria marcar A', entre P e B e tal que $AA' = PA$, e calcular diretamente $BC = \sqrt{BA'.BP}$.

ITA 1982, Questão 18: M_b e M_c são, respectivamente, os pontos médios dos lados b e c de um triângulo ABC. Sabendo-se que o ângulo do vértice A é igual a 60° e que a altura conduzida deste mesmo vértice A mede 42 mm, pergunta-se o valor do perímetro do triângulo.



ITA 1982, Questão 18: Solução - (E) 227.

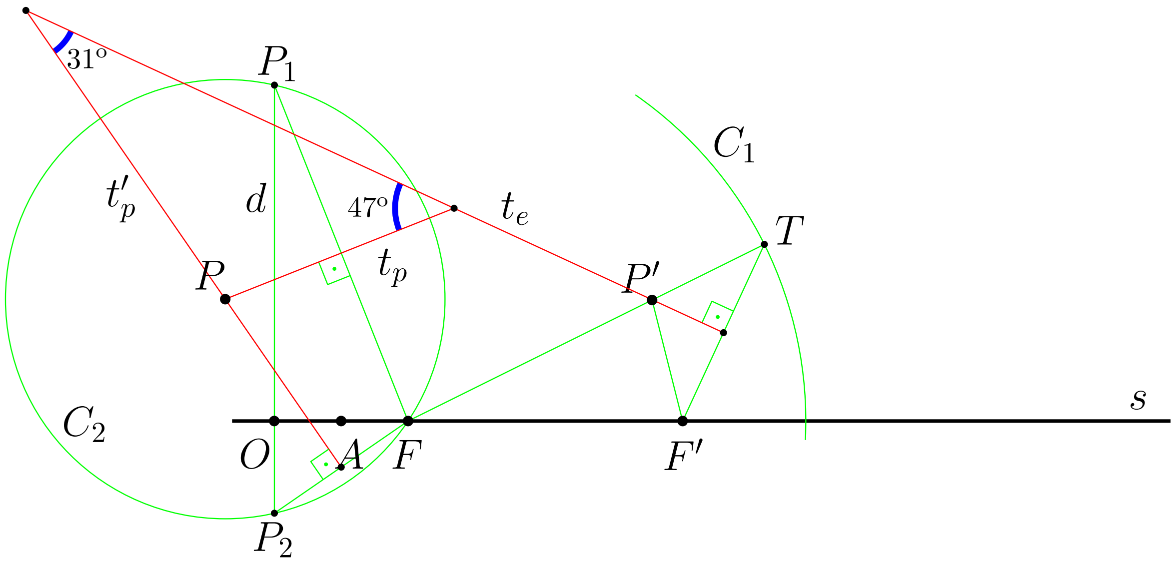
Construção: (i) Trace o arco-capaz C_1 do ângulo $\hat{A} = 60^o$ relativo á corda M_bM_c; (ii) Trace uma paralela a M_bM_c a uma distância $\frac{h_a}{2} = 21$ mm, cuja interseção com o círculo C_1 é o vértice A; (iii) Prolongue AM_b e AM_c e determine os vértices B e C tais que $M_bB = AM_b$ e $M_cC = AM_c$.

Justificativa: O segmento M_bM_c é a base média do triângulo desejado, com isto M_bM_c é paralelo a BC e A está a uma altura $\frac{h_a}{2}$ de M_bM_c.

ITA 1982, Questão 19: São dados do problema:

- O ponto P' pertence a uma elipse.
- O ponto F é, simultaneamente, foco desta elipse e de uma parábola.
- A reta s é suporte do eixo da elipse e do eixo da parábola.
- O ponto F' é o outro foco da elipse.
- O ponto A é o vértice da parábola.

Pede-se o menor ângulo formado pela tangente à parábola, passando pelo ponto P, e a tangente à elipse, passando pelo ponto P'.



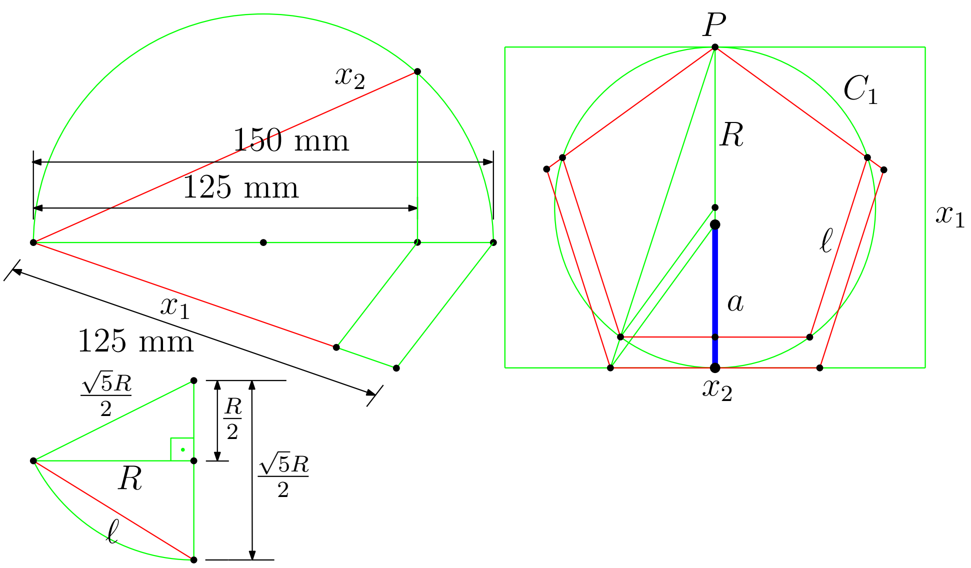
ITA 1982, Questão 19: Sem Solução.

Construção: (i) Trace $C_1 \equiv (F, 2a)$, onde $2a = (FP' + P'F')$; (ii) Estenda FP', cuja interseção com C_1 é o ponto T; (iii) Trace a mediatriz de $F'T$, que é a tangente t_e à elipse por P'; (iv) Trace a perpendicular d a s, pelo ponto O tal que A seja médio de OF; (v) Trace $C_2 \equiv (P, PF)$, cujas interseções com a reta d são os pontos P_1 e P_2; (vi) As mediatrizes t_p e t'_p de FP_1 e FP_2, respectivamente, são tangentes à parábola por P.

Justificativa: Para a elipse, como T, sobre a extensão de FP', pertence ao círculo diretor C_1, de centro F, então a mediatriz t_e de $F'T$ é tangente à elipse por P'. Para a parábola, se P_i é ponto da diretriz d, então a mediatriz de FP_i é tangente à parábola. Para que esta tangente passe por P, o ponto P_i deve ser tal que $PF = PP_i$. Assim, P_i é determinado em d pelo círculo C_2.
sln: Há duas tangentes à parábola por P. Com isto, a questão fica indeterminada e deveria ser anulada. Na minha construção, os ângulos entre as tangentes não têm opções de respostas correspondentes.

ITA 1982, Questão 20: A um ajustador mecânico é fornecida uma chapa de aço, retangular. Pede-se o apótema do maior pentágono que pode ser riscado nesta chapa, sabendo-se que as dimensões desta são, respectivamente, a 3ª proporcional e a média proporcional dos valores 150 mm e 125 mm. A resposta deverá ser indicada na escala 1:2,5.

Construção: (i) Determine a terceira proporcional $150 : 125 = 125 : x_1$ e a média proporcional $x_2 = \sqrt{150.125}$, e esboce a chapa retangular de dimensões $x_1 \times x_2$; (ii) Trace um círculo C_1, de raio R qualquer e tangente a um lado de comprimento x_2 em seu ponto médio P; (iii) Construa o pentágono regular inscrito em C_1, de lado $\ell = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R$ ([2], Exercício 2.25) e com um vértice em P; (iv) Determine, por homotetia de centro P, o pentágono desejado de apótema a máximo.

