A Matemática no Vestibular do ITA

Material Complementar: Prova 2014

sergioℓn@smt.ufrj.br

1.1 Vestibular 2014

Questão 01: Das afirmações:

I. Se $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

III. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a < b < c$. Se $f : [a, c] \to [a, b]$ é sobrejetora, então f não é injetora,

é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I e II. (B) apenas I e III. (C) apenas II e III.
(D) apenas III. (E) nenhuma.

Questão 02: Considere as funções $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + m$, $g(x) = bx + n$, em que a, b, m e n são constantes reais. Se A e B são as imagens de f e de g, respectivamente, então, das afirmações abaixo:

I. Se $A = B$, então $a = b$ e $m = n$;

II. Se $A = \mathbb{Z}$, então $a = 1$;

III. Se $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$, com $a = b$ e $m = -n$, então $A = B$,

é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas II. (C) apenas III. (D) apenas I e II. (E) nenhuma.

Questão 03: A soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}}$ é igual a

(A) $\dfrac{8}{9}$. (B) $\dfrac{14}{15}$. (C) $\dfrac{15}{16}$. (D) $\dfrac{17}{18}$. (E) 1.

Questão 04: Se $z \in \mathbb{C}$, então $z^6 - 3\,|z|^4\,(z^2 - \overline{z}^{\,2}) - \overline{z}^{\,6}$ é igual a

(A) $(z^2 - \overline{z}^{\,2})^3$. (B) $z^6 - \overline{z}^{\,6}$. (C) $(z^3 - \overline{z}^{\,3})^2$. (D) $(z - \overline{z})^6$. (E) $(z - \overline{z})^2(z^4 - \overline{z}^{\,4})$.

Questão 05: Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Das afirmações:

I. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$;

II. $(z+\overline{w}\,)^2 - (z-\overline{w}\,)^2 = 4\,z\,\overline{w}$;

III. $|z+w|^2 - |z-w|^2 = 4\,\mathrm{Re}(z\overline{w}\,)$,

é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas I e II. (C) apenas I e III.
(D) apenas II e III. (E) todas.

Questão 06: Considere os polinômios em $x \in \mathbb{R}$ da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão $\dfrac{1}{2}$ quando (a_1, a_2, a_3) é igual a

(A) $\left(\dfrac{1}{4}, 0, \dfrac{5}{4}\right)$. (B) $\left(\dfrac{1}{4}, 1, \dfrac{5}{4}\right)$. (C) $\left(\dfrac{1}{4}, 0, -\dfrac{5}{4}\right)$.
(D) $\left(\dfrac{5}{4}, 0, \dfrac{1}{4}\right)$. (E) $\left(\dfrac{1}{4}, -1, -\dfrac{1}{4}\right)$.

Questão 07: Para os inteiros positivos k e n, com $k \leq n$, sabe-se que $\dfrac{n+1}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n+1}{k+1}$. Então, o valor de $\dbinom{n}{0} + \dfrac{1}{2}\dbinom{n}{1} + \dfrac{1}{3}\dbinom{n}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n}{n}$ é igual a

(A) $2^n + 1$. (B) $2^{n+1} + 1$. (C) $\dfrac{2^{n+1}+1}{n}$. (D) $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$. (E) $\dfrac{2^n - 1}{n}$.

Questão 08: Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n, com A inversível e B antissimétrica:

I. Se o produto AB for inversível, então n é par;

II. Se o produto AB não for inversível, então n é ímpar;

III. Se B for inversível, então n é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas I e II. (C) apenas I e III.
(D) apenas II e III. (E) todas.

Questão 09: Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}$ matrizes reais tais que o produto AB é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

I. BA é antissimétrica;

II. BA não é inversível;

III. O sistema $BA(X) = 0$, com $X^t = [x_1\ x_2\ x_3]$, admite infinitas soluções,

é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I e II. (B) apenas II e III. (C) apenas I.
(D) apenas II. (E) apenas III.

Questão 10: Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9}\det(3M).$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

(A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{4}{5}$. (E) $\frac{5}{4}$.

Questão 11: Considere a equação $A(t)X = B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, em que $A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A(t) = 1$ e $t \neq 0$, os valores de x, y e z são, respectivamente,

(A) $2\sqrt{2}, 0, -3\sqrt{2}$. (B) $-2\sqrt{2}, 0, -3\sqrt{2}$. (C) $0, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$.
(D) $0, 2\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$. (E) $2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0$.

Questão 12: Considere o polinômio complexo $p(z) = z^4 + az^3 + 5z^2 - iz - 6$, em que a é uma constante complexa. Sabendo que $2i$ é uma das raízes de $p(z) = 0$, as outras três raízes são

(A) $-3i, -1, 1$. (B) $-i, i, 1$. (C) $-i, i, -1$. (D) $-2i, -1, 1$. (E) $-2i, -i, i$.

Questão 13: Sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, um possível valor para $\operatorname{cossec} 2x - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ é

(A) $\frac{a-b}{ab}$. (B) $\frac{a+b}{2ab}$. (C) $\frac{a^2-b^2}{ab}$. (D) $\frac{a^2+b^2}{4ab}$. (E) $\frac{a^2-b^2}{4ab}$.

