

OTIMIZAÇÃO DE TRANSCÉPTORES FIR BASEADOS EM BANCOS DE
FILTROS APLICADOS À COMUNICAÇÃO DIGITAL MÓVEL E FIXA

Miguel Benedito Furtado Júnior

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. Paulo Sergio Ramirez Diniz, Ph.D.

Prof. Sérgio Lima Netto, Ph.D.

Prof. Marcello Luiz Rodrigues de Campos, Ph.D.

Prof. Eduardo Antônio Barros da Silva, Ph.D.

Prof. Glaucio Lima Siqueira, Ph.D.

Prof. Renato da Rocha Lopes, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2006

FURTADO, MIGUEL BENEDITO

Otimização de Transceptores FIR Baseados em Bancos de Filtros Aplicados à Comunicação Digital Móvel e Fixa [Rio de Janeiro] 2006

XVI,164 p 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Elétrica, 2006)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1.Bancos de Filtros 2.Programação Quadrática 3.Otimização 4.Bancos Modulados 5.Transceptor 6.Comunicações

I.COPPE/UFRJ II.Título (série)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela saúde e paz.

Agradeço aos meus pais, Miguel e Leonor, pelo apoio ininterrupto desde a minha concepção.

Agradeço aos meus irmãos Christian e Milena, e respectivos cônjuges Luciane e Mauro, pelo convívio e pelos momentos alegres vividos, assim como minha noiva Renata, pelo incessante auxílio, conforto, apoio e amor.

Agradeço a todos os amigos, e em especial ao Paulo Vítor, pela honra da troca de aprendizado.

Agradeço aos orientadores Paulo e Sérgio, pelo inestimado apoio e compreensão.

Dedico essa Tese a todos acima mencionados, e em especial à minha avó Lucy, que aos seus 95 anos de idade luta para ver esse sonho concretizado: o meu diploma de Doutor em Ciências pela COPPE, hoje conceito máximo em doutorado em engenharia elétrica da CAPES no Brasil! Agradeço a Deus a generosidade de me ofertar esse momento.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

OTIMIZAÇÃO DE TRANSCETORES FIR BASEADOS EM BANCOS DE
FILTROS APLICADOS À COMUNICAÇÃO DIGITAL MÓVEL E FIXA

Miguel Benedito Furtado Júnior

Setembro/2006

Orientadores: Paulo Sérgio Ramirez Diniz

Sérgio Lima Netto

Programa: Engenharia Elétrica

As técnicas de transmissão digital de sinais estão sempre em contínua evolução, visando atingir maiores taxas de transmissão da informação com maior imunidade ao ruído e interferidores, e minimizando a ocupação espectral. Dentro desse contexto se encontram as pesquisas realizadas em sistemas transceptores baseados em bancos de filtros.

Nos últimos anos, técnicas como o OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*) se difundiram nas mais variadas aplicações devido à robustez e baixa complexidade computacional, e se tornaram um *benchmark* para novos sistemas transceptores a serem projetados.

Este trabalho de tese tem o intuito de prover soluções alternativas ao OFDM para aplicações em sistemas de comunicação digital com e sem fio. A pesquisa visa projetar bancos de filtros otimizados que serão utilizados como transceptores FIR, visando atingir maior taxa de transmissão do que o OFDM, resultando, porém, em um aumento da complexidade computacional do sistema.

A pesquisa de tese desenvolve soluções baseadas em bancos de filtros modulados e/ou paraunitários, com e sem redundância, otimizados em função de figuras de mérito de distorção, que direta ou indiretamente reduzem a susceptibilidade do sistema à degradação causada por meios físicos hostis, mitigando interferidores e melhorando a taxa de erro de bits.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Science (D.Sc.)

FILTER BANK BASED FIR TRANSCEIVER OPTIMIZATION APPLIED TO
FIXED AND MOBILE DIGITAL COMMUNICATIONS

Miguel Benedito Furtado Júnior

September/2006

Advisors: Paulo Sérgio Ramirez Diniz

Sérgio Lima Netto

Department: Electrical Engineering

Digital signal transmission techniques are continually evolving, aiming at achieving high data throughput with increased immunity to noise and interference signals, and minimal spectral occupation. In this context one may find many researches focused on transceiver systems based on filter banks.

In the last few years, digital transmission techniques such as OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) were deployed in a wide range of applications due to robustness and low computational complexity, becoming a benchmark to be beaten by new transceiver systems under development.

This research aims at providing alternative transceiver design techniques which may result in systems with better performance than OFDM in wired and wireless applications. In order to accomplish this objective, the research proposes new filter bank based FIR transceivers and second order optimization methods. The resulting systems have increased computational complexity, but excellent trade-off between complexity and transmission efficiency.

This thesis research proposes solutions based on modulated and/or paraunitary filter banks, with or without redundancy, optimized according to distortion functions which direct or indirectly reduce susceptibility to degradations inherent to hostile transmission media, mitigating interferer and improving the BER.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	As Telecomunicações e o Processamento Digital de Sinais	1
1.2	Propósito do Trabalho	2
2	Bancos de Filtros e Transceptores Multicanais	4
2.1	Introdução aos Bancos de Filtros	4
2.2	Decimação e Interpolação	5
2.3	Algumas Propriedades de Decimação e Interpolação	7
2.3.1	Identities Nobres	7
2.3.2	Decomposições Polifásicas	7
2.4	Análise Matricial	9
2.5	Reconstrução Perfeita	11
2.6	Transmultiplexadores ou Transceptores Multicanais	13
2.6.1	Definições	14
2.6.2	Análise no Domínio z	15
2.6.3	Análise por Filtragem em Blocos	19
2.7	Figuras de Mérito de Bancos de Filtros e Transmultiplexadores	24
2.7.1	Figuras de Mérito dos FBs	24
2.7.2	Figuras de Mérito dos Transmultiplexadores	26
2.8	Bancos de Filtros Modulados (MFBs)	29
2.9	PR em MFBs Paraunitários	32
2.10	Complexidade Computacional	33
2.11	Conclusão	35
3	Técnicas de Otimização	36

