

# Implementação de Baixa Complexidade para Algoritmos de Estimação do Ângulo de Chegada

Tadeu N. Ferreira, Marcello L. R. de Campos e Sergio L. Netto

**Resumo**—Este artigo apresenta uma implementação de baixa complexidade para algoritmos de estimação de direção de chegada (*direction-of-arrival*, DoA) como o ESPRIT ou o *covariance-based DoA* utilizando técnicas do tipo *fast subspace decomposition* (FSD). Estas técnicas permitem ainda uma detecção automática do número de fontes e possibilitam uma redução significativa da complexidade computacional, sem qualquer perda de desempenho dos algoritmos originais.

**Palavras-Chave**—*direction-of-arrival*, decomposição em autovalores e autovetores

**Abstract**—This paper presents a low complexity implementation for some direction-of-arrival (DoA) estimation algorithms, such as ESPRIT or covariance-based DoA, using fast subspace decomposition (FSD). Such technique also provides an automatic detection of the number of sources and yields a significant computation reduction without any performance degradation in the original algorithm.

**Keywords**—*direction-of-arrival*, eigendecomposition

## I. INTRODUÇÃO

O uso de arranjo de antenas na conexão de *uplink* em sistemas de comunicações *wireless* proporciona uma série de vantagens na comparação com o sistema tradicional em que apenas uma antena é utilizada [1]. Em outras aplicações, como sistemas de radares e de captura de áudio, o processamento utilizando arranjos de sensores também apresenta vantagens significativas [2].

Considere um sistema de transmissão em banda estreita, em que as fontes estão localizadas aproximadamente num mesmo plano. Além disso, considere ainda que o meio de transmissão é isotrópico e o arranjo de recepção está localizado no campo distante (*far-field*) das fontes. Nessas condições, o problema de localização de fontes pode ser simplificado para o problema de estimação do ângulo  $\theta$  de chegada (DoA, *direction-of-arrival*), como mostrado na Fig. 1.

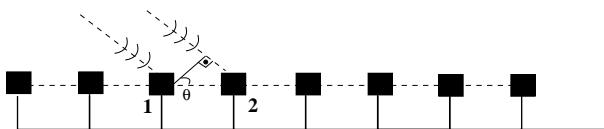


Fig. 1. Ângulo de chegada  $\theta$  a ser estimado no problema de DoA.

Inicialmente, os métodos para estimação de DoA se baseavam em técnicas não-paramétricas em que a forma de onda

Tadeu N. Ferreira, Departamento de Engenharia de Telecomunicações, Universidade Federal Fluminense (UFF), Marcello L. R. de Campos e Sergio L. Netto, Programa de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), E-mails: tadeu.n.ferreira@gmail.com, mcampos@ieee.org, sergioln@lps.ufrj.br. Este trabalho foi parcialmente financiado por CNPq, Capes e Faperj.

total do sinal transmitido precisava ser estimada [2]. Tais algoritmos apresentavam elevada complexidade computacional em sua execução. Posteriormente, foi desenvolvido o algoritmo *spectral MUSIC* (*multiple signal classification*), que estima os ângulos de DoA como parâmetros do sinal de chegada [3]. Apesar de apresentar uma complexidade bem menor do que a de algoritmos não-paramétricos, o algoritmo *Spectral MUSIC* ainda requer uma alta carga computacional por incluir uma busca exaustiva em seu processamento. Uma vantagem do *Spectral MUSIC*, porém, é a de não impor nenhuma restrição na geometria do arranjo de recepção.

O algoritmo ESPRIT (*estimation of parameters via rotational invariance techniques*) [4] atinge uma redução na complexidade computacional da estimação de DoA ao exigir algumas restrições na geometria do arranjo de recepção. Tais restrições, representadas na Fig. 2, são conhecidas como invariância à translação e se traduzem em uma redundância na representação do subespaço dos sinais conhecida como invariância à rotação (*rotational invariance*).