Questão 14: Considere o triângulo ABC retângulo em A. Sejam $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ a altura e a mediana relativas à hipotenusa $\overline{BC}$, respectivamente. Se a medida de $\overline{BE}$ é $(\sqrt{2}-1)$ cm e a medida de $\overline{AD}$ é 1 cm, então $\overline{AC}$ mede, em cm,

(A) $4\sqrt{2}-5$. (B) $3-\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{6-2\sqrt{2}}$. (D) $3(\sqrt{2}-1)$. (E) $3\sqrt{4\sqrt{2}-5}$.

Questão 15: Seja ABC um triângulo de vértices $A=(1,4)$, $B=(5,1)$ e $C=(5,5)$. O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento,

(A) $\frac{15}{8}$. (B) $\frac{5\sqrt{17}}{4}$. (C) $\frac{3\sqrt{17}}{5}$. (D) $\frac{5\sqrt{17}}{8}$. (E) $\frac{17\sqrt{5}}{8}$.

Questão 16: Em um triângulo isósceles ABC, cuja área mede 48 cm^2, a razão entre as medidas da altura $\overline{AP}$ e da base $\overline{BC}$ é igual a $\frac{2}{3}$. Das afirmações abaixo:

I. As medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $\sqrt{97}$ cm;

II. O baricentro dista 4 cm do vértice A;

III. Se α é o ângulo formado pela base $\overline{BC}$ com a mediana $\overline{BM}$, relativa ao lado $\overline{AC}$, então $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{97}}$,

é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas II. (C) apenas III.
(D) apenas I e III. (E) apenas II e III.

Questão 17: Considere o trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sejam M e N os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Então, se $\overline{AB}$ tem comprimento x e $\overline{CD}$ tem comprimento $y < x$, o comprimento de $\overline{MN}$ é igual a

(A) $x-y$. (B) $\frac{1}{2}(x-y)$. (C) $\frac{1}{3}(x-y)$. (D) $\frac{1}{3}(x+y)$. (E) $\frac{1}{4}(x+y)$.

Questão 18: Uma pirâmide de altura $h = 1$ cm e volume $V = 50$ cm^3 tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono, traçam-se $n-3$ diagonais que o decompõem em $n-2$ triângulos cujas áreas S_i, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2}$ cm^2 e $S_6 = 3$ cm^2. Então n é igual a

(A) 22. (B) 24. (C) 26. (D) 28. (E) 32.

Questão 19: A equação do círculo localizado no 1º quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas $r:\ 2x-2y+5=0$ e $s:\ x+y-4=0$ é

(A) $(x-\frac{3}{4})^2+(y-\frac{10}{4})^2=4$.

(B) $(x-\frac{3}{4})^2+(y-(2\sqrt{2}+\frac{3}{4}))^2=4$.

(C) $(x-(2\sqrt{2}+\frac{3}{4}))^2+(y-\frac{10}{4})^2=4$.

(D) $(x-(2\sqrt{2}+\frac{3}{4}))^2+(y-\frac{13}{4})^2=4$.

(E) $(x-(2\sqrt{2}+\frac{3}{4}))^2+(y-\frac{11}{4})^2=4$.

Questão 20: Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista $0{,}25$ cm do vértice A e $0{,}75$ cm da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\dfrac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}$ cm, o volume desse sólido, em cm^3, é igual a

(A) $\dfrac{9}{16}$. (B) $\dfrac{13}{96}$. (C) $\dfrac{7}{24}$. (D) $\dfrac{9}{24}$. (E) $\dfrac{11}{96}$.

Problema 01: Considere as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\alpha x}$, em que α é uma constante real positiva, e $g:[0,\infty[\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}$. Determine o conjunto-solução da inequação

$$(g\circ f)(x)>(f\circ g)(x).$$

Problema 02: Determine as soluções reais da equação em x,

$$(\log_4 x)^3-\log_4(x^4)-3\frac{\log_{10}16x}{\log_{100}16}=0.$$

Problema 03:

a) Determine o valor máximo de $|z+i|$, sabendo que $|z-2|=1$, $z\in\mathbb{C}$.

b) Se $z_0\in\mathbb{C}$ satisfaz (a), determine z_0.

Problema 04: Seja Ω o espaço amostral que representa todos os resultados possíveis do lançamento simultâneo de três dados. Se $A\subset\Omega$ é o evento para o qual a soma dos resultados dos três dados é igual a 9 e $B\subset\Omega$ o evento cuja soma dos resultados é igual a 10, calcule:

a) $n(\Omega)$;

b) $n(A)$ e $n(B)$;

c) $P(A)$ e $P(B)$.

Problema 05: Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

Problema 06: Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & (\operatorname{sen}\theta)\,y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & + & (1-\cos 2\theta)\,y & + & 16z & = & 0 \end{array}\right. , \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

a) Determine θ tal que o sistema tenha infinitas soluções;

b) Para θ encontrado em (a), determine o conjunto-solução do sistema.