3.1	Introdução à Otimização Quadrática com e sem Restrições	36
3.2	Otimização sem Restrições	37
3.3	Busca do Melhor Passo de Atualização	39
3.4	Otimização com Restrições	40
3.4.1	Atualização da Hessiana	42
3.4.2	Solução QP	42
3.4.3	Procura em Linha e Função de Mérito	44
3.5	Conclusão	44
4	Otimização de Bancos de Filtros Modulados Não-Redundantes	46
4.1	O Projeto do Banco MFB	47
4.2	Condições de Seletividade e Função Objetivo	48
4.3	O Algoritmo PCLS	51
4.4	Restrições no Domínio da Frequência	54
4.5	Restrições no Domínio do Tempo	58
4.6	Procedimento de Otimização com Ajuste Fino	61
4.7	Exemplos Numéricos	62
4.7.1	Exemplo numérico sem restrição de <i>aliasing</i>	63
4.7.2	Exemplo Numérico com Restrição de <i>Aliasing</i>	64
4.8	Conclusão	68
5	Projeto de MFBs de Alta Complexidade	70
5.1	MFBs Baseados na Técnica FRM	70
5.2	Condições de Seletividade e Função Objetivo para FRM-MFBs	73
5.3	Restrições no Domínio da Frequência para os FRM-MFBs	74
5.4	Restrições no Domínio do Tempo para os FRM-MFBs	75
5.5	Exemplos Numéricos de Alta Complexidade	76
5.5.1	Exemplo de Banda Larga	77
5.5.2	Exemplo de Banda Estreita	79
5.6	Conclusão	82
6	Otimização de Bancos de Filtros Redundantes	84
6.1	MFBs Não-Redundantes com Reconstrução Perfeita	85
6.2	Transceptores Redundantes Baseados em estruturas de MFBs	86

6.2.1	Transmissor Mono-Portadora e Receptor Multi-Portadora . . .	86
6.2.2	Transceptor Multi-Portadora Codificado	92
6.3	Transceptor Redundante Baseado em FB Paraunitário	94
6.4	Exemplos Numéricos	99
6.5	Conclusão	108
7	Simulações de Sistemas Transceptores	109
7.1	Estudo do Meio Físico	109
7.1.1	O Meio Físico Variante no Tempo	110
7.1.2	Seletividade em Freqüência	112
7.1.3	Efeito Doppler	113
7.2	Técnicas de Equalização	114
7.2.1	Filtragem de Wiener	115
7.2.2	Filtragem Adaptativa LMS	116
7.2.3	Equalização com Realimentação de Decisão	117
7.3	Equalização Aplicada ao Transceptor FIR	117
7.3.1	Encurtamento do Canal	118
7.3.2	Equalizador Combinador a Posteriori	119
7.4	Resultados de Simulações	122
7.4.1	Comparação entre OFDM e MFB Frente a Ruído Aditivo e Interferidor	123
7.4.2	Transceptor Redundante para Canal Invariante no Tempo . . .	125
7.4.3	Transceptor Redundante para Canal Complexo Invariante no Tempo	128
7.4.4	Transceptor Redundante para Canal Complexo Variante no Tempo	129
7.5	Conclusão	133
8	Conclusão	134
	Referências Bibliográficas	137
A	O Segundo Algoritmo de Dutta e Vidyasagar	144
B	Cálculo das Distorções e Respectivas Derivadas	148

C	Reconstrução Perfeita com Estruturas Treliça	154
D	Filtro de Wiener Complexo	157
D.1	Teoria Básica	157
D.2	Processos Complexos	158
D.3	Desenvolvimento Simplificado	160
E	Filtragem de Wiener Multi-Estágios	162

Lista de Figuras

2.1	Banco de filtros com fator de decimação/interpolação de N	5
2.2	Decimação por um fator de N	6
2.3	Interpolação por um fator de L	6
2.4	Propriedades nobres: (a) Decimação; (b) Interpolação.	8
2.5	Decimação com componentes polifásicas.	10
2.6	Interpolação com componentes polifásicas.	10
2.7	Banco de filtros M -bandas em função das matrizes polifásicas.	12
2.8	Reconstrução perfeita em banco M -bandas.	13
2.9	Sistema transmultiplexador de M canais, sobreamostrado com taxa N	14
2.10	Estrutura de complexidade reduzida do TMUX sobreamostrado M - canais.	16
2.11	Descrição entrada/saída da matriz de canal $\mathbf{C}(z)$	17
2.12	Estrutura de complexidade reduzida do TMUX sobreamostrado M - canais com implementação causal (prática).	19
2.13	Banco de filtros redundante no domínio do tempo.	20
4.1	Função erro $E(\omega)$ (linha pontuada), e suas derivações $B(\omega)$ (en- voltória, linha tracejada-pontuada) e $V(\omega)$ (linha sólida), para um filtro genérico passa-baixas.	53
4.2	Projetos PCLS no Exemplo 4.7.1	65
4.3	Banco CMFB otimizado com critério LS.	66
4.4	Projeto PCLS no Exemplo 4.7.2	67
5.1	A estrutura FRM.	72
5.2	Filtro de Nyquist de $2M$ -ésima banda composto por subfiltros FRM.	76

