A Matemática no Vestibular do ITA

Material Complementar:

Coletânea de Questões Isoladas ITA 1970

Essas 24 questões foram coletadas isoladamente em diversas fontes bibliográficas. Seguindo sugestão de uma colaboradora, Jessica Lendaw, a grande maioria (16 questões) foi encontrada nas primeiras edições da coleção “Fundamentos de Matemática Elementar”, de Gelson Iezzi e outros co-autores. As demais questões recebi de um outro colaborador. Pela natureza dessa busca, não é possível precisar a ordem em que as questões aparecem na prova do vestibular.

sergioℓn@smt.ufrj.br

Vestibular 1970

Questão: A equação $3e^{x^2} - 2e^{-x^2} = -1$ apresenta solução:
(A) $x = 0$. (B) $x > 1$. (C) $-1 < x < 1$. (D) $-1 \leq x \leq \dfrac{2}{3}$.
(E) nenhuma das respostas anteriores é válida.

Questão: Dados $\log_{10} 2 = a$ e $\log_{10} 3 = b$, então $\log_9 20$ é igual a:
(A) $\dfrac{b}{1+2a}$. (B) $\dfrac{a}{1+b}$. (C) $\dfrac{1+a}{2b}$. (D) $\dfrac{b}{2a}$.
(E) nenhuma das respostas acima é válida.

Questão: Seja $P = \operatorname{sen}^2 ax - \operatorname{sen}^2 bx$. Temos, então, que:
(A) $P = \operatorname{sen} ax \,.\, \cos bx$.
(B) $P = \cos \dfrac{a}{2} x \,.\, \operatorname{tg} bx$.
(C) $P = 2 \,.\, \operatorname{sen}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)x \,.\, \cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)x$.
(D) $P = \operatorname{sen}(a+b)x \,.\, \operatorname{sen}(a-b)x$.
(E) nenhuma é válida.

Questão: Seja dada uma progressão geométrica de três termos positivos, tal que o primeiro termo, a razão, o terceiro termo e a soma dos três termos formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Portanto, a razão da progressão geométrica é:
(A) 1. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) 3.
(E) nenhuma das respostas acima é válida.

Questão: Considere o sistema de equações algébricas lineares:

$$\begin{cases} \alpha x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = \beta \end{cases}$$

O sistema terá solução única se:
(A) $\beta = 0$ e $\alpha = 0$.
(B) $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$.
(C) $\beta \neq 0$ e $\alpha = 0$.
(D) $\beta = \alpha$.
(E) β e α forem números complexos conjugados.

Questão: Seja f uma função real tal que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, para todo x real, onde a, b, c, d são números reais. Se $f(x) = 0$, para todo x do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos, então, que:
(A) $f(6) = a + 1$. (B) $f(6) = a + 2$. (C) $f(6) = a + 3$. (D) $f(6) = d$.
(E) nenhuma das afirmações acima é válida.

Questão: Considere o conjunto C dos polinômios $P(x)$ de grau 3, tais que $P(x) = P(-x)$ para todo x real. Temos, então, que:
(A) C tem apenas dois elementos.
(B) C é o conjunto de todos os polinômios da forma $P(x) = a_o x^3 + bx$.
(C) C tem apenas um elemento.
(D) C tem uma infinidade de elementos.
(E) nenhuma das anteriores.

Questão: Considere os polinômios $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, de grau 4, tais que $P(2) = P(3) = P(4) = P(r) = 0$, onde $r \notin \{2, 3, 4\}$. Temos, então, necessariamente, que:
(A) $a_0 > 4$. (B) $a_0 < 0$. (C) $a_0 = 0$. (D) $a_0 > 0$.
(E) nenhuma das afirmações anteriores é válida.

Questão: Calculando as raízes simples e múltiplas da equação

$$x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0,$$

podemos afirmar que esta equação tem:
(A) uma raiz simples, duas duplas e uma tripla.
(B) uma raiz simples, uma dupla e uma tripla.
(C) duas raízes simples, uma dupla e uma tripla.
(D) duas raízes simples e duas duplas.
(E) duas raízes simples e uma tripla.