Problema 07: Determine o conjunto de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem, simultaneamente, a

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{\cos x - 1} < 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < (1 + \sqrt{3}\operatorname{cotg} x)\operatorname{cotg} x.$$

Problema 08: Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

Problema 09: Três circunferências C_1, C_2 e C_3 são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios r_1, r_2 e r_3 destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{3}$. A soma dos comprimentos de C_1, C_2 e C_3 é igual a 26π cm. Determine:

a) A área do triângulo cujos vértices são os centros de C_1, C_2 e C_3;

b) O volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

Problema 10: Um cilindro reto de altura $h = 1$ cm tem sua base no plano xy definida por

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 \leq 0.$$

Um plano, contendo a reta $y - x = 0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.

1.2 Vestibular 2014 - Solução

Questão 01 (E):

I. Sejam $x = \sqrt{2}+1$ e $y = -\sqrt{2}$, tais que $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $y \neq -x$. Como $x + y = 1 \in \mathbb{Q}$, a afirmação I é falsa;

II. Sejam $x = 0 \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qualquer. Como $xy = 0$, a afirmação II é falsa;

III. Sejam, por exemplo, $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$, e ainda $f : [0,2] \to [0,1]$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}x$, de modo que $f(x)$ é injetora e a afirmação III também é falsa.

Questão 02 (E):

I. Sejam $f(x) = x$ e $g(x) = x+1$, tais que $A = B = \mathbb{Z}$, mas com $m \neq n$;

II. Seja $f(x) = -x$, de modo que $A = \mathbb{Z}$, mas com $a = -1$;

III. Sejam $f(x) = 2$ e $g(x) = -2$, tais que $a = b = 0$, $m = -n = 2$, mas com $A = \{2\}$ e $B = \{-2\}$.

Desta forma, tem-se que todas as afirmações são falsas.

Questão 03 (D): Usando a fórmula de mudança de base, podemos reescrever a soma S do enunciado como

$$S = \sum_{n=1}^{4} \frac{\frac{\log_2 2^{\frac{5}{n}}}{\log_2 1/2}}{\frac{\log_2 \ 2^{3(n+2)}}{\log_2 1/2}} = \sum_{n=1}^{4} \frac{\frac{5}{n}}{3(n+2)} = \sum_{n=1}^{4} \frac{5}{3n(n+2)},$$

e assim

$$S = \frac{5}{3.1.3} + \frac{5}{3.2.4} + \frac{5}{3.3.5} + \frac{5}{3.4.6} = \frac{200+75+40+25}{360} = \frac{17}{18}.$$

Questão 04 (A): Usando a notação em coordenadas polares $z = |z|e^{i\theta}$, podemos reescrever a expressão E do enunciado como

$$E = |z|^6\big(e^{6i\theta} - 3e^{2i\theta} + 3e^{-2i\theta} - e^{-6i\theta}\big) = (|z|^2e^{2i\theta} - |z|^2e^{-2i\theta})^3 = (z^2 - \overline{z}^{\,2})^3.$$

Questão 05 (E): Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Com isso, os lados esquerdos das expressões dadas são equivalentes a:

I.

$$\begin{aligned}[(a+c)^2 + (b+d)^2] + [(a-c)^2 + (b-d)^2] &= 2[(a^2+b^2) + (c^2+d^2)] \\ &= 2(|z|^2 + |w|^2);\end{aligned}$$

II.

$$(z^2 + 2z\overline{w} + \overline{w}^{\,2}) - (z^2 - 2z\overline{w} + \overline{w}^{\,2}) = 4z\overline{w};$$

III.

$$\begin{aligned}[(a+c)^2 + (b+d)^2] - [(a-c)^2 + (b-d)^2] &= 4(ac+bd) \\ &= 4\,\mathrm{Re}[(ac+bd) + (cb-ad)i] \\ &= 4\,\mathrm{Re}[z\overline{w}].\end{aligned}$$

Logo, as três afirmações são verdadeiras.

Questão 06 (C): Sejam r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 as raízes de $p(x)$, sendo que uma delas é nula. Como as raízes estão em progressão aritmética, $(r_1 + r_5) = (r_2 + r_4) = 2r_3$, de modo que, por Girard,

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 5r_3 = 0 \Rightarrow r_3 = 0,$$

e assim $r_1 = -1$, $r_2 = -\frac{1}{2}$, $r_4 = \frac{1}{2}$ e $r_5 = 1$. Com isso, novamente por Girard, já considerando $r_3 = 0$, têm-se

$$\begin{cases} a_1 = r_1r_2r_4r_5 \\ a_2 = r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + r_1r_4r_5 + r_2r_4r_5 \\ a_3 = r_1r_2 + r_1r_4 + r_1r_5 + r_2r_4 + r_2r_5 + r_4r_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = (-1).(-\frac{1}{2}).\frac{1}{2}.1 \\ a_2 = (-1).(-\frac{1}{2}).\frac{1}{2} + (-1).(-\frac{1}{2}).1 + (-1).\frac{1}{2}.1 + (-\frac{1}{2}).\frac{1}{2}.1 \\ a_3 = (-1).(-\frac{1}{2}) + (-1).\frac{1}{2} + (-1).1 + (-\frac{1}{2}).\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}).1 + \frac{1}{2}.1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0 \\ a_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