5.3	Resposta em magnitude e detalhe na banda passante para os protótipos FRM otimizados usando restrições FD no Exemplo 5.5.1: (a) projeto LS; (b) projeto minimax.	80
5.4	Resposta em magnitude e detalhe na banda passante para os filtros protótipos FRM otimizados usando restrições TD no Exemplo 5.5.1: (a) projeto LS; (b) projeto minimax.	80
5.5	FRM-MFB resultante do Exemplo 5.5.2: (a) resposta em magnitude e detalhe na banda passante; (b) algumas subbandas de baixa frequência do FRM-MFB: 8 de um total de 2048.	82
6.1	Estrutura de complexidade reduzida do transceptor SCMC com M canais e do equalizador propostos.	91
6.2	Estrutura de complexidade reduzida do transceptor redundante baseado em MFB N -canais com pré-codificador e decodificador.	93
6.3	Resposta em magnitude dos 8 subcanais do sistema SCMC com $\rho = 10$ e $\rho = 1$	101
6.4	Resposta em magnitude do sistema CMC	103
6.5	Resposta em magnitude dos subcanais do transmissor PSC com $\rho = 10$ e ordem $N_f = 80$	104
6.6	Resposta em magnitude de todos os canais do transmissor SC.	106
6.7	Resposta em magnitude dos subcanais do transmissor DMT.	107
7.1	Equalização orientada à decisão.	115
7.2	Equalização com realimentação de decisão.	118
7.3	Conjunto transceptor FIR/equalizador.	119
7.4	Equalizador combinador a posteriori M -canais.	120
7.5	Exemplo 7.4.1: (a) Resposta em magnitude do OFDM com eixo de frequências ampliado ($f_s T = 1, 0$ Hz); (b) Resposta em magnitude do transceptor MDFT com ampliação do eixo de frequências.	124

7.6	Exemplo 7.4.1: (a) BER atingida para canal AWGN; (b) PSD do interferidor ocupando 4 subbandas do sistema transceptor; (c) SIR para $P_s = 0$ dB e $P_c \approx 20$ dB para os sistemas OFDM e MDFT; (d) SIR para $P_s = 0$ dB e $P_c \approx 20$ dB, para os sistemas SC e CMC MDFT (com pré e pós-codificação).	125
7.7	Exemplo 7.4.2: (a) Resposta em magnitude do canal real; (b) PSD do interferidor; (c) BER em função da SNR para canal AWGN com e sem interferidor.	127
7.8	Exemplo 7.4.3: (a) Resposta em magnitude do canal; (b) BER em função da SNR para canal seletivo AWGN sem e com interferidor (<i>color</i>).	129
7.9	Exemplo 7.4.4: (a) Resposta em magnitude de uma das subbandas dos transceptores OFDM e MDFT (eixo de frequências cobrindo a faixa de 56 subbandas); (b) Idem ao anterior, cobrindo a faixa de 4 subbandas.	131
7.10	Exemplo 7.4.4: (a) BER para os sistemas OFDM e MDFT com e sem interferidor; (b) BER para os sistemas SC e CMC MDFT com e sem interferidor.	132
C.1	Estrutura treliça.	155
E.1	Uma seção do MSWF.	164

Lista de Tabelas

4.1	Complexidade computacional das formulações tradicional e simplificada, para o cálculo das funções $T_i(z)$	57
4.2	Figuras de mérito para os filtros protótipos otimizados LS e minimax no Exemplo 4.7.1. Em todos os casos, $d_1 = 0.01$ e $ISI = -43.0$ dB. . .	64
4.3	Figuras de mérito para os filtros protótipos otimizados pelo WLS modificado para o Exemplo 4.7.2. Casos $J = 1$ e $J = N_I = 60$ correspondem aos projetos LS e minimax, respectivamente. Em todos os casos, $d_1 = 0.01$ e $ISI = -43.0$ dB.	68
5.1	Configurações para os subfiltros FRM e o filtro final resultante no Exemplo 5.5.1.	78
5.2	Figuras de mérito resultantes dos projetos em forma direta e FRM no Exemplo 5.5.1, com restrições FD.	79
5.3	Figuras de mérito resultantes para as formas direta e FRM nos projetos do Exemplo 5.5.1, ao usar restrições de desigualdade TD.	79
5.4	Configurações para os subfiltros FRM e o filtro protótipo resultante no Exemplo 5.5.2.	83
5.5	Figuras de mérito resultantes do FRM-MFB do Exemplo 5.5.2 com o critério de otimalidade LS.	83
6.1	Especificações e figura de distorção dos transceptores projetados na Seção 6.4.	105

Glossário

- AWGN - Additive White Gaussian Noise (ruído branco aditivo gaussiano)
- BER - Bit-Error Rate (taxa de erro de bits)
- BFGS - Broyden, Fletcher, Goldfarb, and Shanno (procedimento de otimização quadrática do tipo Quasi-Newton)
- BR - Bit Rate (taxa de bits)
- CMC - Coded Multi-Carrier (multi-portadora codificado)
- CMFB - Cosine Modulated Filter Bank (banco de filtros modulado à cosseno)
- CS - Channel Shortening (técnica de equalização de encurtamento de canal)
- CP - Cyclic Prefix (prefixo cíclico)
- DCT - Discrete Cosine Transform (transformada discreta cosseno)
- DDE - Decision-Directed Equalization (equalização orientada à decisão)
- DF - Direct-Filter (realização direta de filtros)
- DFE - Decision-feedback Equalizer (equalizador com realimentação de decisão)
- DFP - Davidon, Fletcher, and Powell (procedimento de otimização quadrática do tipo Quasi-Newton)
- DFT - Discrete Fourier Transform (transformada discreta de Fourier)
- DMT - Discrete Multi-Tone (Multi-ton discreto)
- DST - Discrete Sine Transform (transformada discreta seno)
- FB - Filter Bank (banco de filtros)
- FD - Frequency-Domain (domínio da frequência)
- FDM - Frequency-Domain Multiplexing (multiplexação no domínio da frequência)
- FDIC - Frequency-Domain Inequality Constraints (restrições de desigualdade no domínio da frequência)
- FIR - Finite Impulse Response (resposta ao impulso finita)
- FRM - Frequency-Response Masking (mascaramento da resposta em frequência)
- GP - General Problem (problema geral de otimização)
- ICI - Intercarrier Interference (interferência inter-portadoras)
- ISI - Intersymbol Interference (interferência inter-símbolos)

KT - Kuhn Tucker

LS - Least-Squares (mínimos quadrados)

LOS - Line-of-Sight (linha de visada direta)

MAN - Metropolitan Area Network (rede metropolitana)

MDFTFB - Modified DFT Filter Bank (banco de filtros DFT modificado)