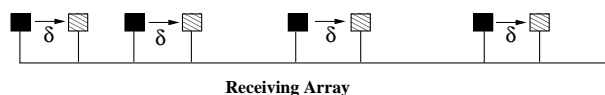


Fig. 2. Restrições típicas na geometria do arranjo de recepção impostas pelo algoritmo ESPRIT.

Recentemente, foi proposto o algoritmo CB-DoA [5], que se apresenta como uma alternativa de baixa complexidade computacional para o ESPRIT, sem prejuízo no erro médio quadrático (MSE, *mean-square error*) resultante.

Este artigo tem como objetivo apresentar uma alternativa de baixa complexidade para o CB-DoA, cuja aplicação ao ESPRIT já foi realizada em [7], substituindo as operações de decomposição em autovalores e autovetores (EVD, *eigenvalue/eigenvector decomposition*) por decomposições rápidas no espaço de Krylov [6] [7]. Verifica-se que esta substituição é capaz de reduzir a complexidade computacional do algoritmo sem afetar o desempenho correspondente.

## II. AMBIENTE PARA ESTIMAÇÃO DE DOA

Considere um sistema com  $M$  fontes de transmissão e com  $N$  antenas de recepção obedecendo às restrições de geometria do ESPRIT, representadas na Fig. 2. Sejam  $s_m(k)$  o sinal transmitido pela  $m$ -ésima fonte no instante  $k$ ,  $x_i(k)$  o sinal recebido pela  $i$ -ésima antena no instante  $k$  e  $a_i(\theta_m)$  o ganho da  $i$ -ésima antena na direção  $\theta_m$  da  $m$ -ésima fonte. Com estas

definições, podemos escrever que

$$x_i(k) = \sum_{m=0}^{M-1} s_m(k) a_i(\theta_m) + n_i(k), \quad (1)$$

para  $0 \leq i < N$ , onde  $n_i(k)$  representa um ruído branco aditivo gaussiano (AWGN, *additive white Gaussian noise*) recebido pela  $i$ -ésima antena no instante  $k$ .

Considere as seguintes estruturas matriciais,

$$\mathbf{s}(k) = [s_0(k) \quad s_1(k) \quad \dots \quad s_{M-1}(k)]^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{x}(k) = [x_0(k) \quad x_1(k) \quad \dots \quad x_{N-1}(k)]^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{n}(k) = [n_0(k) \quad n_1(k) \quad \dots \quad n_{N-1}(k)]^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0(\theta_0) & a_0(\theta_1) & \dots & a_0(\theta_{M-1}) \\ a_1(\theta_0) & a_1(\theta_1) & \dots & a_1(\theta_{M-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1}(\theta_0) & a_{N-1}(\theta_1) & \dots & a_{N-1}(\theta_{M-1}) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

onde  $\mathbf{A}$ , a matriz de ganhos direcionais das antenas receptoras em função dos DoAs, é conhecida como *array manifold*. Usando uma notação matricial, a Eq. (1) pode ser reescrita como

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k). \quad (6)$$

Os algoritmos que exploram a invariância à rotação no subespaço dos sinais (tais como o ESPRIT e o CB-DoA) necessitam que a geometria do arranjo de recepção obedeça às restrições apresentadas na Fig. 1. Neste caso, cada antena do arranjo deve fazer parte de um *doublet*, que constitui um par de antenas com vetor-deslocamento  $\delta$  constante. Isso gera dois subarranjos, um contendo as antenas de origem do vetor  $\delta$ , e outro contendo as antenas de destino desse vetor, sendo que uma mesma antena pode pertencer a ambos subarranjos.