Questão 07 (D): Da equação dada, tem-se

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$$

Logo, a expressão E desejada é igual a

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k{+}1}\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n{+}1}\binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\left\{\left[\sum_{k=-1}^{n}\binom{n+1}{k+1}\right] - \binom{n+1}{0}\right\}, \end{aligned}$$

de modo que

$$E = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

Questão 08 (C): Uma matriz antissimétrica B é tal que $B^t = -B$. Logo, $\det(B^t) = \det(B) = (-1)^n \det(B)$. Assim, se n é par, então $\det(B) = \det(B)$, de modo que $\det(B)$ é qualquer (possivelmente zero). Se n é ímpar, então $\det(B) = -\det(B)$, de modo que $\det(B) = 0$. Por tudo isto:

I. Se AB e A são inversíveis, então B é inversível e n deve ser par;

II. Se AB é não inversível com A inversível, então B é não inversível, mas nada pode ser dito acerca de n;

III. Se B é inversível, então n é par.

Logo, apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

Questão 09 (B): Como o produto

$$AB = \begin{bmatrix} [(x+1)-(y-2)+(z+3)] & (x-y+z) \\ [y(x+1)-x(y-2)+(z-3)] & (yx-xy+z) \end{bmatrix}$$

é antissimétrico, devemos ter

$$\begin{cases} x-y+z+6=0 \\ y+2x+z-3=-(x-y+z) \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-6 \\ 3x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}.$$

Assim,

$$BA = \begin{bmatrix} [(x+1)+xy] & [-(x+1)-x^2] & [(x+1)+x] \\ [(y-2)+y^2] & [-(y-2)-yx] & [(y-2)+y] \\ [(z+3)+zy] & [-(z+3)-zx] & [(z+3)+z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 3 \\ 54 & -12 & 12 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix},$$

de modo que $\det(BA)=0$, já que a segunda coluna de BA é igual à terceira coluna multiplicada por -1. Assim, é simples concluir que:

I. BA não é antissimétrica;

II. BA não é inversível;

III. O sistema $(BA)X=0$ admite infinitas soluções, até porque BA não é inversível.

Questão 10 (A): Lembrando que, para $n \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \det(M^n) = n \det(M) \\ \det(kM) = k^N, \det(M) \end{cases},$$

onde $N=3$ é a ordem da matriz M, a equação do enunciado nos diz que

$$2^3 \det{}^2(M) - (\sqrt[3]{2})^3 \det{}^3(M) = \frac{2.3^3}{9} \det(M)$$
$$\Rightarrow 2\det(M)(\det{}^2(M) - 4\det(M) + 3) = 0$$
$$\Rightarrow \det(M) = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 1 \text{ ou } 3,$$

pois $\det(M) \neq 0$, já que M é inversível. Com isso,

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} = 1 \text{ ou } \frac{1}{3}.$$

Questão 11 (B): Como $\det\ A(t) = 1$, então

$$\begin{aligned} & \det A(t) = 4e^{-2t} + 3e^{2t} + 1 - 3 - 2e^{-2t} - 2e^{2t} = 2e^{-2t} + e^{2t} - 2 = 1 \\ \Rightarrow\ & e^{-2t}(e^{4t} - 3e^{2t} + 2) = 0 \\ \Rightarrow\ & e^{2t} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4.2}}{2} = 1 \text{ ou } 2 \\ \Rightarrow\ & t = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}, \end{aligned}$$

pois $t \neq 0$. Logo, o sistema $A(t)X = B(t)$ é dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = \sqrt{2} \\ -x + y + z = -\sqrt{2} \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases},$$

de modo que

$$x = -2\sqrt{2}, \quad y = 0, \quad \text{e} \quad z = -3\sqrt{2}.$$

Questão 12 (A): Como $p(2i) = 0$, então

$$p(2i) = (2i)^4 + a(2i)^3 + 5(2i)^2 - i(2i) - 6 = 16 - 8ai - 20 + 2 - 6 = -8 - 8ai = 0,$$

de modo que $a = i$. Com isso, $p(z) = z^4 + iz^3 + 5z^2 - iz - 6$, e, por inspeção, podemos concluir que $z = 1$ e $z = -1$ são raízes. Logo, $p(z)$ pode ser decomposto da forma

$$p(z) = (z - 1)(z + 1)(z - 2i)(z + 3i).$$

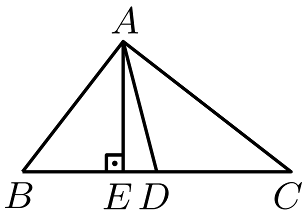
Questão 13 (E): Do enunciado,

$$\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2}}{a^2 + b^2} = \frac{|a^2 - b^2|}{a^2 + b^2}.$$

com isso, desenvolvendo a expressão E desejada, têm-se

$$E = \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} - \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{\cos\ x}{2\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{|a^2 - b^2|}{a^2 + b^2}}{2\frac{2ab}{a^2 + b^2}} = \frac{|a^2 - b^2|}{4ab}.$$