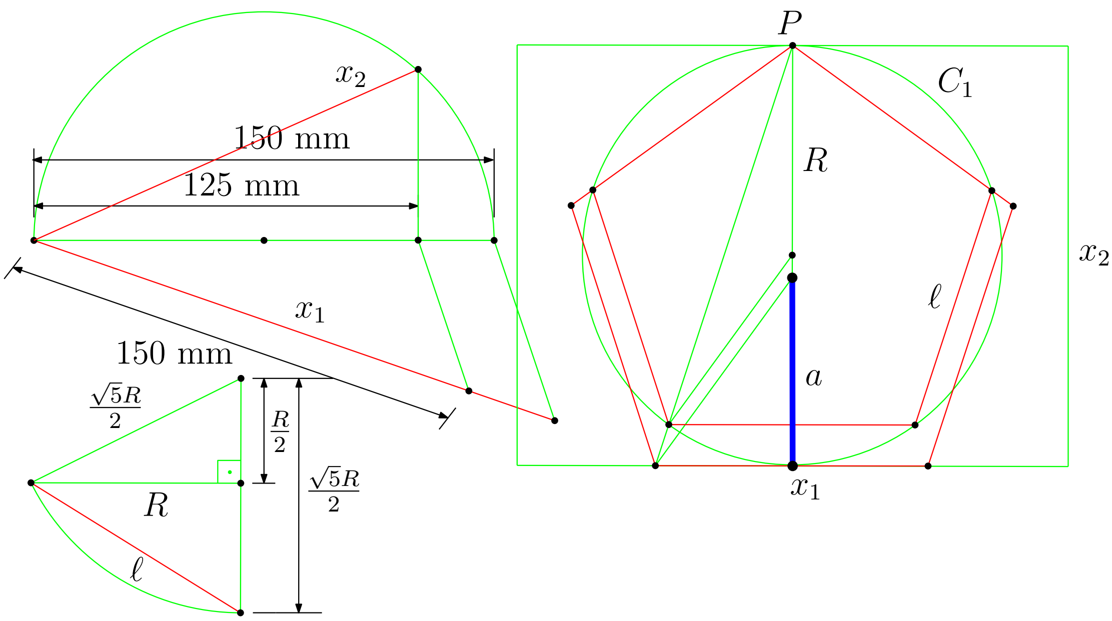


ITA 1982, Questão 20: Solução - (?).

Justificativa: A digonal d e a altura $h = (R + a)$, onde a é o apótema do pentágono regular, são tais que

$$\begin{cases} d = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell \\ h = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\,\ell \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{h} < \frac{x_2}{x_1}$$

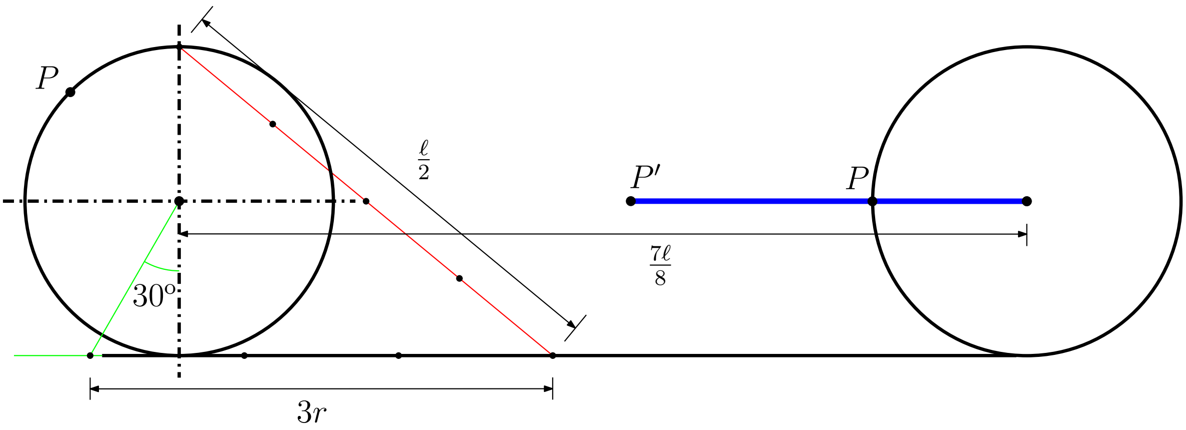
Logo, o aspecto limitante será a altura h, e não a largura d, do pentágono.
sln: O problema não apresenta opção de resposta adequada. Considerando x_1 como a terceira proporcional de 125 mm e 150 mm, ou seja, fazendo $125 : 150 = 150 : x_1$, e repetindo a construção acima, tem-se $a = 25$ mm. Este valor, porém, deveria ser escalado para obter a resposta adequada.



ITA 1982, Questão 20 (modificada): Solução - (C) 25 mm.

III.11 Soluções de 1981

ITA 1981, Questão 16: São dados uma circunferência de raio igual a 20 mm, um ponto P na mesma, um ponto P' distante de seu centro e uma reta r, como mostra a figura abaixo. Rolando a circunferência sem escorregar sobre a reta, partindo do ponto P, desenvolver 315° no sentido horário. Determinar a distância do centro da circunferência até o ponto P', quando a mesma completar o ângulo dado.



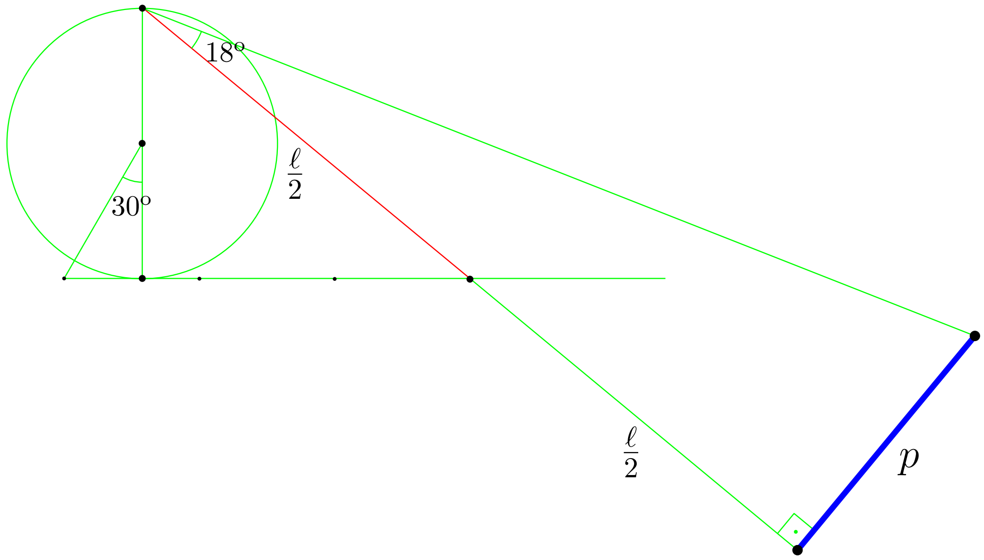
ITA 1981, Questão 16: Solução - (?).

Construção: (i) Retifique a semi-circunferência, determinando o comprimento $\frac{\ell}{2}$; (ii) Marque a distância $\frac{7\ell}{8}$ a partir do centro da circunferência, determinando a nova posição deste ponto após o deslocamento da circunferência.

Justificativa: O ângulo de 315° corresponde a $\frac{7}{8}$ da circunferência completa, determinando o deslocamento do centro da circunferência e do ponto P, correspondentemente.
sln: O problema não apresenta opção de resposta adequada. Além disto, o ponto P indicado é inútil. Considerando que o problema pede a distância PP' após o deslocamento, a resposta é **(E) 33 mm**.

ITA 1981, Questão 17: Determinar graficamente o avanço de um parafuso, por volta, conhecendo-se:

- Ângulo da hélice da rosca igual a 18°.
- Diâmetro nominal do parafuso igual a 35 mm.



ITA 1981, Questão 17: Solução - (D) 36 mm.

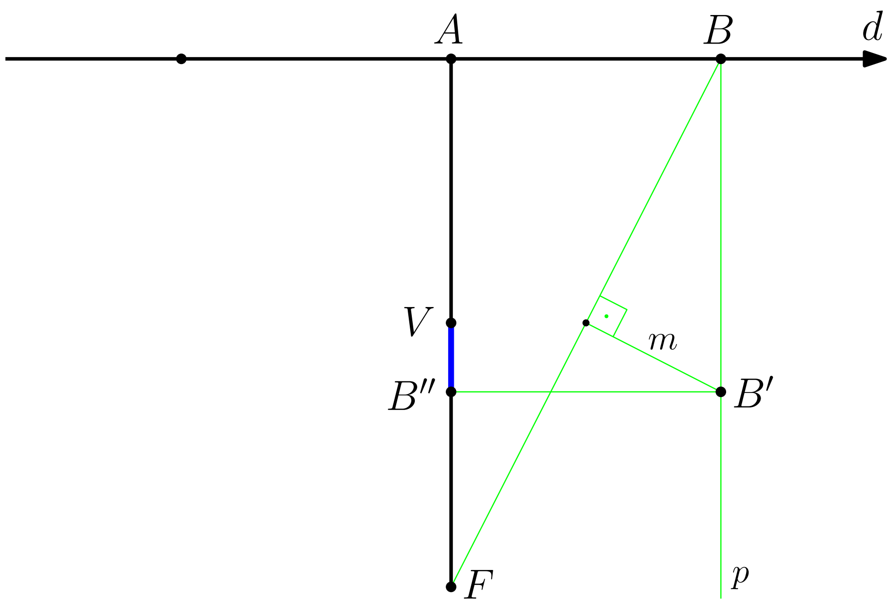
Construção: (i) Retifique o círculo de diâmetro $D = 35$ mm, obtendo o comprimento ℓ; (ii) Trace o triângulo retângulo de cateto ℓ e ângulo adjacente 18°, determinando o cateto oposto p, que é o passo desejado.