Questão: Sejam $P(x) = x^4 + a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ e $Q(x) = a_3x^4 + a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x$ dois polinômios. Sabendo-se que $P(x) > 0$ para todo x real, temos, então, que:
(A) $Q(a_3) > -2$. (B) $Q(a_3) \leq -3$. (C) $-2 < Q(a_3) < -1$. (D) $Q(a_3) < -3$.
(E) nenhuma das anteriores.

Questão: Seja B um subconjunto do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Dizemos que um número b é um ponto de acumulação do conjunto B, se para qualquer número real positivo k, arbitrariamente dado, existir um elemento c de B tal que $0 < |b - c| < k$. Nestas condições $b = 10$ é ponto de acumulação do conjunto dos
(A) naturais menores do que 10.
(B) naturais menores ou iguais a 10.
(C) racionais maiores do que 1 e menores ou iguais a 9.
(D) racionais maiores do que 1 e menores do que 10.
(E) nenhuma das afirmações anteriores é válida.

Questão: Quando a projeção de um ângulo θ sobre um plano paralelo a um de seus lados é um ângulo reto, podemos afirmar que:
(A) $90^{\circ} < \theta < 180^{\circ}$. (B) $\theta < 90^{\circ}$. (C) $\theta = 90^{\circ}$. (D) $\theta = 2\pi$ Rd.
(E) nenhuma das respostas acima é válida.

Questão: Quanto à soma dos ângulos que uma reta forma com dois planos perpendiculares. podemos afirmar que:
(A) é menor do que 90 graus.
(B) é igual a 90 graus.
(C) é maior do que 90 graus e menor do que 180 graus.
(D) é igual a 180 graus.
(E) não podemos garantir nenhuma das respostas acima.

Questão: Um bloco de madeira tem a forma de um paralelepípedo reto, com base quadrada de lado 5 cm e com altura 1 m. Tal bloco tem uma cavidade cilíndrica, sendo que o eixo do cilindro que determina a cavidade passa pelo centro do paralelepípedo e faz com o plano da base um ângulo de 45 graus. O cilindro corta ambas as faces do paralelepípedo segundo uma circunferência de raio 1 m. Qual é o volume do bloco?
(A) $(75-\pi)$ m^3. (B) $(25-2\pi)$ m^3. (C) $\left(25-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)$ m^3. (D) $\left(25+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)$ m^3.
(E) nenhum dos resultados acima é válido.

Questão: Constrói-se um cone cuja geratriz é tangente a uma esfera de raio r, e cujo eixo passa pelo centro dessa esfera, de modo que sua base esteja situada a uma distância $\frac{r}{2}$ do centro da esfera. O volume do cone é:
(A) $\dfrac{3}{2}\pi r^3$. (B) $\dfrac{1}{3}\pi r^3$. (C) $\dfrac{4}{3}\pi r^3$. (D) $\dfrac{9}{8}\pi r^3$.
(E) nenhum dos resultados acima é válido.

Questão: Se $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ e $h(x) = \operatorname{sen} x$, $g \circ f \circ g^{-1} \circ h \circ f(x) =$
(A) $\operatorname{sen} x$. (B) $\cos x$. (C) $\sqrt[3]{\operatorname{sen} x + 1}$. (D) x.
(E) nenhuma das anteriores

Questão: O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$, tais que o coeficiente angular da reta que passa por P e por $A(-2, 3)$ é o número simétrico (aditivo) do recíproco (inverso multiplicativo) do coeficiente angular da reta que passa por P e por $B(3, 1)$, tem como equação:
(A) $x^2 + y^2 + x - 4y + 3 = 0$.
(B) $x^2 + y^2 - x - 4y + 3 = 0$.
(C) $x^2 + y^2 = 1$.
(D) $x^2 + y^2 = 3$.
(E) N.R.A.