Questão 14 (C):



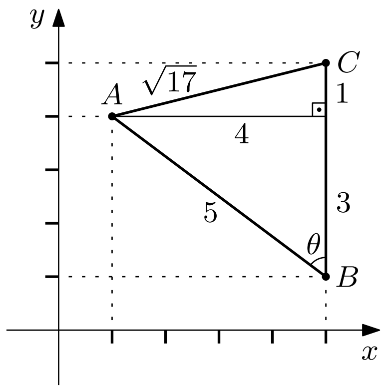
Do enunciado, $BD = CD = AD = 1$. Além disto, da semelhaça dos triângulos ΔABC e ΔEBA, tem-se

$$\frac{AB}{BC} = \frac{EB}{BA} \Rightarrow AB^2 = BC.EB = 2(\sqrt{2} - 1),$$

de modo que, pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ΔABC,

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 2(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{6 - 2\sqrt{2}}.$$

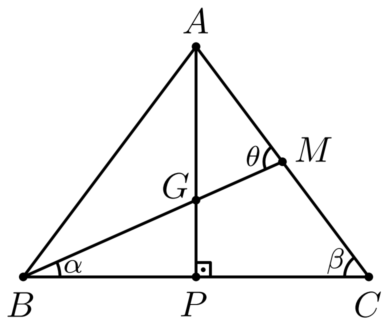
Questão 15 (D):



Na figura acima, $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, de modo que, pela a Lei dos Senos estendida,

$$\frac{\sqrt{17}}{\operatorname{sen}\theta} = 2R \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{17}}{8}.$$

Questão 16 (A):



Do enunciado,

$$\begin{cases} \frac{AP.BC}{2} = 48 \\ \frac{AP}{BC} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{3AP^2}{4} = 48 \Rightarrow AP = 8 \text{ e } BC = 12,$$

de modo que, pelo Teorema de Pitágoras,

$$AB = AC = \sqrt{BP^2 + AP^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

I. Aplicando a Lei dos Cossenos nos triângulos ΔBMA e ΔBMC, têm-se

$$\begin{cases} BA^2 = BM^2 + AM^2 - 2BM.AM.\cos\theta \\ BC^2 = BM^2 + CM^2 + 2BM.CM.\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow BM = \sqrt{\frac{BA^2 + BC^2 - 2AM^2}{2}} = \sqrt{\frac{10^2 + 12^2 - 2.5^2}{2}} = \sqrt{97};$$

II. Pelo item (III) abaixo,

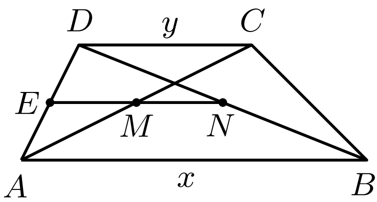
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{GP}{BP} \Rightarrow GP = BP\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 6\,\frac{\frac{4}{\sqrt{97}}}{\frac{9}{\sqrt{97}}} = \frac{8}{3} \Rightarrow AG = AP - GP = \frac{16}{3};$$

III. Na figura acima, $\operatorname{sen}\beta = \frac{AP}{AC} = \frac{4}{5}$. Logo, aplicando a Lei dos Senos no triângulo ΔBCM, tem-se

$$\frac{CM}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{BM}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{5.\frac{4}{5}}{\sqrt{97}} = \frac{4}{\sqrt{97}} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{97}} = \frac{9}{\sqrt{97}}.$$

Logo, apenas a afirmação I é verdadeira.

Questão 17 (B):



Na figura acima, seja E o ponto médio do lado AD. Assim, EN é base média do triângulo ΔADB relativa ao lado AB e EM é base média do triângulo ΔADC relativa ao lado DC, de modo que $EN \parallel EM$ e ainda

$$\begin{cases} EN = \frac{x}{2} \\ EM = \frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow MN = EN - EM = \frac{x-y}{2}.$$

Questão 18 (C): Como $h = 1$ e $V = 50$, então a área da base S é igual a

$$V = \frac{S.h}{3} \Rightarrow S = \frac{3V}{h} = 150 \text{ cm}^2.$$

Além disso, se r é a razão da progressão aritmética,

$$\begin{cases} S_3 = S_1 + 2r = \frac{3}{2} \\ S_6 = S_1 + 5r = 3 \end{cases} \Rightarrow S_1 = r = \frac{1}{2}.$$

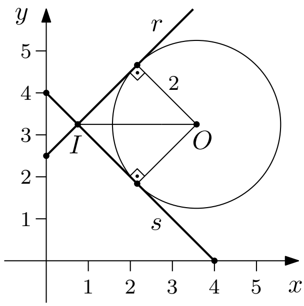
Logo, usando a fórmula da soma de uma progressão aritmética, têm-se

$$S = \sum_{i=1}^{n-2} S_i = \frac{(S_1+S_{n-2})(n-2)}{2} = \frac{[S_1+S_1+(n-3)r](n-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{4},$$

de modo que

$$n^2 - 3n - 598 = 0 \Rightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 2392}}{2} = \frac{3 \pm 49}{2} \Rightarrow n = 26.$$