Justificativa: Algebricamente, o passo p é dado por

$$p = \pi D \mathrm{tg}\theta = \pi\, 35 \mathrm{tg} 18^{\circ} = 35{,}7 \text{ mm}$$

ITA 1981, Questão 18: Um projétil é lançado com uma velocidade inicial V_0 formando um ângulo de 30^o com a horizontal, descrevendo um movimento parabólico. Determinar graficamente (valor aproximado) a altura máxima atingida pelo projétil, sendo dados:

- AB: 6800 metros (metade do alcance do projétil).
- F: foco da parábola.
- d: diretriz da parábola.
- Escala: 1 cm = 2000 metros.

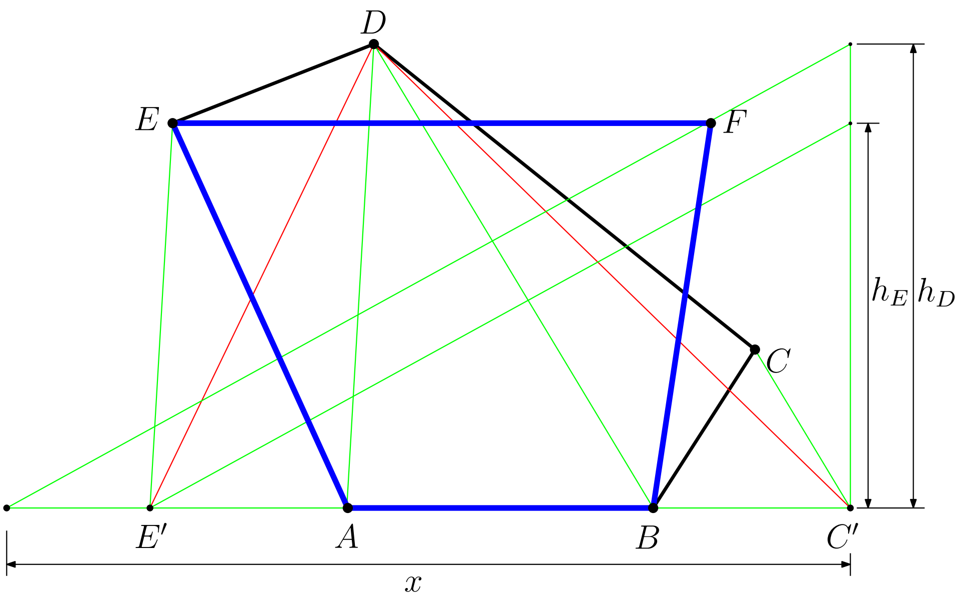


ITA 1981, Questão 18: Solução - (B) 2000 m (?).

Construção: (i) Determine o vértice V, ponto médio de FA; (ii) Trace por B a perpendicular p a d, cuja interseção com a mediatriz m de FB é o ponto B' da parábola; (iii) Projete B' sobre FA, determinando o ponto B'', que define a altura VB'' desejada.

Justificativa: Pela definição de parábola, o ponto de abscissa B pertence à mediatriz de FB.
sln: A informação do ângulo inicial de 30^o não foi utilizada e a resposta encontrada corresponde a 1800 m.

ITA 1981, Questão 19: Determinar o perímetro do trapézio de bases AB e EF equivalente ao pentágono $ABCDE$.



ITA 1981, Questão 19: Solução - (E) 220 mm.

Construção: (i) Trace por E uma paralela a AD, cuja interseção com reta suporte de AB é o ponto E'; (ii) Trace por C uma paralela a BD, cuja interseção com reta suporte de AB é o ponto C'; (iii) Determine a quarta proporcional de $h_E : E'C' = h_D : x$, onde h_D e h_E são as respectivas alturas de E e D relativas ao lado AB; (iv) Marque a distância $EF = (x - AB)$ a partir do vértice E, determinando o vértice F do trapézio desejado.

Justificativa: As áreas dos triângulos ΔAED, $\Delta AE'D$, ΔBCD e $\Delta BC'D$ são tais que

$$\begin{cases} S_{AED} = S_{AE'D} = \frac{AE'.h_D}{2} \\ S_{BCD} = S_{BC'D} = \frac{BC'.h_D}{2} \end{cases} \Rightarrow S_{ABCDE} = S_{E'C'D} = \frac{E'C'.h_D}{2}$$

Já a área do trapézio desejado seria dada por

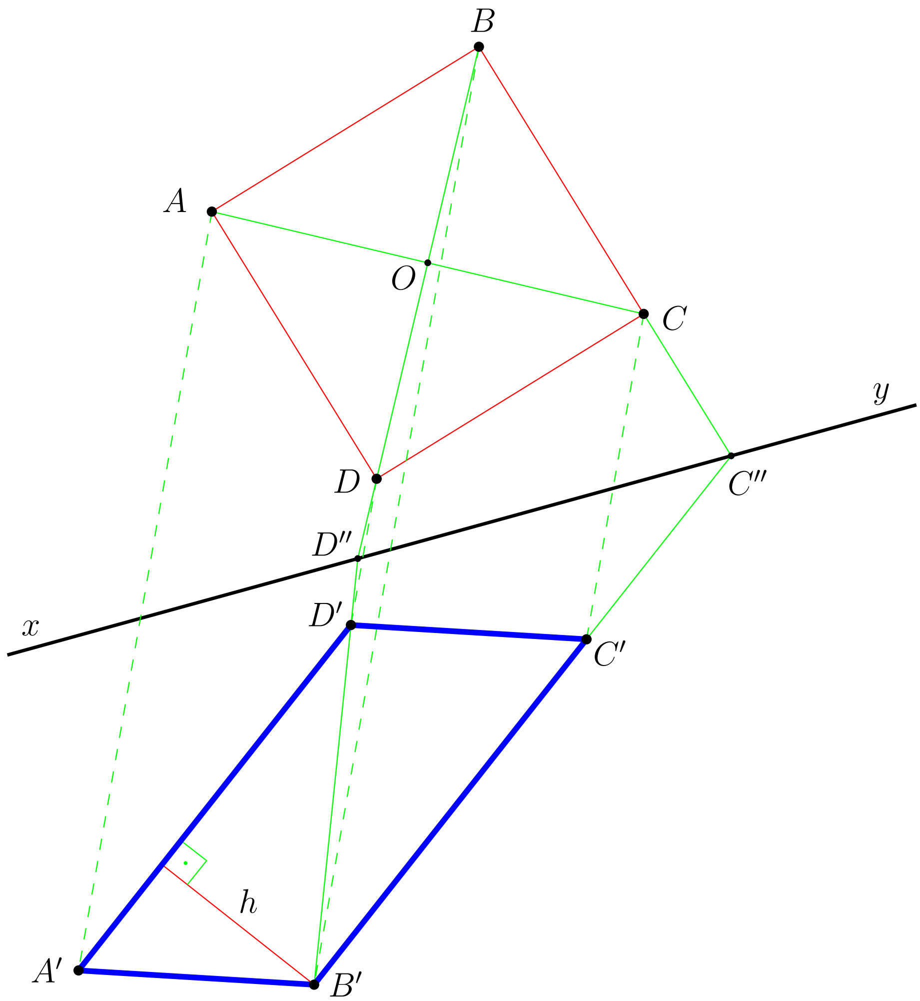
$$S_{ABEF} = \frac{(AB + EF)}{2} h_E$$

Fazendo-se $S_{ABCDE} = S_{ABEF}$, tem-se

$$\frac{h_E}{E'C'} = \frac{h_D}{AB + EF}$$

o que permite determinar a base EF do trapézio.

ITA 1981, Questão 20: Achar a área, em milímetros quadrados, da figura afim do quadrado $ABCD$ (sentido horário), do qual conhecemos sua diagonal AC e o ponto B', afim do vértice B. A reta xy é o eixo de afinidade.



ITA 1981, Questão 20: Solução - (D) 1530 mm^2.