MFB - Modulated Filter Bank (banco de filtro modulado)

MIMO - Multiple-Input Multiple-Output (múltiplas entradas e múltiplas saídas)

MINIMAX - Minimum of maximum (mínimo do máximo)

MMSE - Minimum MSE (MSE mínimo)

MOF - Modified Objective Function (função objetivo modificada)

MSE - Mean-Square Error (erro médio quadrático)

NP - Non-Linear Programming (programação não-linear quadrática)

NPR - Near-PR (próxima da PR)

OFDM - Orthogonal Frequency-Division Multiplexing (multiplexação por divisão de frequência ortogonal)

OF - Objective Function (função objetivo)

NLOS - Non-LOS (não-LOS)

PCE - Post Combiner Equalizer (equalizador combinar à posteriori)

PCLS - Peak-Constrained Least Squares (mínimos quadrados com restrição de pico)

PR - Perfect Reconstruction (reconstrução perfeita)

PSC - Paraunitary Single-carrier (paraunitário uni-portadora)

PSD - Power Spectral Density (densidade espectral de potência)

QN - Quasi-Newton

QP - Quadratic Programming (programação quadrática)

SC - Single-Carrier (uni-portadora)

SCMC - Single-carrier Multi-carrier (uni-portadora multi-portadora)

SI - System Interference (interferência do sistema)

SIR - Signal-to-Interference Ratio (relação sinal-interferência)

SISO - Single-Input Single-Output (uma entrada e uma saída)

SMFB - Sine-Modulated Filter Bank (banco de filtros modulado à seno)

SNR - Signal-to-Noise Ration (relação sinal-ruído)

SQP - Sequentially Quadratic Programming (programação quadrática sequencial)

PDF - Probability Density Function (função densidade de probabilidade)

TD - Time-domain (domínio do tempo)

TDM - Time-domain multiplexing (multiplexação no domínio do tempo)

TDEC - Time-domain Equality Constraints (restrições de igualdade no domínio do tempo)

TDIC - Time-domain Inequality Constraints (restrições de desigualdade no domínio do tempo)

TMUX - Transmultiplexer (transmultiplexador)

WLS - Weighted Least-squares (mínimos quadrados ponderado)

ZF - Zero-forcing (imposição de zeros)

Capítulo 1

Introdução

1.1 As Telecomunicações e o Processamento Digital de Sinais

A vida moderna tem se caracterizado por um fluxo contínuo e crescente de mudanças, as quais requerem dos seres humanos uma constante adaptação. Estes, face às demandas do mundo atual, buscam cada vez mais informações, quer seja para se adequarem às necessidades do mercado de trabalho, para uma maior integração e compreensão da sociedade, ou por puro prazer em adquirir conhecimentos.

A difusão da informação no mundo atual se encontra em um nível jamais visto, muito embora a demanda ainda seja crescente. Um fator que contribuiu preponderantemente para tentar suprir a sociedade com a difusão da informação foi o avanço das telecomunicações.

Atualmente, o avanço tecnológico se faz notar claramente, seja através da Internet, da televisão, do rádio, do telefone fixo ou celular, das transmissões por satélite, por cabo ou fibra ótica.

Um fator que vem contribuindo muito para o desenvolvimento dos sistemas de telecomunicações é o emprego indiscriminado de técnicas avançadas de processamento digital de sinais, as quais permitem manipular a informação de forma que a mesma possa ser transmitida ou armazenada com mais facilidade, através de compactação ou compressão. Além disso, essas técnicas permitem o desenvolvimento de dispositivos de transmissão e recepção mais inteligentes, objetivando atingir maio-

res taxas de transmissão de dados (informação) com mais eficiência, ou seja, menor consumo de energia, ocupação espectral e erros de recepção.

Nos dias atuais, a busca por informação tem motivado o desenvolvimento de sistemas capazes de fornecer mobilidade, com o propósito de permitir que a comunicação seja efetivada e não se interrompa, independentemente da localização geográfica e da forma como a mesma varie com o tempo. Então, dado o exposto, os meios atuais de comunicação que têm sido explorados para suprir tal requisito de mobilidade são baseados em transmissão sem fio ou *wireless*. Dessa forma, dentre os requisitos da sociedade moderna referentes ao acesso à informação, podem ser citadas a demanda por altas taxas de transmissão e a mobilidade.

Atualmente, uma técnica de transmissão capaz de aliar razoável robustez, mobilidade e simplicidade é a baseada em OFDM ou *orthogonal frequency division multiplexing* [1, 2]. Tal técnica vem sendo utilizada em padrões de televisão digital com transmissão por *broadcasting*, seja terrestre ou por satélite, além de sistemas de rádio digital, redes de computadores, e enlaces terrestres de curto alcance. A telefonia móvel não usa esse padrão, mas pode vir a ser adotado na geração futura de comunicação celular, a 4G [1].

É no âmbito de verificar soluções eficientes para a próxima geração de telefonia celular e para outros sistemas com transmissão com e sem fio que se insere este trabalho.

1.2 Propósito do Trabalho

Este trabalho tem o propósito de desenvolver técnicas de otimização de sistemas de transmissão e recepção digitais baseados em mono e multiportadoras (*single-carrier* e *multicarrier* respectivamente), que sejam robustos o suficiente para garantir uma qualidade de recepção melhor do que a já difundida e amplamente utilizada técnica OFDM [1].

Os sistemas propostos consistem em transceptores, isto é, conjunto transmissor/receptor, também conhecidos como transmultiplexadores ou TMUXes. Tais sistemas podem ou não apresentar memória (no objeto de estudo possuem memória), e são baseados em bancos de filtros [3, 4].

Dentre os bancos de filtros existentes na literatura, há uma classe especial, a dos MFBs (*modulated filter banks*), usados em sistemas multiportadora. Os demais serão aqui tratados apenas como FBs (*filter banks*), bancos de filtros genéricos. Dentre os MFBs, os que serão usados neste trabalho são os CMFBs (*cosine modulated filter banks*) [3, 4, 5], os SMFBs (*sine modulated filter banks*) [6], e os MDFTs (*modified DFT filter banks*) [7]. Dentre os FBs utilizados, destacam-se os paraunitários [3].