Questão 19 (D):



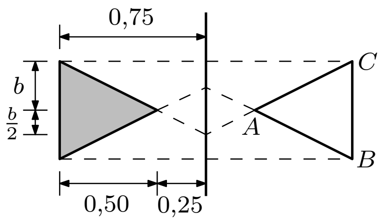
As retas r e s, com interseção em $I \equiv (\frac{3}{4}, \frac{13}{4})$, têm inclinações de $+45^{\text{o}}$ e -45^{o}, respectivamente, de modo que elas são perpendiculares. Assim, o círculo desejado, de raio $R = 2$ tal que $\pi R^2 = 4\pi$, tem centro O sobre a reta horizontal $y = \frac{13}{4}$, bissetriz de r e s, com

$$OI = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow O \equiv \left(\frac{3}{4} + 2\sqrt{2}, \frac{13}{4}\right).$$

Logo, a equação do círculo é dada por

$$\left[x - \left(\frac{3}{4} + 2\sqrt{2}\right)\right]^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4.$$

Questão 20 (C):



O sólido resultante pode ser visto como sendo um cilindro de raio da base $0{,}75$ e altura $2b$ removido de dois troncos de cone, cada um de altura b e raios das bases $0{,}75$ e $0{,}25$. Com isso, o volume V desejado é dado por

$$V = \pi(0{,}75)^2 2b - 2\left(\frac{\pi(0{,}75)^2\frac{3b}{2}}{3} - \frac{\pi(0{,}25)^2\frac{b}{2}}{3}\right) = \frac{9b\pi}{8} - 2\left(\frac{9b\pi}{32} - \frac{b\pi}{96}\right) = \frac{7b\pi}{12},$$

onde b é tal que

$$b = \sqrt{AB^2 - (0{,}5)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2 + 1}{4\pi^2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow V = \frac{7}{24}.$$

Problema 01: Para $\alpha > 0$ e $x > 0$, a inequação dada corresponde a

$$\sqrt{e^{\alpha x}} > e^{\alpha\sqrt{x}} \Rightarrow e^{\alpha x} > e^{2\alpha\sqrt{x}} \Rightarrow \alpha x > 2\alpha\sqrt{x} \Rightarrow x^2 > 4x \Rightarrow x > 4.$$

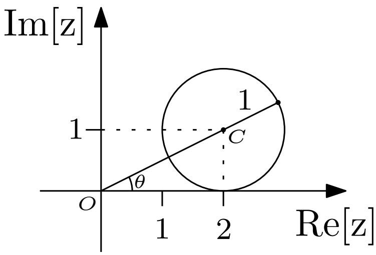
Problema 02: Usando a propriedade de mudança de base, têm-se

$$\frac{\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = \frac{\frac{\log_4 16x}{\log_4 10}}{\frac{\log_4 16}{\log_4 10^2}} = 2 + \log_4 x,$$

de modo que a expressão do enunciado é igual a

$$\begin{aligned}
& (\log_4 x)^3 - 4\log_4 x - 3(2 + \log_4 x) = 0 \\
\Rightarrow\ & (\log_4 x)^3 - 7\log_4 x - 6 = 0 \\
\Rightarrow\ & [(\log_4 x) - 3][(\log_4 x)^2 + 3(\log_4 x) + 2] = 0 \\
\Rightarrow\ & \log_4 x = 3 \text{ ou } \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = 3, -2 \text{ ou } -1 \\
\Rightarrow\ & x = 4^3, 4^{-2} \text{ ou } 4^{-1} = 64, \frac{1}{16} \text{ ou } \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Problema 03:



a) A equação $|z-2| = 1$ corresponde a uma circunferência de centro em $z = 2$ e raio 1. Logo, para esse domínio, a expressão $|z+i|$ equivale à distância para a origem dos pontos da circunferência de centro $C \equiv (2+i)$ e raio 1. O valor máximo M dessa expressão é

$$M = CO + 1 = \sqrt{2^1 + 1^2} + 1 = \sqrt{5} + 1;$$

b) Na figura acima,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Logo, o ponto z_0, tal que $|z_0 - 2| = 1$, é dado por

$$z_0 \equiv (\sqrt{5}+1)(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) - i \equiv \frac{(\sqrt{5}+1)(2+i)}{\sqrt{5}} - i \equiv \frac{2(\sqrt{5}+1)+i}{\sqrt{5}}.$$

Problema 04: Nesse tipo de problema, há sempre a questão dos dados poderem ser identificados individualmente ou não. Na solução a seguir, vamos assumir que sim:

a) Lançando-se três dados, há um total de $n(\Omega) = 6^3 = 196$ resultados distintos;

b) Considerando a soma dos três dados igual a 9, temos os resultados possíveis (6;2;1) [6], (5;3;1) [6], (5;2;2) [3], (4;4;1) [3], (4;3;2) [6] e (3;3;3) [1], onde o número entre colchetes indica o número de possibilidades de cada resultado, totalizando $n(A) = (6+6+3+3+6=1) = 25$ possibilidades.