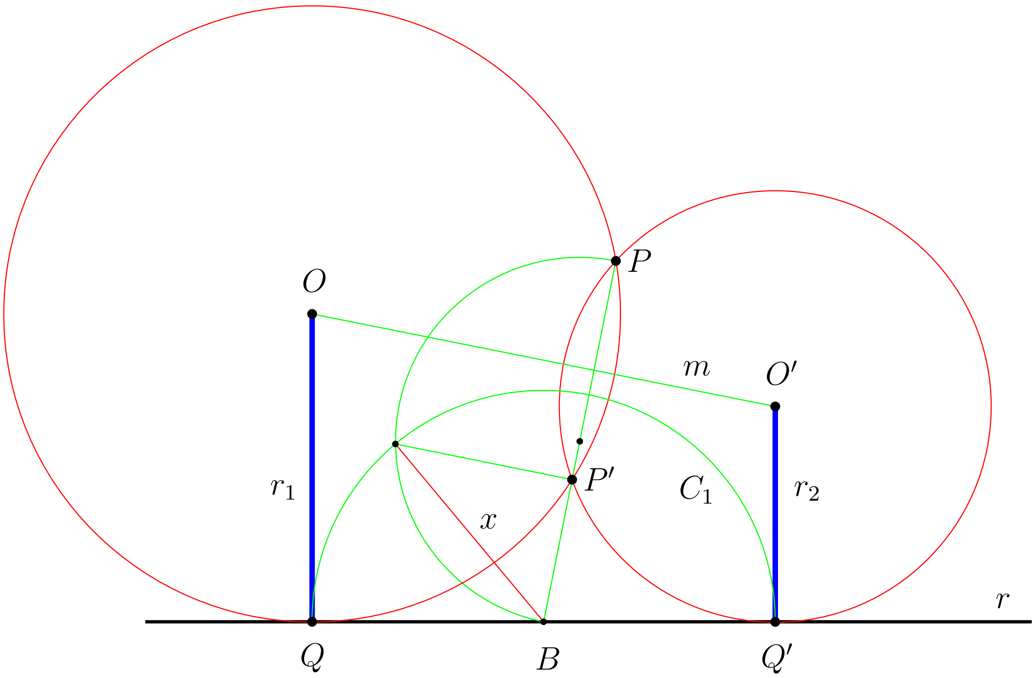
Construção: (i) Trace a mediatriz da diagonal AC do quadrado, marcando os extremos B e D tais que $OA = OB = OC = OD$, onde O é o ponto médio de AC; (ii) Prolongue BC e BD, cujas interseções com a reta r são os pontos C'' e D'', respectivamente; (iii) Trace $B'C''$ e $B'D''$, cujas interseções com as paralelas a BB' por C e D são os pontos C' e D', respectivamente; (iv) Trace por B' e D' retas paralelas a $C'D'$ e $B'C'$, respectivamente, cuja interseção é o ponto A'; (v) Determine a altura h de B' relativa ao lado $A'D'$.

Justificativa: A transformação afim leva pontos a suas imagens através de retas paralelas. Além disto, a transformação afim, mapeia retas em retas afins. Pontos pertencentes ao eixo de afinidade (no caso, C'' e D'') são mapeados em si mesmo. Logo, C' e D' pertencem aos respectivos mapeamentos das retas $B'C''$ e $B'D''$, de forma que CC' e DD' são paralelas a BB'. O ponto A' complementa o paralelogramo $A'B'C'D'$, afim do quadrado $ABCD$ e com área

$$S_{A'B'C'D'} = A'D'.h$$

III.12 Soluções de 1980

ITA 1980, Questão 16: São dados dois pontos (P, P') e uma reta (r). Determinar a soma dos raios das circunferências que contêm os pontos e são tangentes à reta.



ITA 1980, Questão 16: Solução I (geométrica) - (E) 69 mm.

Construção I (geométrica): (i) Trace a mediatriz m de PP'; (ii) Prolongue PP', determinando o ponto B sobre a reta r; (ii) Determine a média geométrica $x = \sqrt{BP.BP'}$; (iii) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(B, x)$, cujas interseções com a reta r são os pontos Q e Q'; (iv) Trace perpendiculares a r por Q e Q', cujas respectivas interseções com a mediatrz m são os pontos O e O', centros dos círculos de raios desejados $r_1 = OQ$ e $r_2 = O'Q'$.

Justificativa I (geométrica): Como P e P' pertencem a ambos os círculos, a potência do ponto B em relação aos dois círculos é a mesma e igual a $BP.BP'$. Com isto, o comprimento da tangente aos dois círculos por B é dado por $x = \sqrt{BP.BP'}$, o que permite determinar os pontos Q e Q' de tangência por B em ambos os círculos. Naturalmente, os centros dos círculos estão sobre as respectivas perpendiculares a r por estes pontos de tangência.
sln: Este problema tem uma solução algébrica que gera uma construção muito simples e interessante.

Construção II (algébrica): (i) Trace pelo ponto médio M de PP' a mediatriz m, cuja interseção com a reta r é o ponto A; (ii) Prolongue PP', determinando o ponto B sobre a reta r; (iii) Determine a quarta proporcional $AM : 2BM = AB : (r_1 + r_2)$.

Justificativa II (algébrica): Das semelhanças dos triângulos ΔABM, ΔAOQ, $\Delta AO'Q'$ e (onde os pontos A, B, O, O', Q, Q' e M foram definidos nas construções acima), tem-se

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AO}{OQ} = \frac{AO'}{O'Q'} \Rightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{AM + OM}{r_1} = \frac{AM - O'M}{r_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OM = \frac{AB.r_1 - AM.BM}{BM} \\ O'M = \frac{AB.r_2 - AM.BM}{BM} \end{cases}$$

Além disto, dos triângulos retângulos ΔOMP e $\Delta OM'P$, tem-se

$$\begin{cases} OM^2 = OP^2 - PM^2 = r_1^2 - PM^2 \\ O'M^2 = O'P^2 - PM^2 = r_2^2 - PM^2 \end{cases}$$

Usando estes valores de OM e $O'M$ nas equações anteriores, ambas tornam-se equações do tipo

$$AM^2.r_x^2 - 2AB.AM.BM.r_x + BM^2.AP^2 = 0$$

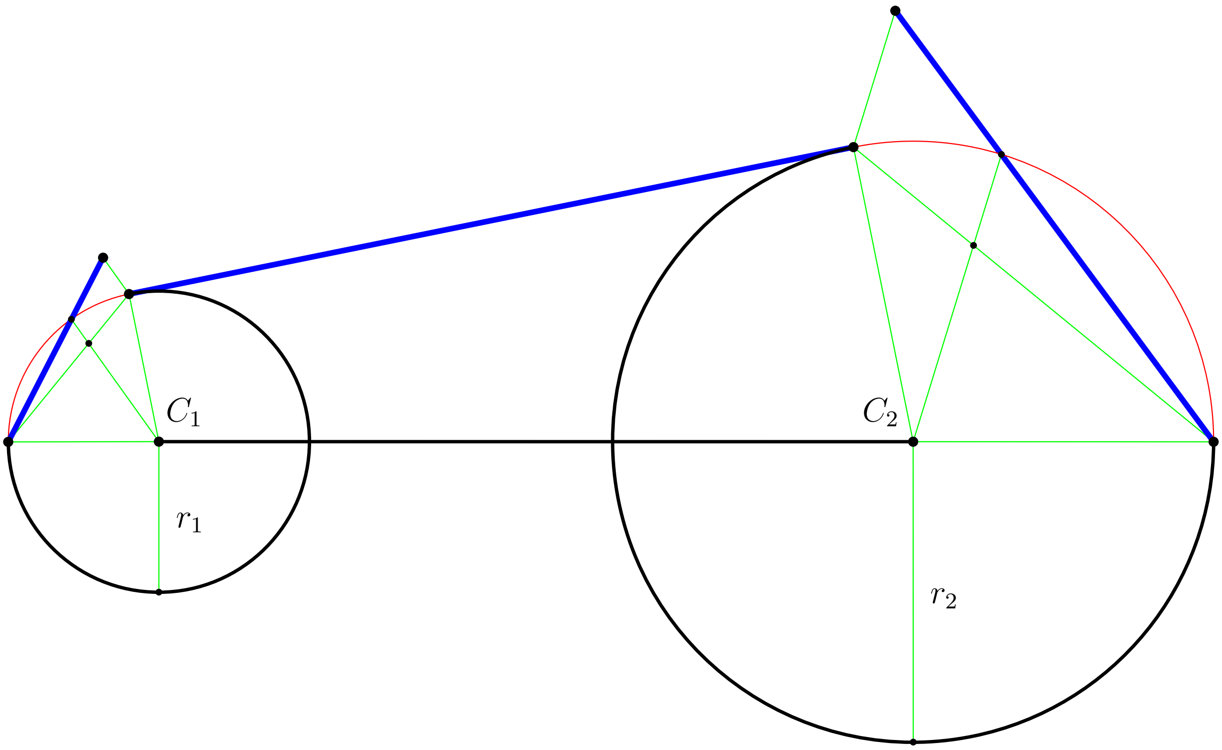
cuja soma das respectivas soluções é então dada por

$$(r_1 + r_2) = \frac{2AB.AM.BM}{AM^2} = \frac{2AB.BM}{AM}$$

ITA 1980, Questão 17: Um compressor centrífugo é acionado por um motor elétrico, sendo usada uma correia chata, suposta inteiramente tensa e de espessura desprezível. Sabendo-se que:

- A polia do motor é de raio r_1 e de centro C_1.
- A polia do compressor é de raio r_2 e de centro C_2.
- E que $r_1 = 200$ mm, $r_2 = 400$ mm, $C_1C_2 = 1000$ mm.

Pede-se determinar o comprimento real da correia, sendo a escala 1:10.