No trabalho proposto, dada a existência de um meio físico pelo qual a transmissão é realizada e a sua versão digitalizada, conhecida como canal digital ou simplesmente canal, será feita a suposição de se conhecer pelo menos a ordem ou comprimento do canal.

O desempenho do sistema é medido com figuras de mérito adequadas a um sistema de comunicação, e será melhorado com o uso de equalizadores fixos ou adaptativos [8, 9].

Algumas técnicas de otimização quadrática serão alvo de estudo porque são necessárias para otimizar o sistema TMUX como um todo face à deterioração introduzida pelo meio, isto é, um canal com ou sem fio.

O trabalho é desenvolvido em torno de simulações feitas no software MATLAB[®], para canais fixos e variantes no tempo.

A organização do trabalho é a seguinte: nos Capítulos 2, e 3 são apresentados os fundamentos teóricos que envolvem essa tese; o Capítulo 4 aborda as técnicas desenvolvidas para a realização de projetos de transceptores não-redundantes baseados em bancos de filtros modulados; o Capítulo 5 evolui a abordagem anterior para sistemas de alta complexidade (filtros de ordem elevada) e o Capítulo 6 a estende ao uso em sistemas redundantes, e aborda transceptores redundantes mais generalistas, baseados em sistemas paraunitários; no Capítulo 7 são apresentados modelos teóricos para alguns canais digitais, e os resultados de simulações da operação dos sistemas transceptores desenvolvidos, com transmissão por meios físicos distintos, fazendo uso dos canais previamente mencionados. Finalmente, a conclusão da pesquisa de tese é apresentada no Capítulo 8.

Capítulo 2

Bancos de Filtros e Transceptores Multicanais

Neste capítulo serão apresentados os fundamentos teóricos necessários ao bom entendimento da pesquisa de tese realizada. Para tanto, serão apresentados os conceitos de bancos de filtros e de transmultiplexadores (transceptores multicanais).

Para o leitor que já é muito familiarizado ao assunto, a leitura deste capítulo é opcional.

2.1 Introdução aos Bancos de Filtros

Algumas aplicações de processamento de sinais digitais requerem a decomposição de um sinal de banda larga em várias faixas de frequência (subbandas) para análise e processamento. Cada subbanda pode ter a sua taxa de amostragem reduzida à taxa de Nyquist que atenda a sua banda espectral, a qual é uma fração do espectro do sinal original, evitando assim redundância ou excesso de amostras. O sinal decomposto em subbandas, após análise e processamento, pode ser convertido novamente no sinal original de banda-larga, com ou sem perdas, dependendo das operações que foram realizadas e da forma com o qual é sintetizado. Ou seja, a síntese a partir das subbandas permite a recomposição do sinal original com perfeição ou com perdas de informação.

Uma simples, mas importante aplicação de banco de filtros é a análise espectral. Nesse caso, realiza-se um banco com um número total de subbandas M ,

onde cada subbanda é responsável por detectar uma faixa de frequências do sinal a ser analisado. A partir da análise espectral, muitas outras aplicações podem ser desenvolvidas.

A estrutura de um banco de filtros superamostrado (redundante) com fator de decimação e interpolação N , é representada na Figura 2.1. Os filtros $H_m(z)$, $m = 0, \dots, M - 1$ ($M > N$), são conhecidos como filtros de análise, e os filtros $F_m(z)$ são conhecidos como filtros de síntese. Essa estrutura será explicada em detalhes na Seção 2.4.

2.2 Decimação e Interpolação

Bancos de filtros usam os recursos de decimação e interpolação, que servem para mudar a taxa de amostragem do sistema conforme o necessário. A mudança da taxa de amostragem em sistemas discretos é sempre possível, tomando alguns cuidados [3, 4].

A decimação de um sinal discreto por um fator N se traduz em selecionar uma amostra a cada N . Esse procedimento implica em uma redução da taxa de amostragem do sistema. O sinal decimado $x_d(n)$ é obtido através de amostras do sinal discreto original $x(m)$ com a relação

$$x_d(n) = x(nN). \quad (2.1)$$

O diagrama de blocos que representa uma decimação por N é representado na Figura 2.2.

O espectro de um sinal decimado possui relação estreita com o espectro do sinal original [4], a qual é dada pela equação (2.2), que estabelece que o espectro do sinal decimado é dado por um somatório de versões do espectro original expandidas

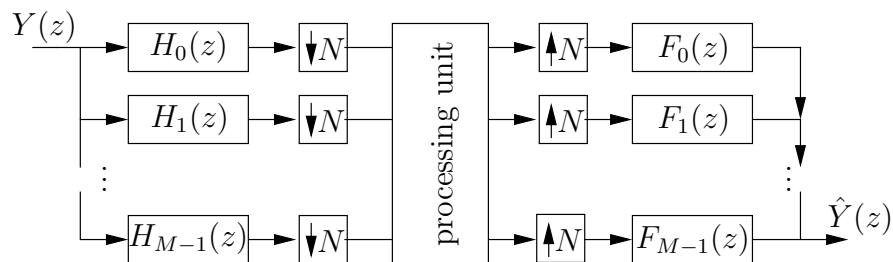


Figura 2.1: Banco de filtros com fator de decimação/interpolação de N .

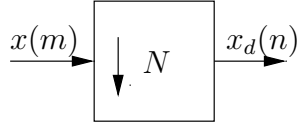


Figura 2.2: Decimação por um fator de N .

de N e deslocadas de 2π . Dessa forma, para evitar *aliasing* após a decimação, é necessário filtrar o sinal original para mantê-lo com uma banda no intervalo $[-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}]$. Para isso, usa-se um filtro passa-baixa $H_d(e^{j\omega})$ com banda passante de acordo com o mencionado.