Questão: Considere o binômio $\left(\frac{1}{x} + ax^2\right)^{36}$. Esse binômio possui um certo termo T independente de x. Se elevarmos ax^2 a uma certa potência α, o termo independente do novo binômio será o quinto. Então:
(A) T é o 12º termo e o valor de α é 4.
(B) T é o 12º termo e o valor de α é 3.
(C) T é o 13º termo e o valor de α é 3.
(D) T é o 13º termo e o valor de α é 4.
(E) T é o 13º termo e o valor de α é 5.

Questão: Para que as equações $(2\cos a - 1)x^3 - (3\cos a - \operatorname{sen} b)x^2 - 1 = 0$ e $(\cos a + 2)x^3 + (\cos a + 3\operatorname{sen} b)x^2 + 1 = 0$ tenham as mesmas raízes, basta que:
(A) $\cos a = \frac{1}{5}$ e $\operatorname{sen} b = -\frac{1}{2}$.
(B) $0 \leq \cos a \leq -\frac{1}{3}$ e $-1 \leq \operatorname{sen} b \leq \frac{1}{2}$.
(C) $a = \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{3}\right)$ e $b = \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{1}{6}\right)$.
(D) $\cos a = -\frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen} b = -\frac{1}{5}$.
(E) nenhuma das respostas acima é suficiente.

Questão: Para que valores de a o quarto termo do desenvolvimento de $(a - \sec \frac{x}{2})^5$ é igual a $-10\left[\cos \frac{x}{2} + \operatorname{sen} \frac{x}{2} \times \operatorname{tg} \frac{x}{2} \times \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2\right)\right]$?
(A) $a = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. (B) $a = \operatorname{cosec} \frac{x}{2}$. (C) $a = \cos x$. (D) $a = \operatorname{sen} x$.
(E) nenhuma das respostas acima é válida.

Questão: Considere um triângulo qualquer ABC. Sabendo que o complementar do ângulo A é igual a α, e que o ângulo C vale 2α, podemos concluir que $\operatorname{sen}\alpha$ vale:
(A) $\dfrac{c}{2a}$. (B) $\dfrac{c}{3a}$. (C) $\dfrac{2c}{3a}$. (D) $\dfrac{c}{a}$. (E) $\dfrac{2c}{a}$.

Questão: Dado o sistema:

$$\begin{cases} x\cos a + y \operatorname{sen} a = \cos b \\ x\cos 2a + y\operatorname{sen} 2a = \cos(a+b) \end{cases}$$

Podemos dizer que, para $K = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$
(A) O sistema admite solução de $a \neq K\pi$.
(B) O sistema admite uma infinidade de soluções se $a \neq k\pi$; $2a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ e $b = (2K+1)\pi$.
(C) O sistema não admite solução quaisquer que sejam os valores de a e b.
(D) O sistema não admite solução se $a \neq K\pi$ e b qualquer.
(E) O sistema é sempre possível e determinado.

Questão: Para que valores de x será possível $\log\left[\frac{(1-\cos x)}{(1+\cos x)}\right]$?
(A) $x \neq 2K\pi$, $K = 1, 2, \ldots, n, \ldots$
(B) $x \neq K\pi$, $K = 0, 2, 4, \ldots, 2n, \ldots$
(C) $x \neq 2K\pi$, $K = 1, 3, \ldots, (2n-1), \ldots$
(D) $x \neq K\pi$, $K = 1, 3, \ldots, (2n-1), \ldots$
(E) NRA

Questão: Para que a equação $\operatorname{sen} 2x = e^m \operatorname{tg} x$, com $x \neq K\pi$, K sendo número inteiro, tenha soluções em x, os valores de m devem satisfazer a relação:
(A) $0 < m < 2$. (B) $0 < m \leq \log 5$. (C) $1 \leq m \leq \log 5$. (D) $m \leq \log 2$.
(E) nenhuma das respostas acima é válida