Sendo  $P$  a dimensão dos subarranjos, podemos representar o sinal recebido  $x_{j,i}$  referente ao subarranjo  $j$  e antena transmissora  $i$  da seguinte forma:

$$x_{0,i}(k) = \sum_{m=0}^{M-1} s_m(k) a_i(\theta_m) + n_{0,i}(k), \quad (7)$$

$$x_{1,i}(k) = \sum_{m=0}^{M-1} s_m(k) e^{\frac{j\omega\delta}{c} \sin \theta_m} a_i(\theta_m) + n_{1,i}(k), \quad (8)$$

para  $0 \leq i < P$ , onde  $\omega$  representa a frequência angular da portadora e  $c$  é a velocidade de propagação da onda eletromagnética. Define-se

$$\phi_m = e^{\frac{j\omega\delta}{c} \sin \theta_m}, \quad (9)$$

onde o parâmetro  $\phi_m$  será efetivamente estimado e é referente ao termo do ganho da  $m$ -ésima antena.

### III. ESTIMAÇÃO DE DOA USANDO CB-DOA

Considere que todos os sinais possuem média estatística zero. Um modelo de covariância para o sinal recebido  $\mathbf{x}(k)$  pode ser expressado por

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_n, \quad (10)$$

onde  $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(k)\mathbf{s}^H(k)]$  representa a covariância do sinal transmitido enquanto  $\mathbf{R}_n$  é a covariância do ruído. Supõe-se aqui que as fontes sejam descorrelacionadas entre si, ou seja,  $\mathbf{R}_s$  é diagonal, enquanto o ruído é considerado espacialmente branco, ou seja,  $\mathbf{R}_n = \sigma^2\mathbf{I}$ .

Considere as matrizes de seleção  $\mathbf{J}_0^{a,b}$  e  $\mathbf{J}_1^{a,b}$  tais que

$$\mathbf{J}_0^{a,b} = [\mathbf{I}_a \quad \mathbf{0}_{a \times (b-a)}]; \quad \mathbf{J}_1^{a,b} = [\mathbf{0}_{a \times (b-a)} \quad \mathbf{I}_a], \quad (11)$$

onde  $\mathbf{I}_a$  é uma matriz identidade com dimensões  $a \times a$ . Com isso,  $\mathbf{J}_0^{A,B}$  e  $\mathbf{J}_1^{A,B}$  selecionam as  $A$  primeiras ou últimas linhas, respectivamente, de um vetor com  $B$  linhas. Utilizando-se as equações (11), consegue-se descrever a covariância dos vetores nos subarranjos por:

$$\mathbf{R}_{00} = \mathbf{J}_0^{P,N} \mathbf{R}_x (\mathbf{J}_0^{P,N})^H, \quad (12)$$

$$\mathbf{R}_{01} = \mathbf{J}_0^{P,N} \mathbf{R}_x (\mathbf{J}_1^{P,N})^H, \quad (13)$$

$$(14)$$

de modo que

$$\mathbf{R}_{00} = \mathbf{J}_0^{P,N} \mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H (\mathbf{J}_0^{P,N})^H + \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (15)$$

$$\mathbf{R}_{01} = \mathbf{J}_0^{P,N} \mathbf{A} \mathbf{R}_s \Phi^H \mathbf{A}^H (\mathbf{J}_0^{P,N})^H + \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (16)$$

No algoritmo CB-DoA, inicialmente é feita uma decomposição de  $\mathbf{R}_{00}$  em autovalores e autovetores (EVD, *eigenvalue/eigenvector decomposition*):

$$\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{U}^H = \text{EVD}(\mathbf{R}_{00}), \quad (17)$$

onde  $\mathbf{\Lambda}^2$  contém os autovalores de  $\mathbf{R}_{00}$  em sua diagonal e  $\mathbf{U}$  contém seus autovetores correspondentes. Como mostrado em [4], os autovalores de  $\mathbf{R}_{00}$  podem ser separados em dois conjuntos de autovalores. Lembrando-se que  $M$  representa o número de fontes no sistema, então deve haver  $(P - M)$  autovalores iguais a  $\sigma^2$  enquanto os outros  $M$  autovalores são maiores que  $\sigma^2$ , e são denominados de autovalores do espaço dos sinais [4]. Estes  $M$  maiores autovalores são então agrupados na diagonal de  $\mathbf{\Lambda}_s$ , enquanto seus correspondentes autovetores são colocados nas colunas de  $\mathbf{U}_s$ , de modo que que podemos definir a matriz de projeção