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{N}}) \quad (2.2)$$

Uma observação importante que deve ser feita a respeito da operação de decimação é que ela é variante no tempo, ou seja, se o sinal de entrada $x(m)$ sofre um deslocamento, o sinal $x_d(n)$ não será necessariamente uma versão deslocada do sinal de entrada. Isso somente ocorrerá se o deslocamento do sinal de entrada for de um fator $kN, k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, a operação de decimação é dita periodicamente invariante no tempo [10].

Agora, no caso da interpolação por um fator L , o sinal original $x(m)$ deve ter o acréscimo de $(L - 1)$ zeros entre suas amostras para formar o sinal $x_i(n)$, ou seja,

$$x_i(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = kL, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.3)$$

O diagrama de blocos do processo de interpolação é representado na Figura 2.3.

O espectro $X_i(e^{j\omega})$ do sinal interpolado está relacionado com o espectro do sinal original de acordo com a equação (2.4). Isso implica em que o espectro do sinal interpolado é uma versão comprimida por um fator de L do espectro do sinal original, apresentando um período de repetição de $\frac{2\pi}{L}$.

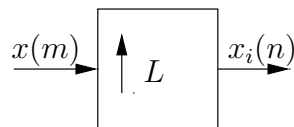


Figura 2.3: Interpolação por um fator de L .

$$X_i(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \quad (2.4)$$

A operação de interpolação, ao contrário da decimação, é invariante no tempo [10]. Isto é, se o sinal de entrada $x(m)$ for deslocado, a saída $x_i(n)$ será também deslocada pelo mesmo fator.

No processo de interpolação, o sinal obtido $x_i(n)$ apresenta uma redução da energia média por um fator de L^2 . Dessa forma, sistemas interpoladores são comumente implementados com ganhos de fator L , para manter o valor da energia média do sinal original.

2.3 Algumas Propriedades de Decimação e Interpolação

2.3.1 Identidades Nobres

Duas importantes propriedades que são utilizadas em bancos de filtros estão relacionadas com as operações de interpolação e decimação [4]. A primeira propriedade estabelece que filtrar um sinal $x(m)$ com um filtro cuja transformada z da resposta impulsional é $H(z^N)$ e depois decimar o resultado de N , é equivalente a decimar o sinal $x(m)$ por um fator N e filtrá-lo com um filtro $H(z)$. Matematicamente teríamos $\mathcal{D}_N\{X(z)H(z^N)\} = H(z)\{\mathcal{D}_N X(z)\}$. O operador \mathcal{D}_N denota a decimação por fator N . A Figura 2.4(a) mostra o diagrama de blocos dessa propriedade.

Uma segunda propriedade importante está relacionada à interpolação e estabelece que interpolar um sinal $x(m)$ com um fator N e filtrá-lo com um filtro cuja resposta é $H(z^N)$, se equivale a filtrar esse mesmo sinal $x(m)$ com um filtro $H(z)$ e interpolar o resultado. Matematicamente temos $\mathcal{I}_N\{X(z)H(z)\} = H(z^N)\{\mathcal{I}_N X(z)\}$. Essa propriedade está representada na Figura 2.4(b).

2.3.2 Decomposições Polifásicas

As decomposições polifásicas são úteis para se analisar bancos de filtros porque apresentam uma nova forma de se arrumar a estrutura do banco, permitindo que o mesmo não seja mais visto pelos seus subfiltros que compõem os ramos, mas

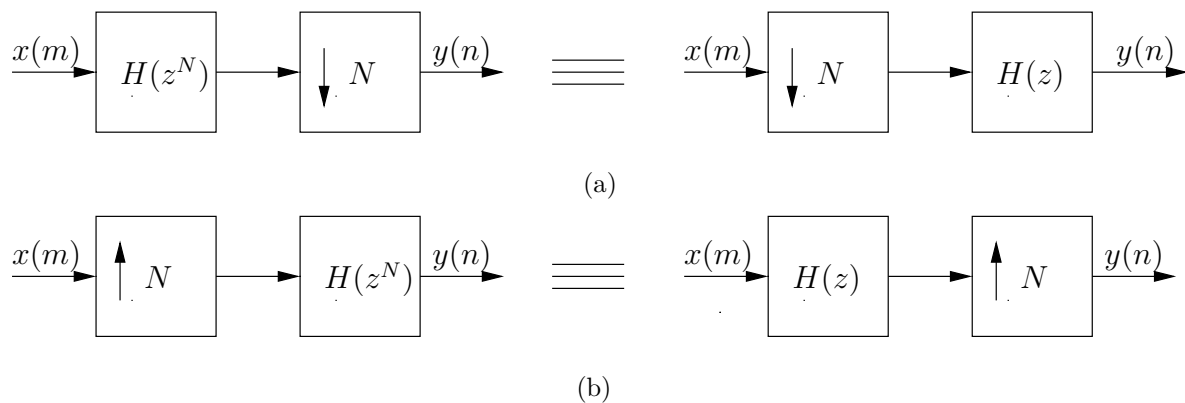


Figura 2.4: Propriedades nobres: (a) Decimação; (b) Interpolação.

sim por suas componentes polifásicas [3]. A decomposição polifásica de um filtro $h(n)$ cuja transformada z é dada por $H(z)$ segue de acordo com a equação (2.5). Nessa equação, percebe-se que o filtro original $H(z)$ foi reescrito de forma a ser interpretado como um somatório de polinômios $E_j(z^N)$ (componentes polifásicas), $j = 0, \dots, N - 1$, cada um com um devido atraso z^{-j} .