   Considerando a soma igual a 10, temos os resultados possíveis (6;3;1) [6], (6;2;2) [3], (5;4;1) [6], (5;3;2) [6], (4;4;2) [3] e (4;3;3) [3], totalizando $n(B) = (6+3+6+6+3+3) = 27$ possibilidades;

c) Pelos itens anteriores

$$\begin{cases} P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{25}{216} \\ P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} \end{cases}.$$

Casos os dados sejam idênticos:

a)
   - Se os resultados dos três dados foram iguais, há 6 possibilidades;
   - Se os resultados de apenas dois dados foram iguais, há 6 possibilidades para a dupla de resultados iguais e 5 para o resultado distinto, totalizando $6 \times 5 = 30$ possibilidades;
   - Se os resultados dos três dados foram distintos, há $\frac{6\times5\times4}{6} = 20$ possibilidades, onde a divisão por 6 elimina as permutações dos resultados (que são equivalentes, pois os três dados são idênticos).

   Logo, $n(\Omega) = (6+30+20) = 56$ resultados distintos;

b) Neste item, como os dados são idênticos, não precisamos considerar as permutações dos resultados possíveis.

   Assim, considerando a soma dos três dados igual a 9, temos apenas os resultados possíveis (6;2;1), (5;3;1), (5;2;2), (4;4;1), (4;3;2) e (3;3;3), de modo que $n(A) = 6$.

   Considerando a soma igual a 10, temos os resultados possíveis (6;3;1), (6;2;2), (5;4;1), (5;3;2), (4;4;2) e (4;3;3), também totalizando $n(B) = 6$;

c) O fato dos dados serem idênticos não deve alterar o cálculo das probabilidades. Logo, considerando as possíveis permutações,

$$\begin{cases} P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{25}{216} \\ P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} \end{cases}.$$

Problema 05: Considere as diferentes situações:

- 3 arestas de mesmo comprimento: há 10 possibilidades;
- 2 arestas de mesmo comprimento e 1 aresta de comprimento distinto: nesse caso, há 10 possibilidades para o comprimento das 2 arestas iguais e 9 possibilidades para o comprimento da aresta distinta, totalizando 90 casos;
- 3 arestas distintas: nesse caso, há $\frac{10\times9\times8}{3!} = 120$ possibilidades, onde a divisão por 6 elimina as permutações que geram paralelepípedos equivalentes.

Considerando os três casos acima, há um total de 220 possibilidades.

Problema 06:

a) Para que o sistema tenha infinitas soluções, o determinante Δ característico do sistema deve ser nulo. Assim, lembrando que $(1 - \cos 2\theta) = 2\,\mathrm{sen}^2\theta$, devemos ter

$$\Delta = 16\,\mathrm{sen}\,\theta+8-4\,\mathrm{sen}^2\theta-4\,\mathrm{sen}\,\theta-8\,\mathrm{sen}^2\theta+16 = 12(-\mathrm{sen}^2\theta+\mathrm{sen}\,\theta+2) = 0,$$

e assim

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2},$$

já descartando a opção espúria $\mathrm{sen}\,\theta = -2$.

b) Substituindo $\theta = \frac{3\pi}{2}$, o sistema original torna-se

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 16z & = & 0 \end{array} \right. ,$$

cuja solução geral é da forma $z = 0$ e $x = -y$.

Problema 07: Na primeira inequação, devemos ter $\cos x \neq 1$, ou seja $x \neq 0$ e $x \neq 2\pi$, de modo que $\cos x < 1$ e assim,

$$2\,\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\, x - 1 > 0 \Rightarrow 2\left(\mathrm{sen}\, x - \frac{1}{2}\right)(\mathrm{sen}\, x + 1) > 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\, x > \frac{1}{2},$$

cujo conjunto-solução é dado por $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

Já na segunda inequação, devemos ter $x \neq k\frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$, e ainda

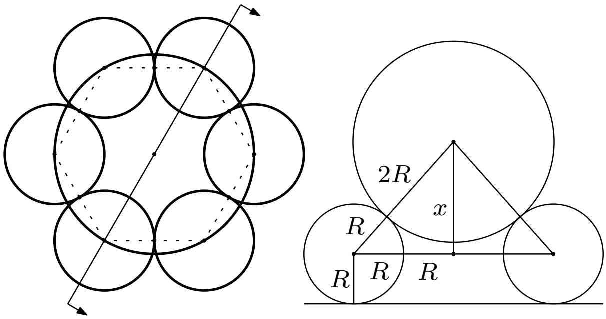
$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{sen}\, x + \sqrt{3}\cos x}{\cos x} < \left(\mathrm{sen}\, x + \sqrt{3}\cos x\right)\frac{\cos x}{\mathrm{sen}^2 x} \\
&\Rightarrow \left(\mathrm{sen}\, x + \sqrt{3}\cos x\right)\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^2 x}\right) < 0 \\
&\Rightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\,\mathrm{sen}\, x + \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos x\right)\left(\frac{\mathrm{sen}^2 x - \cos^2 x}{\mathrm{sen}^2 x \cos x}\right) < 0 \\
&\Rightarrow 2\,\mathrm{sen}\,(x + \frac{\pi}{3})\frac{\cos 2x}{\mathrm{sen}^2 x \cos x} > 0 \\
&\Rightarrow \mathrm{sen}\,(x + \frac{\pi}{3})\frac{\cos 2x}{\cos x} > 0.
\end{aligned}$$