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}_s^H \mathbf{\Lambda}_s^{-1}. \quad (18)$$

Aplicando-se esta transformação a ambos os lados do pêncl matricial  $\mathbf{R}_{01} - \hat{\sigma}^2\mathbf{I}$ , tem-se

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{F}(\mathbf{R}_{01} - \hat{\sigma}^2\mathbf{I})\mathbf{F}^H, \quad (19)$$

onde  $\hat{\sigma}^2$  é obtida pelos menores autovalores de  $\mathbf{\Lambda}$ , numa abordagem semelhante à utilizada no algoritmo TXK para equalização cega [8].

A estimação de  $\Phi$  é obtida a partir de uma EVD sobre  $\mathbf{\Psi}$ ,

$$\mathbf{B}\hat{\Phi}\mathbf{B}^{-1} = \text{EVD}(\mathbf{\Psi}), \quad (20)$$

onde  $\mathbf{B}$  é uma matriz de posto completo. Por fim, os elementos de  $\Phi$  são mapeados nos DoAs utilizando a eq. (9).

TABELA I

OPERAÇÕES EXIGIDAS PELOS ALGORITMOS TLS-ESPRIT E CB-DoA.

Operação	Complexidade [6]	ESPRIT	CB-DoA
EVD - Não-hermitiana	$\mathcal{O}(25n^3)$	2	1
EVD - Hermitiana	$\mathcal{O}(n^2)$	1	1
Inversão	$\mathcal{O}(2n^3/3)$	2	1
Inversão - Diagonal	$\mathcal{O}(n)$	-	1
Multiplicação	$\mathcal{O}(n^3)$	6	3
Subtração	$\mathcal{O}(n^2)$	-	1

#### IV. DECOMPOSIÇÕES USANDO ESPAÇO DE KRYLOV

Na Tabela I, observam-se as operações aritméticas requeridas pelos algoritmos ESPRIT (na versão TLS, *total least-squares*) e CB-DoA.

Nesta tabela, verifica-se o grande peso computacional exercido pela operação de EVD para ambos os algoritmos, em particular, a EVD para matrizes não hermitianas. No entanto, no caso do algoritmo CB-DoA, a matriz hermitiana sobre a qual se realiza a operação de EVD tem dimensões  $P \times P$ , enquanto que a matriz não-hermitiana na qual se aplica a outra EVD apresenta dimensões  $M \times M$ , sendo  $M$  sempre menor que  $P$  e, comumente,  $M \ll P$ . No caso da operação de EVD sobre matrizes hermitianas, existe uma solução alternativa, apresentada no artigo [7] com o nome FSD (*fast subspace decomposition*), em que há uma redução na complexidade de operações para  $\mathcal{O}(n)$ .

Além de fornecer estimação para os autovalores e autovetores da matriz de covariância  $\mathbf{R}_{00}$ , o FSD também estima o número de fontes no ambiente de forma eficiente, como discutido na Subseção IV-B. Essencialmente, o FSD funciona em duas etapas, primeiramente são feitas atualizações de Lanczos sobre a matriz de autocovariância  $\mathbf{R}_{00}$  de modo a reduzi-la a uma matriz tridiagonal. A seguir é aplicado o método para extração de autovalores e autovetores da matriz tridiagonal [6] [7].

##### A. Atualização de Lanczos

As atualizações de Lanczos são responsáveis por transformar uma matriz  $\mathbf{A}$  em uma matriz  $\mathbf{T}$  tridiagonal. Essa transformação pode ser feita pelo processo de tridiagonalização de Householder [6], ou seja, através de uma matriz ortogonal  $\mathbf{Q}$ , chega-se a uma transformação de similaridade  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^H$ . Neste caso, considere que  $\mathbf{T}$  tenha a seguinte estrutura [6]:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Como  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$ , ou seja,  $\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{Q}\mathbf{T}$ , então