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(lN)z^{-lN} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(lN + 1)z^{-(lN+1)} + \dots \\
 &\quad + \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(lN + N - 2)z^{-(lN+N-2)} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(lN + N - 1)z^{-(lN+N-1)} \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(lN)z^{-lN} + z^{-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(lN + 1)z^{-(lN)} + \dots \\
 &\quad + z^{-(N-2)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(lN + N - 2)z^{-(lN)} + z^{-(N-1)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(lN + N - 1)z^{-(lN)} \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1} z^{-j} E_j(z^N). \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

O termo $E_j(z)$ em (2.5) é definido por

$$E_j(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(lN + j)z^{-l}. \tag{2.6}$$

Esta decomposição do filtro $H(z)$ em N subfiltros com resposta $E_j(z^N)$, $j = 0, \dots, N - 1$, permite que a simples operação de filtragem seguida de decimação seja interpretada de uma nova forma. A Figura 2.5(a) representa a operação básica de filtragem seguida de decimação. A Figura 2.5(b) representa a mesma operação, só

que vista a partir das componentes polifásicas de $H(z)$ e a Figura 2.5(c) representa essa mesma operação, só que aplicando a propriedade nobre da decimação, onde filtrar um sinal com o filtro $H_d(z^N)$ seguido de decimação por N é igual a decimar por N e filtrar com $H_d(z)$.

Uma observação interessante que se faz a partir da Figura 2.5(c) é que apenas amostras de $x(m)$ que são múltiplas de N mais um inteiro k são filtradas pelo filtro de componente polifásica $E_k(z)$, $k = 0, \dots, N - 1$. Ou seja, cada subfiltro recebe como entrada uma versão deslocada (atrasada) e decimada do sinal $x(m)$ e, sendo assim, nenhuma amostra desse sinal servirá de entrada para mais do que um único ramo da estrutura.

No caso da interpolação, a decomposição polifásica do filtro $F(z)$ que sucede o interpolador, como na Figura 2.6(a), é feita simplesmente definindo as componentes polifásicas $R_j(z) = E_{N-1-j}(z)$. Assim, a decomposição polifásica de $F(z)$ se torna

$$F(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^{-(N-1-j)} R_j(z^N). \quad (2.7)$$

Da mesma forma que foi feita para o caso da decimação, o bloco interpolador pode ser reorganizado em uma estrutura de N ramos. A Figura 2.6 mostra as estruturas de interpolação padrão e de interpolação com componentes polifásicas e identidade nobre.

2.4 Análise Matricial

Os bancos de filtros criticamente (ou maximamente) decimados são aqueles em que o fator de decimação/interpolação N é igual ao número de bandas ou ramos do banco. Esse fator de decimação/interpolação é tal que não há redundância alguma nos sinais decimados nos ramos do filtro. Para cada lN amostras do sinal de entrada $y(n)$ (l inteiro), serão produzidas l amostras na saída dos blocos decimadores de cada ramo do banco. A Figura 2.1 apresenta esse tipo de estrutura se $N = M$. Os filtros $H_k(z)$, $k = 0, \dots, M - 1$, são os filtros de síntese. Já os filtros $F_k(z)$ são os filtros de análise.

Agora, os filtros de síntese e de análise podem ser substituídos por suas

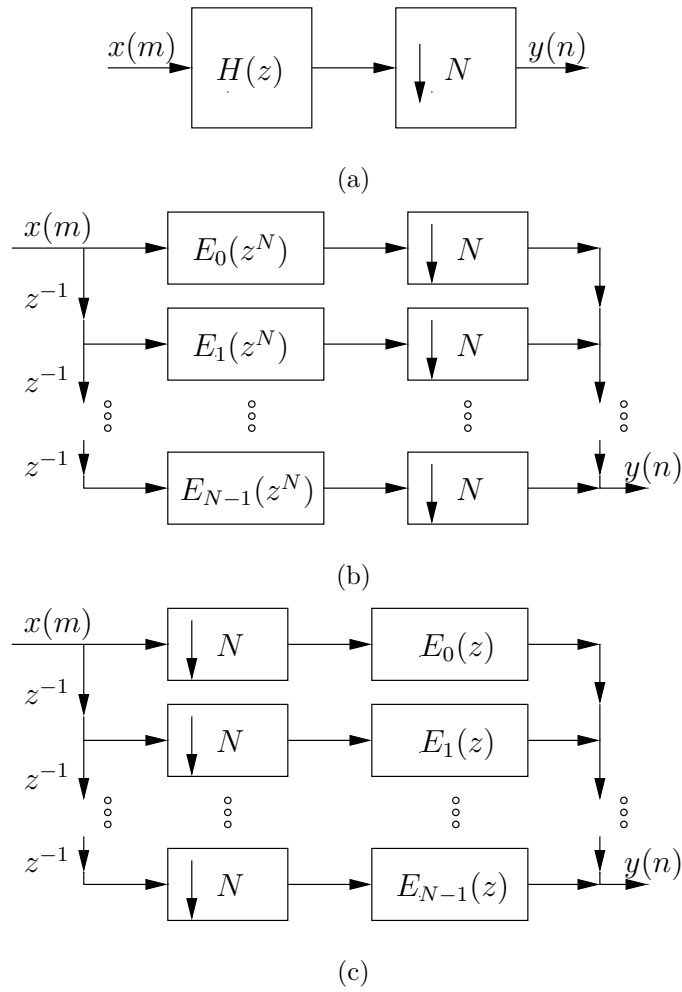


Figura 2.5: (a) Decimador com fator N . (b) Decimação com decomposição polifásica. (c) Decimação com decomposição polifásica e identidade nobre.