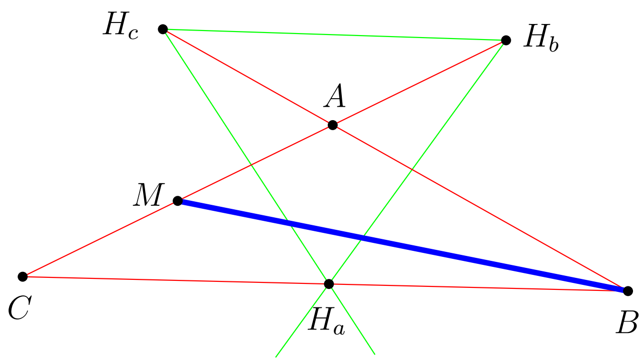


ITA 1980, Questão 17: Solução - (C) 3940 mm.

Construção: (i) Trace a tangente comum externa aos dois círculos dados ([2], Exercício 1.11(a)), determinando os pontos de tangência que delimitam os arcos da correia em cada círculo; (ii) Retifique os arcos, usando, por exemplo, o método de d'Ocagne ([1], pp. 63–65). Por simetria, trabalhamos apenas com a metade superior da correia.

Justificativa: O problema consiste em se determinar a correia, que é definida pela tangente comum externa aos dois círculos dados.

ITA 1980, Questão 18: Determinar o comprimento da mediana em relação ao vértice B de um triângulo ABC, do qual conhecemos os pés das alturas H_a, H_b e H_c, sabendo-se que o ângulo $\hat{A}$ é obtuso.

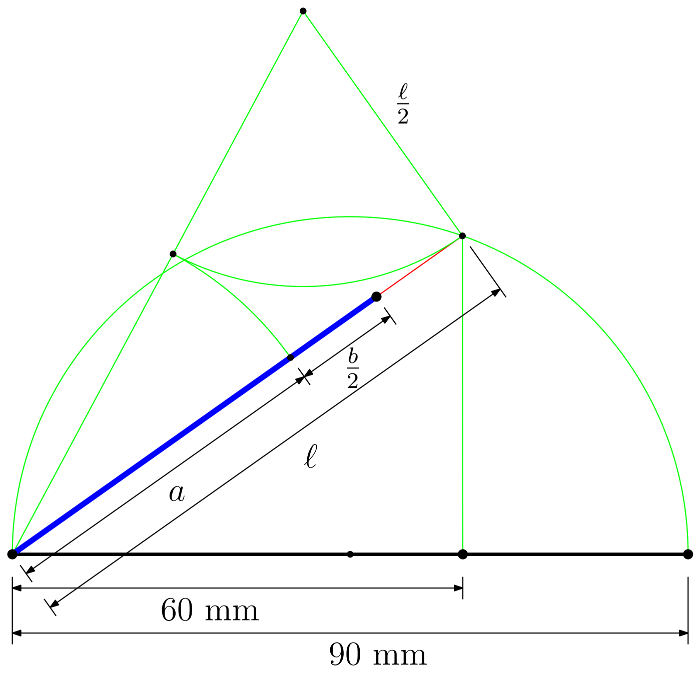


ITA 1980, Questão 18: Solução - (B) 61 mm.

Construção: (i) Trace os lados H_aH_b, H_aH_c e H_bH_c do triângulo órtico $\Delta H_aH_bH_c$; (ii) Trace as bissetrizes externa (no vértice H_a) e internas (nos vértices H_b e H_c) do triângulo órtico, cujas interseções determinam o triângulo ΔABC: A é interseção das bissetrizes internas por H_b e H_c; B é interseção das bissetrizes externa por H_a e interna por H_c; C é interseção das bissetrizes externa por H_a e interna por H_b; (iii) Determine o ponto médio M de AC e trace a mediana BM desejada.

Justificativa: As alturas do triângulo ΔABC são as bissetrizes de seu triângulo órtico $\Delta H_aH_bH_c$. Como o ângulo $\hat{A}$ é obtuso, as alturas pelos vértices B e C serão na verdade bissetrizes externas do triângulo órtico $\Delta H_aH_bH_c$. Note que as bissetrizes interna e externa em um dado ângulo são perpendiculares entre si [4], pp. 16–18.

ITA 1980, Questão 19: Os lados e a base de um triângulo isósceles são os segmentos áureos da média proporcional de dois segmentos que medem, respectivamente, 60 e 90 mm. Determinar o semi-perímetro deste triângulo, considerando o menor segmento como a base.



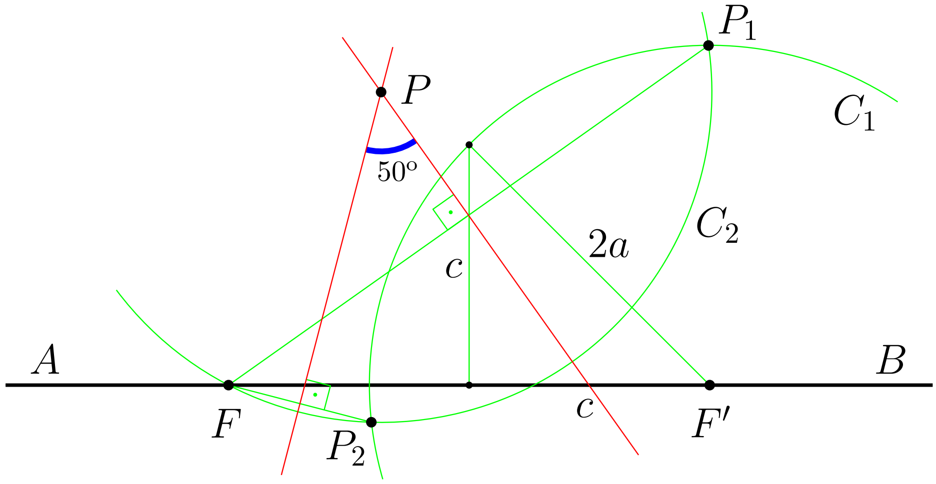
ITA 1980, Questão 19: Solução - (E) 59 mm.

Construção: (i) Determine a média proporcional $\ell = \sqrt{60.90}$; (ii) Determine os segmentos áureos a e b de ℓ; (iii) O semi-perímetro desejado é dado por $p = a + \frac{b}{2}$.

Justificativa: Algebricamente, $\ell = \sqrt{60.90} = 30\sqrt{6}$. Além disto, $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\ell$ e $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,\ell$, de forma que $\frac{\ell}{a} = \frac{a}{b}$, com $(a+b) = \ell$. Logo, o semi-perímetro desejado é dado por

$$p = \frac{2a+b}{2} = a + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\ell + \frac{3-\sqrt{5}}{4}\,\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,30\sqrt{6} = 59,45\ \mathrm{mm}$$

ITA 1980, Questão 20: Dado o eixo AB de uma hipérbole regular, os focos F e F', bem como um ponto P, como mostra a figura, determinar, aproximadamente, o menor ângulo formado pelas retas que serão tangentes aos ramos da hipérbole e que contêm o ponto P.



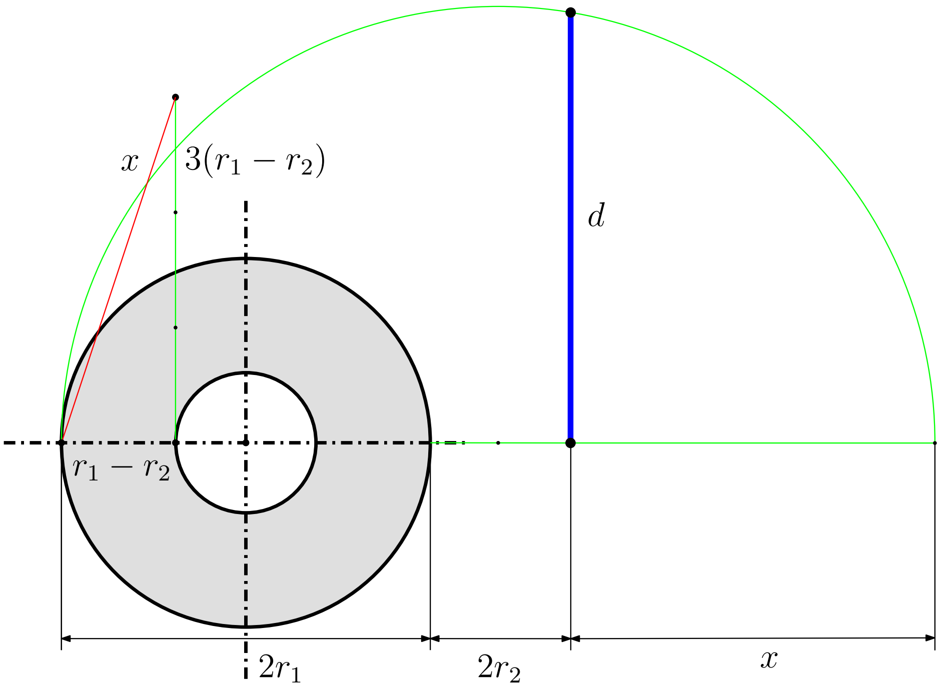
ITA 1980, Questão 20: Solução - (A) 48° ou (B) 53°?