A figura abaixo analisa os sinais dos termos $\mathrm{sen}\,(x + \frac{\pi}{3})$, $\cos 2x$ e $\cos x$ no conjunto-solução da primeira inequação, de modo que podemos concluir que as duas inequações são simultaneamente satisfeitas para

$$x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

	$\frac{\pi}{6}$ – $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ – $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$ – $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ – $\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$ – $\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$ – $\frac{5\pi}{6}$
$\mathrm{sen}\,(x + \frac{\pi}{3})$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos 2x$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\cos x$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$

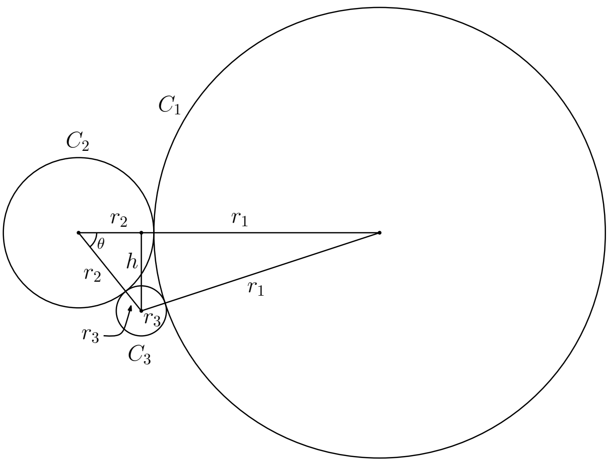
Problema 08:



O corte indicado produz a figura da direita, de modo que a altura h desejada é dada por

$$h = R + x = R + \sqrt{9R^2 - 4R^2} = R(1 + \sqrt{5}).$$

Problema 09:



Sejam r_1, r_2 e r_3 os respectivos raios de C_1, C_2 e C_3, de modo que

$$\begin{cases} r_3 = \frac{r_2}{3} = \frac{r_1}{9} \\ 2\pi(r_1 + r_2 + r_3) = 26\pi \end{cases} \Rightarrow r_1 = 9, r_2 = 3 \text{ e } r_3 = 1.$$

a) Logo, se $2p = (2r_1 + 2r_2 + 2r_3)$, a área S desejada é igual a

$$S = \sqrt{p(p-r_2-r_3)(p-r_1-r_3)(p-r_1-r_2)} = \sqrt{pr_1r_2r_3} = 3\sqrt{39}\,\mathrm{cm}^2.$$

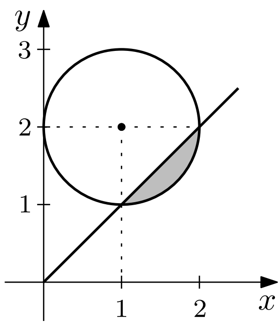
b) Pela lei dos cossenos aplicada no triângulo formado pelos centros de C_1, C_2 e C_3, têm-se

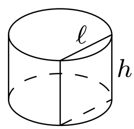
$$(r_1 + r_3)^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_2 + r_3)^2 - 2(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)\cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{12^2 + 4^2 - 10^2}{2.12.4} = \frac{5}{8}; \quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$
$$\Rightarrow h = (r_2 + r_3)\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{39}}{2}.$$

O volume V desejado é dado pela soma dos volumes de dois cones de raio da base h e respectivas alturas r_2 e r_1. Logo,

$$V = \frac{\pi h^2 r_2}{3} + \frac{\pi h^2 r_1}{3} = \frac{\pi.\frac{39}{4}.12}{3} = 39\pi\ \mathrm{cm}^3.$$

Problema 10:





A equação da base do cilindro pode ser reescrita como

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1,$$

de modo que a base corresponde ao círculo de centro $C \equiv (1, 2)$ e raio $r = 1$. A reta $y = x$ define a base do menor sólido pelo segmento circular ilustrado na figura acima.

Com isso, a área total S do menor sólido é dada por um retângulo de lados ℓ e h, conforme indicado na figura, ao dobro da área da base e a $\frac{1}{4}$ da área lateral total do cilindro, ou seja

$$S = \ell h + 2\times\left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{1\times 1}{2}\right) + \frac{2\pi r h}{4} = \sqrt{2} + \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} = (\sqrt{2} + \pi - 1)\ \mathrm{cm}^2.$$