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_k = \beta_{k-1}\mathbf{q}_{k-1} + \alpha_k\mathbf{q}_k + \beta_k\mathbf{q}_{k+1}, \quad (22)$$

para  $0 \leq k < n$ , onde  $\mathbf{q}_k$  representa a  $k$ -ésima coluna de  $\mathbf{Q}$ . Lembrando que  $\mathbf{Q}$  é uma matriz ortogonal, a Eq. (22) pode

ser reescrita como

$$\mathbf{q}_k^T \mathbf{A} \mathbf{q}_k = \alpha_k. \quad (23)$$

Sendo  $\mathbf{r}_k = \beta_k \mathbf{q}_{k+1}$ , então  $\beta_k = \|\mathbf{r}_k\|_2$  e

$$\mathbf{r}_k = (\mathbf{A} - \alpha_k \mathbf{I}) \mathbf{q}_k - \beta_{k-1} \mathbf{q}_{k-1}. \quad (24)$$

Com isso, as atualizações de Lanczos podem ser descritas por [6]:

```

while ( $\beta_k \neq 0$ )
     $\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{r}_k / \beta_k$ ;
     $k = k + 1$ ;
     $\alpha_k = \mathbf{q}_k^T \mathbf{A} \mathbf{q}_k$ ;
     $\mathbf{r}_k = (\mathbf{A} - \alpha_k \mathbf{I}) \mathbf{q}_k - \beta_{k-1} \mathbf{q}_{k-1}$ ;
     $\beta_k = \|\mathbf{r}_k\|_2$ ;
end
    
```

que são inicializadas com  $\beta_0 = 1$ ,  $\mathbf{q}_0 = 0$  e  $k = 0$ . Com isso, é gerada uma matriz  $\mathbf{T}$  tal que a Eq. (21) seja obedecida e, além disso,  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$ . Os autovalores de  $\mathbf{T}$  são iguais aos autovalores de  $\mathbf{A}$  e podem ser obtidos por decomposições QR de baixa complexidade devido à estrutura tridiagonal de  $\mathbf{T}$  [6].

##### B. Detecção do Número de Fontes

No algoritmo CB-DoA tradicional, a detecção do número de fontes era realizada de maneira separada por algoritmos como o AIC (Akaike's information criterion) [9], onde o número de fontes  $M$  é estimado pelo valor de  $k$  que minimiza a função

$$\text{AIC}(k) = -2 \log \left( \frac{\prod_{i=k+1}^N (\lambda_i)^{(1/(N-k))}}{\frac{1}{N-k} \sum_{i=k+1}^N \lambda_i} \right) + 2k(2N - k), \quad (25)$$

onde  $\lambda_i$  são autovalores da matriz de covariância.

No caso da detecção do número de fontes no algoritmo FSD, é utilizada a métrica

$$\text{FSD\_}\# \text{sources}(k) = \log \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{N-k} (\|\mathbf{R}_{00}\|^2 - \sum_{i=1}^k \lambda_i^2)}}{\frac{1}{N-k} (\text{Tr}(\mathbf{R}_{00}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i)} \right). \quad (26)$$

#### V. ANÁLISE DE COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

A motivação principal para a aplicação do FSD no algoritmo CB-DoA é a diminuição da complexidade computacional da operação de EVD sobre matrizes hermitianas. O algoritmo resultante é visto na Tabela II. Com a técnica FSD, há uma diminuição na complexidade da operação de EVD sobre a matriz  $\mathbf{R}_{00}$  e também na detecção do número de fontes em relação aos métodos tradicionais, como o AIC, como indicado na Tabela III. Sendo assim, a redução  $\alpha_R$  de complexidade computacional para as duas versões do algoritmo CB-DoA é dada por:

$$\alpha_R = \left( 1 - \frac{25M^3 + P^2 + 3M^2P + 2P + M}{25M^3 + P^3 + 3M^2P + 2P + M^3} \right) 100\%. \quad (27)$$

TABELA II  
DESCRIBÇÃO RESUMIDA DE OPERAÇÕES DO CB-DoA COM FSD.