Construção: (i) Seja $FF' = 2c$, determine a grandeza $2a = c\sqrt{2}$; (ii) Trace $C_1 \equiv (F', 2a)$ e $C_2 \equiv (P, PF)$, cujas interseções são os pontos P_1 e P_2; (iii) Trace as mediatrizes de FP_1 e FP_2, que são as tangentes desejadas.

Justificativa: Na hipérbole equilátera (regular), $2a = c\sqrt{2}$, o que permite traçar o círculo diretor C_1 por F'. Para cada ponto P' deste círculo, a mediatriz de FP' é tangente à hipérbole. Assim, temos que determinar os pontos P_1 e P_2 de C_1 tais que as mediatrizes de FP_1 e FP_2 passem por P. Para isto, as distâncias de P aos pontos F, P_1 e P_2 devem ser iguais, o que define o círculo C_2.
sln: Na minha construção, o ângulo entre as tangentes é igual a 50°, próximo a duas alternativas da questão, e, por isto mesmo, a questão poderia ser anulada.

III.13 Soluções de 1979

ITA 1979, Questão 11: Determinar, por construção geométrica, o comprimento da diagonal de um quadrado de área equivalente à coroa da Figura 1, representada no Caderno de Respostas.



ITA 1979, Questão 11: Solução - (B) 57 mm.

Construção: (i) Construa um triângulo retângulo de catetos $(r_1 - r_2)$ e $3(r_1 - r_2)$, cuja hipotenusa é dada por $x = \sqrt{10}(r_1 - r_2) \approx \pi(r_1 - r_2)$; (ii) Determine a média geométrica d de $2(r_1 + r_2)$ e x.

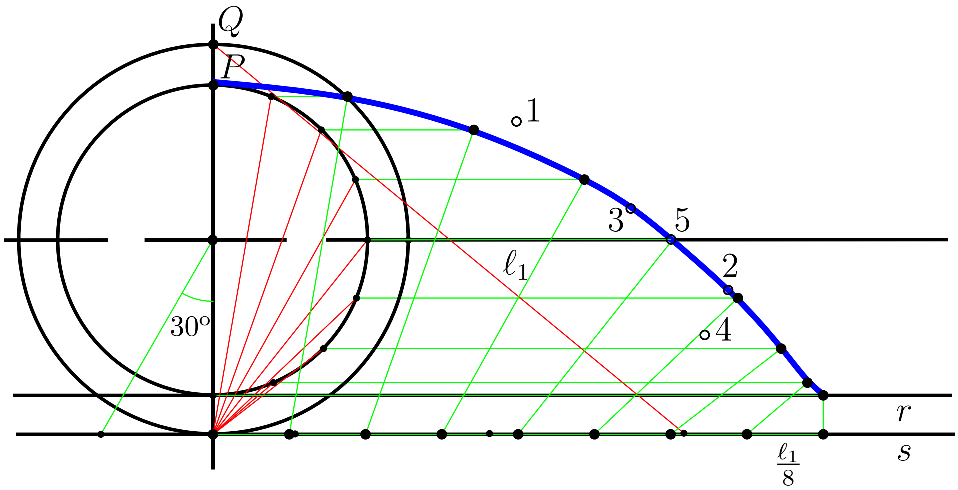
Justificativa: O lado ℓ do quadrado de área equivalente à da coroa é

$$\ell^2 = \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

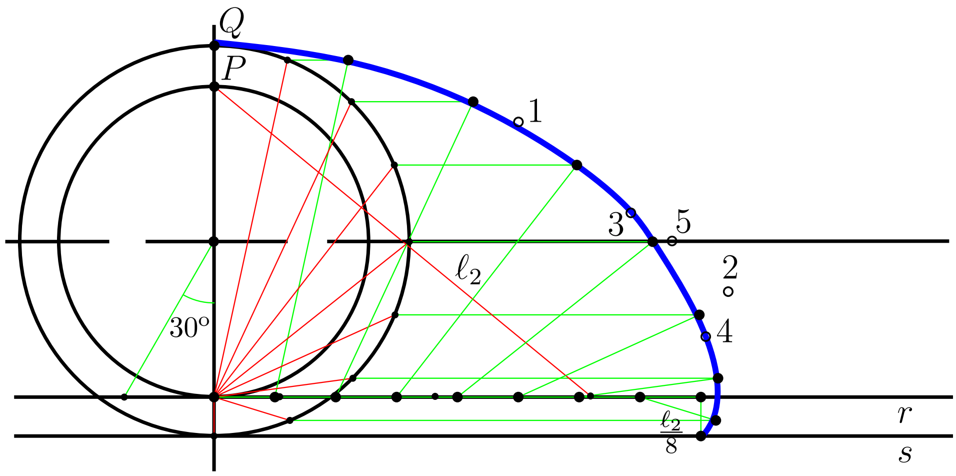
e a diagonal d deste quadrado é então

$$d = \ell\sqrt{2} = \sqrt{2\pi(r_1^2 - r_2^2)} = \sqrt{2(r_1 + r_2).\pi(r_1 - r_2)}$$

ITA 1979, Questão 12: São dadas duas circunferências, uma com raio igual a 20 mm e outra com 25 mm, dois pontos P e Q e duas retas r e s, conforme a figura a seguir. As circunferências desenvolvem meia volta sobre as retas, sem escorregar, no sentido horário, partindo dos pontos P e Q, descrevendo duas curvas cíclicas, sendo uma encurtada e outra alongada. Pede-se determinar o ponto de interseção das duas curvas.



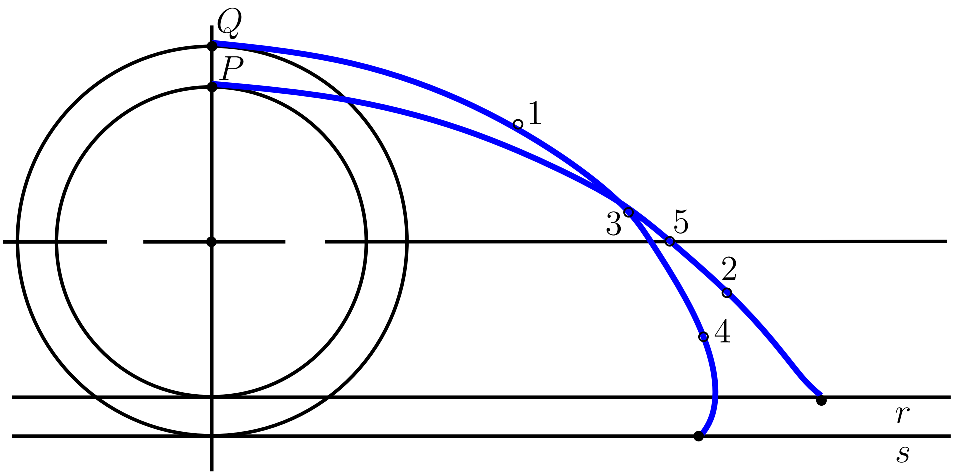
ITA 1979, Questão 12: Cíclica encurtada.



ITA 1979, Questão 12: Cíclica alongada.