CB-DoA com FSD
$\hat{M} = \text{FSD\_sources}(\mathbf{R}_{00})$
$[\mathbf{Q}, \mathbf{T}] = \text{Lanczos}(\mathbf{R}_{00}, \hat{M})$
$[\mathbf{U}_s, \hat{\sigma}_N^2] = \text{EVD\_Tridiag}(\mathbf{Q}, \mathbf{T}, \hat{M})$
$\mathbf{F} = \sum_s^{-1} \mathbf{U}_s^H$
$\mathbf{R}_a = \mathbf{R}_{01} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}$
$\mathbf{R}_1 = \mathbf{F} \mathbf{R}_a \mathbf{F}^H$
$[\Phi^H] = \text{EVD}(\mathbf{R}_1)$

TABELA III  
COMPARAÇÃO MOSTRANDO A REDUÇÃO DE COMPLEXIDADE PROPORCIONADA PELO FSD.

Operação	Compl. [6] [7]	Quant.	Flops
EVD Não-hermitiana	$\mathcal{O}(25n^3)$	1	$25M^3$
EVD Hermitiana	$\mathcal{O}(n^3)$	1	$P^3$
EVD Lanczos	$\mathcal{O}(n^2)$		$P^2$
Inversão Diagonal	$\mathcal{O}(n)$	1	$P$
Multiplicação	$\mathcal{O}(n^3)$	3	$3M^2P$
Subtração Diagonal	$\mathcal{O}(n)$	1	$P$
Deteção de Fonte (AIC)	$\mathcal{O}(n^3)$	1	$M^3$
Deteção de Fonte (FSD)	$\mathcal{O}(n)$		$M$

Uma das restrições de funcionamento do algoritmo CB-DoA é a de  $M < P$ . Em geral, pode-se afirmar que  $M \ll P$ . Num caso em que  $M = 1$  e  $P = 2$ , temos, por exemplo,  $\alpha_R = (1 - 37/48)100\% \approx 23\%$ . À medida que o valor de  $P$  é aumentado, essa redução de complexidade é mais expressiva, tendendo ao valor  $\alpha_R = (1 - 1/P)100\%$ . A Fig. 3 apresenta os resultados

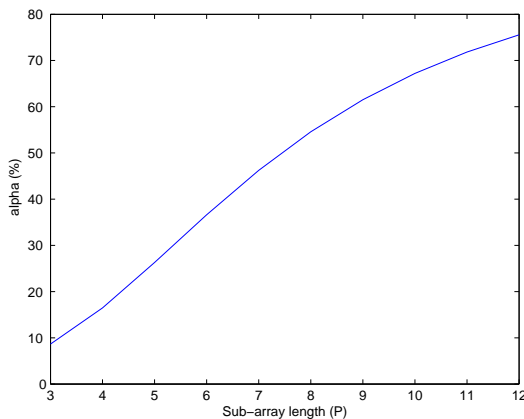


Fig. 3. Redução  $\alpha_R$  para o número de fontes fixo  $M = 2$  e a dimensão  $P$  do sub-arranjo variando entre 3 e 12.

para o caso de  $M = 2$ , variando-se o valor de  $P$  entre 3 e 12, onde se verifica uma redução bastante expressiva na complexidade do algoritmo CB-DoA progressivamente quando a dimensão  $P$  do sub-arranjo é aumentada. Destaca-se ainda desta análise que a redução de complexidade é feita em relação ao algoritmo CB-DoA, considerado de baixa complexidade quando comparado aos algoritmos alternativos para estimação

de DoA.