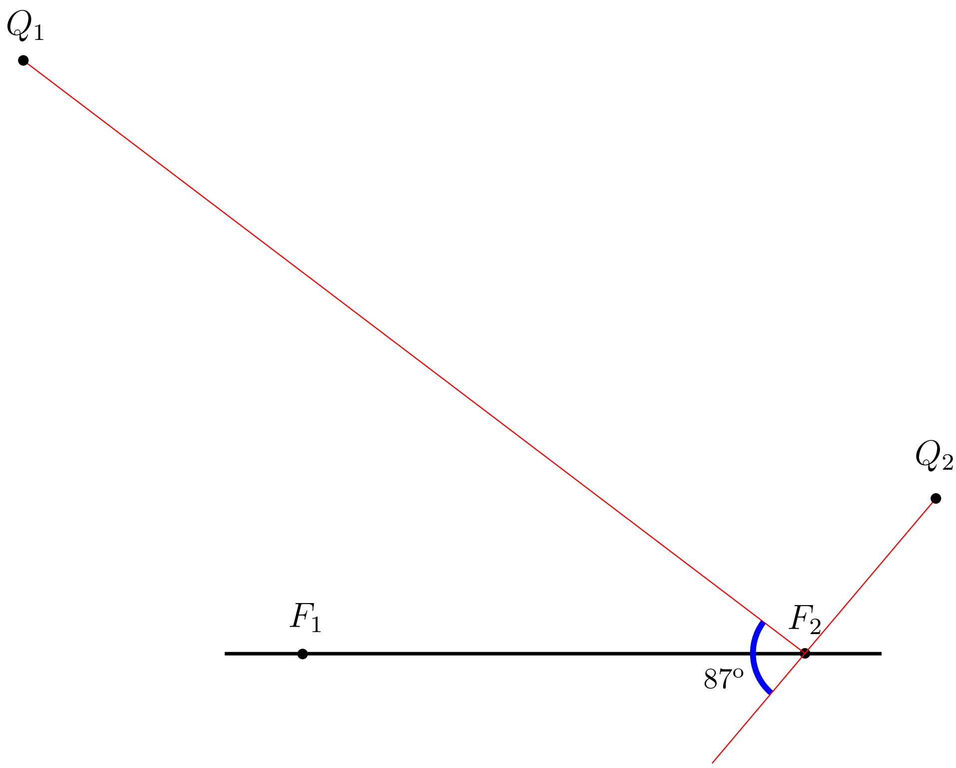
Construção: Sejam C_1 e C_2 as circunferências de raios 20 e 25 mm, respectivamente. **Cíclica encurtada:** (i) Retifique meia C_2 (ver [1], Cap. 4) e divida esta distância ℓ_1 em 8 partes iguais; (ii) Divida C_1 em 8 partes e una o ponto de apoio de C_2 com cada parte de C_1; (iii) Por cada divisão obtida no passo (i), trace uma paralela à reta correspondente do passo (ii); (iv) Por cada divisão obtida no passo (ii), trace uma reta horizontal, cuja interseção com a reta correspondente do passo (iii) pertence à cíclica encurtada. **Cíclica alongada:** (i) Retifique meia C_1 (ver [1], Cap. 4) e divida esta distância ℓ_2 em 8 partes iguais; (ii) Divida C_2 em 8 partes e una o ponto de apoio de C_1 com cada parte de C_2; (iii) Por cada divisão obtida no passo (i), trace uma paralela à reta correspondente do passo (ii); (iv) Por cada divisão obtida no passo (ii), trace uma reta horizontal, cuja interseção com a reta correspondente do passo (iii) pertence à cíclica alongada.

Justificativa: Os traçados das cíclicas encurtada e alongada são descritos em [11], pp. 281–282 e pp. 283–285, respectivamente.



ITA 1979, Questão 12: Solução - (E) 3.

ITA 1979, Questão 13: Dados o eixo maior AB de uma elipse, os focos F_1 e F_2, bem como dois pontos Q_1 e Q_2, conforme a figura a seguir, pertencentes ao círculo diretor, determinar o ângulo formado por duas retas tangentes à elipse.

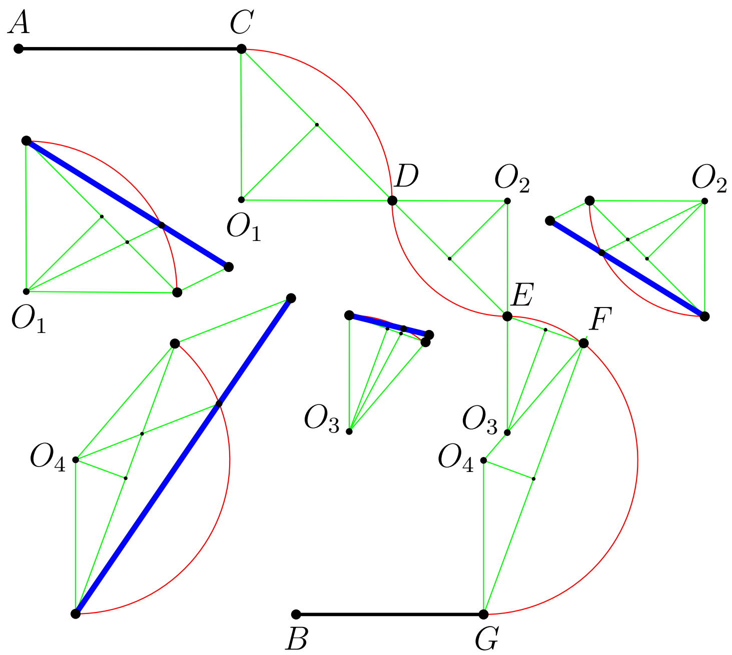


ITA 1979, Questão 13: Sem Solução.

Construção: (i) Determine o ângulo entre as retas suportes de F_2Q_1 e F_2Q_2.

Justificativa: Como Q_1 e Q_2 pertencem ao círculo diretor $(F_1, 2a)$, logo as mediatrizes de F_2Q_1 e F_2Q_2 são tangentes à elipse. O ângulo entre estas duas tangentes é igual ao ângulo entre F_2Q_1 e F_2Q_2.
sln: O resultado solicitado ("o ângulo formado por duas retas tangentes") é indeterminado e a questão deveria ser anulada. A construção acima assume que as tangentes desejadas são determinadas a partir dos pontos auxiliares Q_1 e Q_2.

ITA 1979, Questão 14: Os segmentos AC e BG são partes de um duto, representado por seu eixo e que, do ponto C ao ponto G, é encurvado em quatro arcos de circunferência que concordam nos pontos C, D, E, F e G, conforme a figura a seguir. Pede-se o comprimento do duto, no desenho na escala 1:$2{,}5$.



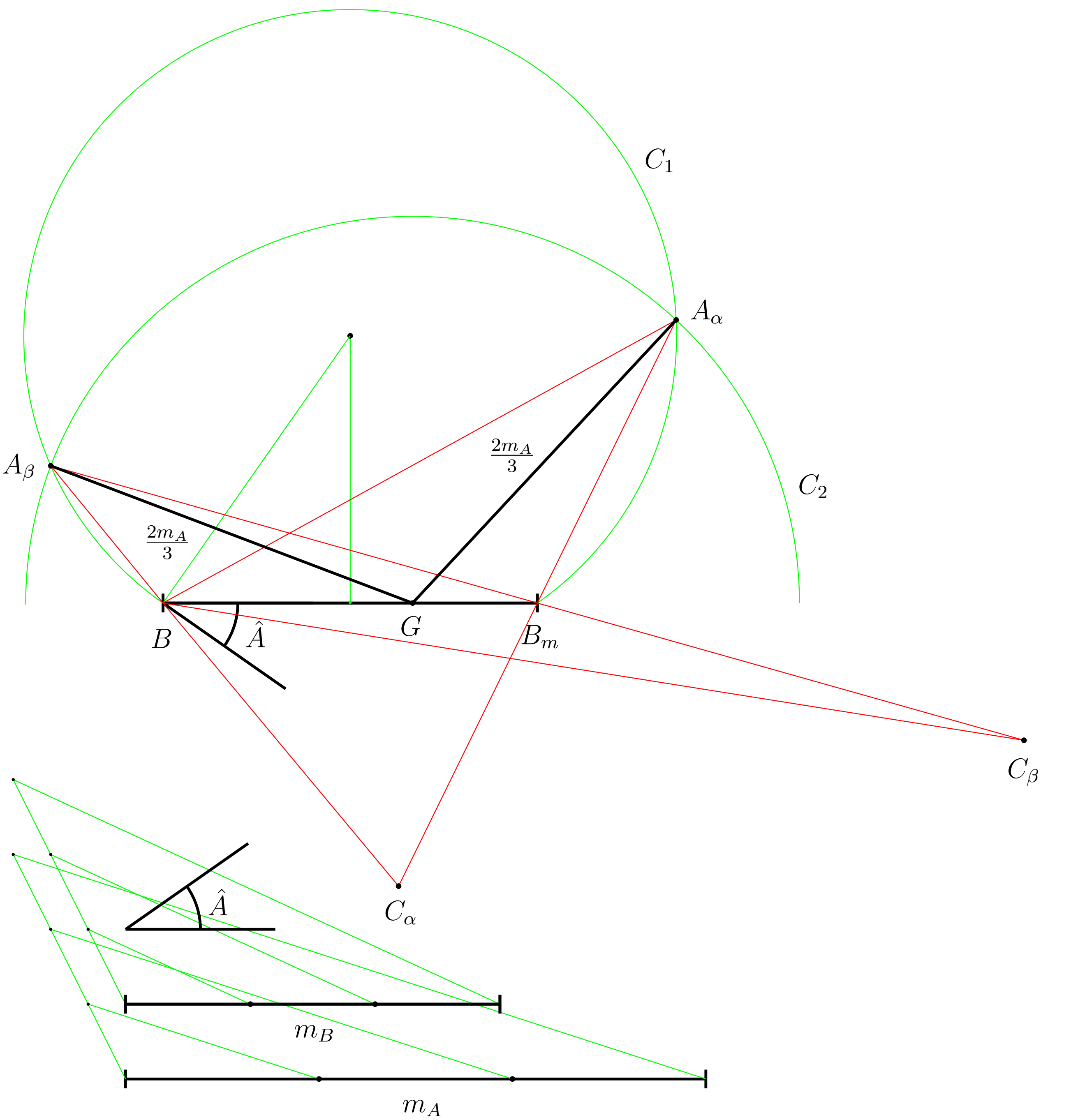
ITA 1979, Questão 14: Solução - (A) 430 mm.

Construção: (i) Trace uma perpendicular a AC por C e a mediatriz de CD, cuja interseção é o centro O_1 do arco CD; (ii) Prolongue O_1D e trace a mediatriz de DE, cuja interseção é o centro O_2 do arco DE; (iii) Prolongue O_2E e trace a mediatriz de EF, cuja interseção é o centro O_3 do arco EF; (iv) Prolongue O_3F, neste caso no sentido de O_3, e trace a mediatriz de FG, cuja interseção é o centro O_4 do arco FG, interseção esta também sobre a perpendicular a BG por G; (v) Retifique os arcos CD, DE, EF e FG, usando, por exemplo, o método de d'Ocagne ([1], pp. 63–65).

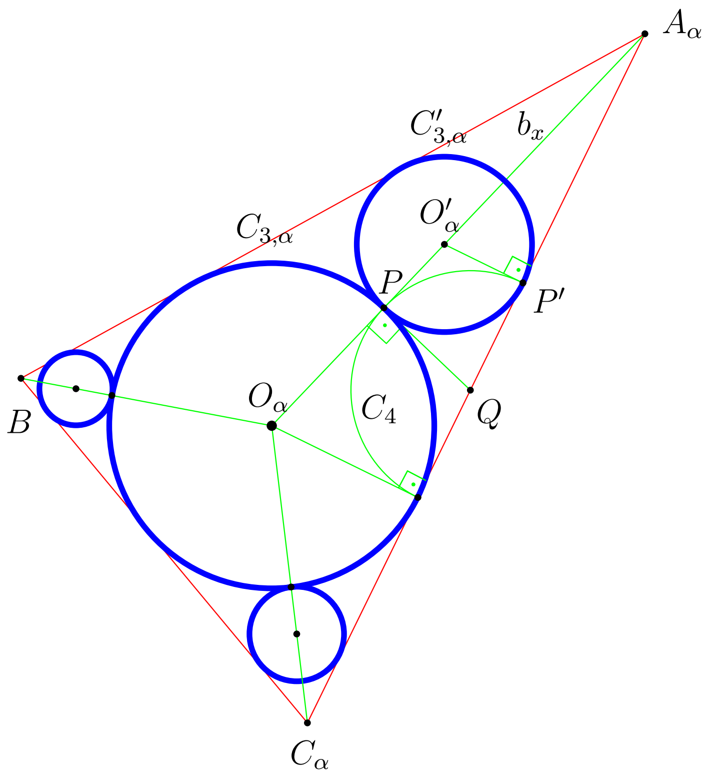
Justificativa: No ponto de concordância, as curvas devem ter a mesma tangente, que em um círculo é ortogonal ao raio. Logo, o centro O_1 do arco CD está sobre a perpendicular a AC por C. Para ter a mesma tangente em D que o arco AC, o centro do arco DE é colinear com O_1 e com D. Os demais centros são determinados analogamente. Deve-se incluir os comprimentos AC e BG na resposta, escalando o resultado por $2{,}5$, como exigido no enunciado.

ITA 1979, Questão 15: Determinar a soma dos raios de duas circunferências inscritas num triângulo ABC, tangentes aos lados deste e entre elas, sendo dado o ângulo $\hat{A} = 35^o$, a mediana relativa ao lado BC, igual a 96 mm, e a mediana relativa ao lado AC, igual a 60 mm.

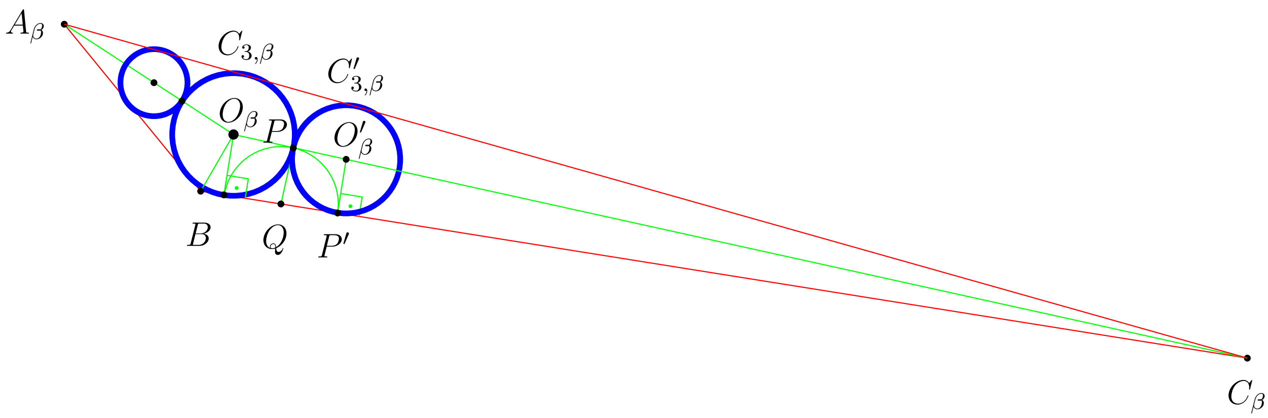
Construção: (i) Trace $BB_m = m_B$ e determine G sobre m_B tal que $BG = 2GB_m$; (ii) Construa o arco-capaz C_1 do ângulo $\hat{A} = 35^o$ relativo à corda BB_m; (iii) Construa o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(G, \frac{2m_A}{3})$, cuja interseção com C_1 é o vértice A; (iv) Prolongue AB_m, determinando o vértice C tal que $AC = 2AB_m$; (v) Trace o círculo C_3, de centro O, inscrito no triângulo ΔABC ([2], Exercício 1.4), cuja interseção com uma bissetriz b_x do triângulo ΔABC é o ponto de tangência P; (vi) Trace por P uma perpendicular a b_x, cuja interseção com um lado do triângulo é o ponto Q; (vii) Trace $C_4 \equiv \mathcal{C}(Q, QP)$, determinando o ponto P' sobre o lado do triângulo; (viii) Trace por P' uma perpendicular ao lado do triângulo, cuja interseção com a bissetriz b_x é o centro O' do círculo C_3', tangente a C_3 e a dois lados do triângulo ΔABC.



ITA 1979, Questão 15: Solução - Questão Anulada.



(a)



(b)

ITA 1979, Questão 15: (Continuação) Possíveis soluções para os triângulos: (a) $\Delta A_\alpha BC_\alpha$; (b) $\Delta A_\beta BC_\beta$.

Justificativa: O baricentro do triângulo ΔABC está sobre as medianas. Assim, o vértice A está sobre o arco-capaz do ângulo $\hat{A}$ dado, relativo à mediana m_B, e também sobre o círculo de centro em G e raio $\frac{2m_A}{3}$. Definido o triângulo ΔABC, traça-se o seu círculo inscrito C_3 de centro O.

O centro do segundo c'ırculo C'_3, tangente a dois lados do triângulo ΔABC e ao círculo C_3, está sobre a bissetriz do ângulo formado pelos dois lados. A tangente comum aos dois círculos C_3 e C'_3 é então perpendicular à referida bissetriz, e determina sobre C_3 o ponto de tangência P e sobre um lado do triângulo o ponto Q. Pelo conceito de potência, a outra tangente QP' por Q ao círculo C'_3 deve ter comprimento $QP' = QP$, o que permite determinar o outro ponto P' de tangência a C'_3 por Q. O centro O' de C'_3 está sobre a perpendicular ao lado do triângulo por P'.

sln: Há dois triângulos ΔABC que satisfazem as restrições do problema. Cada triângulo gera três possíveis soluções para o problema, que deve ser anulado.

Referências Bibliográficas

[1] E. Wagner (com J. P. Q. Carneiro), *Construções Geométricas*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 5ª ed., 2000.

[2] S. L. Netto, *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2009.

[3] S. L. Netto, *A Matemática no Vestibular do IME*, Ed. VestSeller, Fortaleza, 2011.

[4] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Random House, New York, 1967.

[5] A. C. Morgado, E. Wagner e M. Jorge, *Geometria II*, Francisco Alves Ed., Rio de Janeiro, 1974.

[6] I. M. Yaglom, *Geometric Transformations I*, Mathematical Association of America, 1962.

[7] R. Courant e H. Robbins, *O Que É Matemática?*, Ciência Moderna Ed., Rio de Janeiro, 2000.

[8] R. C. Barbosa, *Desenho Geométrico Plano*, Nossa Editora, Rio de Janeiro, 1977.

[9] C. da C. P. Brandão, *Desenho*, vol. 2, Sistema Impacto de Ensino.

[10] A. Ribeiro, *Desenho Geométrico*, vol. MG-7, Colégio Dom Bosco.

[11] B. de A. Carvalho, *Desenho Geométrico*, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 3ª ed., 1982.

[12] A. S. Smogorzhevski, *La Regla en Construcciones Geométricas*, MIR, Moscou, 1988.

[13] L. G. M. de Castro, "Introdução à Geometria Descritiva," Eureka!, no. 8, pp. 16–27.