## VI. SIMULAÇÕES

A seção anterior procurou medir a redução de complexidade atingida ao se fazer a operação de EVD por atualizações de Lanczos e a detecção do número de fontes via FSD. O objetivo desta seção é mostrar que essa redução de complexidade não foi atingida às custas de uma degradação no desempenho do algoritmo. Para isto, a Fig. 4 mostra a evolução no MSE (*mean-square error*) do algoritmo CB-DoA tradicional e a versão FSD para uma faixa de SNR (*signal-to-noise ratio*) entre 5 e 50 dB. São usadas  $M = 2$  fontes localizadas em 2 e 7 graus, com  $P = 4$  elementos nos sub-arranjos, num total de 5 antenas de recepção. A métrica MSE é calculada por:

$$\text{MSE} = \frac{1}{2Q} \sum_{q=1}^{300} \sum_{m=1}^2 |\theta_m - \hat{\theta}_m|^2, \quad (28)$$

ou seja, é feita uma média dos erros quadráticos na estimação dos  $\theta$  para cada fonte e nas realizações de Monte-Carlo, que no caso foram 300. Verifica-se, a partir da Fig. 4, que o MSE das

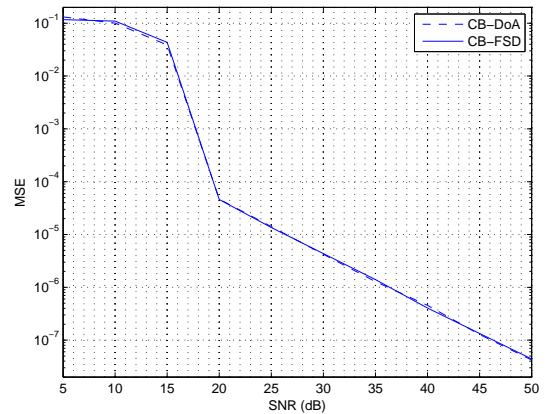


Fig. 4. Simulação do algoritmo CB-DoA, com EVD calculado de maneira tradicional e com detecção de fonte por AIC (legenda CB-DoA) e a versão com FSD (legenda CB-FSD) com  $M = 2$  e  $P = 4$ .

duas versões do algoritmo CB-DoA é praticamente o mesmo para toda a faixa de SNR, sendo que nesse cenário em que  $M = 2$  e  $P = 4$ , tem-se uma redução de 16,5% no número de flops utilizando a técnica FSD.

## VII. CONCLUSÕES

Neste artigo foi apresentada uma nova versão para o algoritmo CB-DoA com menor custo computacional de implementação. O novo algoritmo CB-DoA também possui um método para detecção automática para o número de fontes, com menor custo que os métodos clássicos. Simulações computacionais indicam que estas simplificações aritméticas não provocam qualquer perda de desempenho do algoritmo resultante.

## REFERÊNCIAS

- [1] L. C. Godara, "Applications of Antenna Arrays to Mobile Communications I: Performance Improvement, Feasibility and System Considerations," *Proceedings of the IEEE*, v. 85, n. 7, pp 1031-1060, July 1997.
- [2] H. L. van Trees, "Optimum Array Processing," John Wiley and Sons, New York, 2002.
- [3] R. O. Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. AP-34, n. 3, pp. 276-280, March 1986.
- [4] R. Roy e T. Kailath, "ESPRIT - Estimation of Parameters via Rotational Invariance Techniques," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v. 37, n. 7, pp. 984-995, July 1989.
- [5] T. Ferreira, S. L. Netto e P. S. R. Diniz, "Low Complexity Covariance-based DoA Estimation Algorithm," In: *Proceedings of the 15th European Signal Processing Conference*, pp. 100-104, Poznan, September 2007.
- [6] G. H. Golub e C. F. van Loan, *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 3<sup>rd</sup> edition, Baltimore, 1996.
- [7] G. Hu e T. Kailath, "Fast Subspace Decomposition," *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 42, n. 3, pp. 539-551, March 1994.
- [8] L. Tong, G. Xu and T. Kailath, "Blind Identification and Equalization Based on Second-Order Statistics: A Time-Domain Approach," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 40, n. 2, pp. 340-349, March 1994.
- [9] M. Wax and T. Kailath, "Detection of Signals by Information Theoretic Criteria," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v. 33, n. 2, pp. 387-392, April 1985.