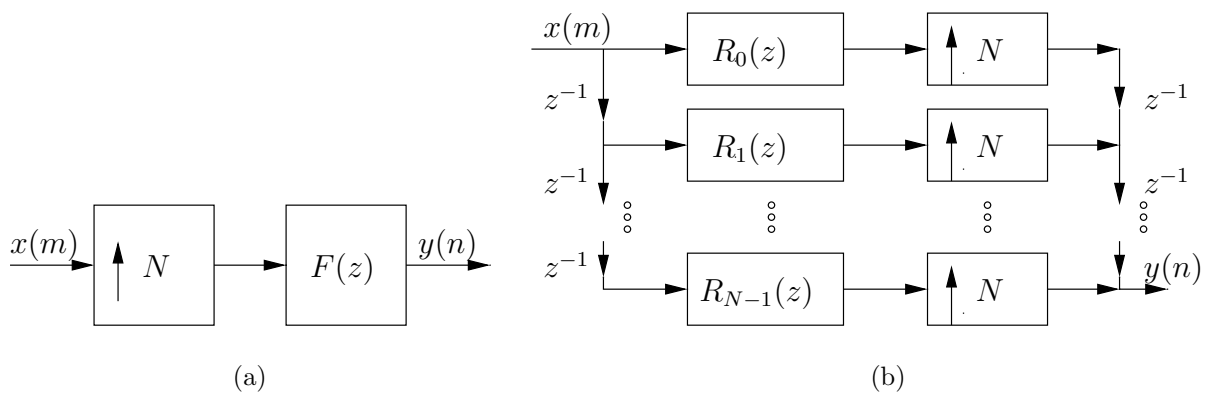


Figura 2.6: (a) Interpolador com fator N . (b) Interpolação com componentes polifásicas e identidade nobre.

componentes polifásicas, de acordo com as equações

$$H_k(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^{-j} E_{kj}(z^N), \quad (2.8)$$

$$F_k(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^{-(N-1-j)} R_{jk}(z^N), \quad (2.9)$$

onde E_{kj} é a j -ésima componente polifásica de $H_k(z)$, e R_{jk} é a j -ésima componente polifásica de $F_k(z)$ e $k = 0, \dots, M-1$. Com essa nova notação, e definindo as matrizes $\mathbf{E}(z)$ e $\mathbf{R}(z)$ tendo elementos $E_{kj}(z)$ e $R_{jk}(z)$, com $j = 0, \dots, N-1$, pode-se reescrever as equações (2.8) e (2.9) em forma matricial. Assim obtém-se

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \mathbf{E}(z^N) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ \vdots \\ F_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T(z^N) \begin{bmatrix} z^{-(N-1)} \\ z^{-(N-2)} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

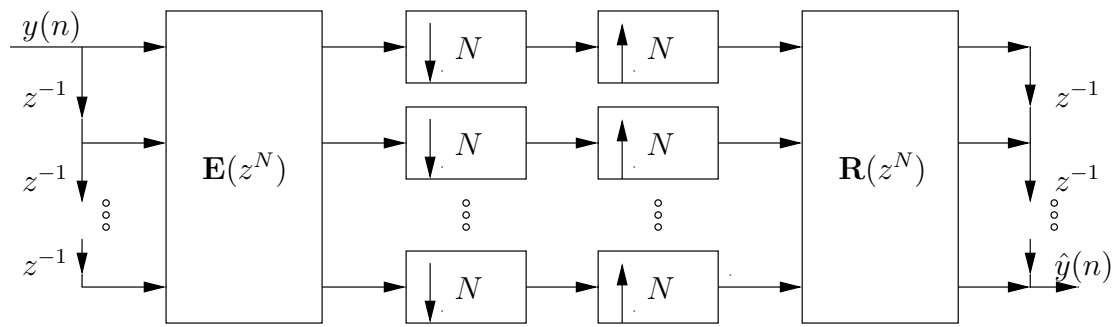
As equações matriciais trazem uma simplificação na descrição da estrutura do banco de filtros [3]. A Figura 2.7(a) mostra como fica o banco de filtros quando se usam as equações (2.10) e (2.11). Já a Figura 2.7(b), além de usar as componentes polifásicas em forma matricial, usa também as propriedades nobres.

2.5 Reconstrução Perfeita

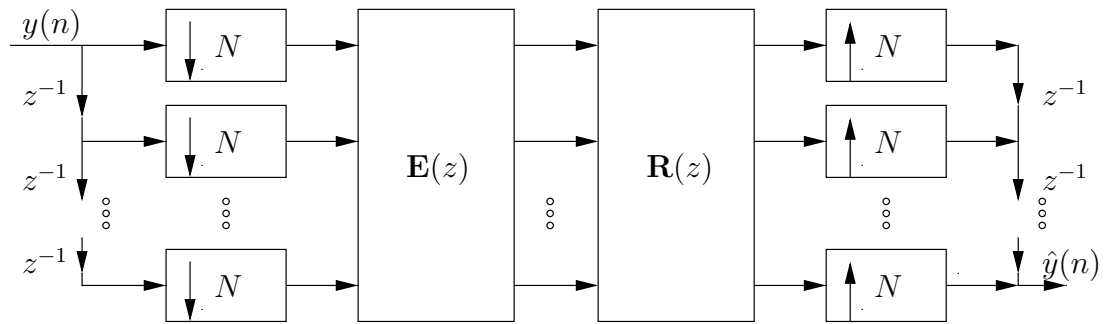
A reconstrução perfeita ou PR (*perfect reconstruction*) em um banco de filtros significa termos $\hat{y}(n) = y(n)$. Dessa forma, cada amostra na entrada do banco irá compor também a saída $\hat{y}(n)$, com um certo atraso. Para se obter a PR, basta que a relação $\mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z) = \mathbf{I}$ [3], seja satisfeita. A Figura 2.8 mostra como fica o banco de filtros M -bandas ao se forçar a PR.

Uma condição menos restrita para a PR seria fazer

$$\mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z) = z^{-\Delta}\mathbf{I}, \quad (2.12)$$



(a)



(b)

Figura 2.7: Banco de filtros M -bandas em função das matrizes polifásicas: (a) usando as matrizes de componentes polifásicas; (b) adicionando as propriedades nobres.

o que se resume em um simples atraso de Δ amostras.

Dentro das condições de PR, os subfiltros de síntese e análise poderiam ter suas respostas em frequência ideais¹, sem sobreposição das subbandas e com *aliasing* nulo. Mas, filtros ideais não são realizáveis e a condição de PR não faz restrições ao uso de subfiltros com sobreposição de espectro. Dessa forma, os subfiltros de síntese e análise de cada banda podem ter resposta em frequência sobrepondo com as bandas restantes desde que as componentes polifásicas satisfaçam a equação (2.12).

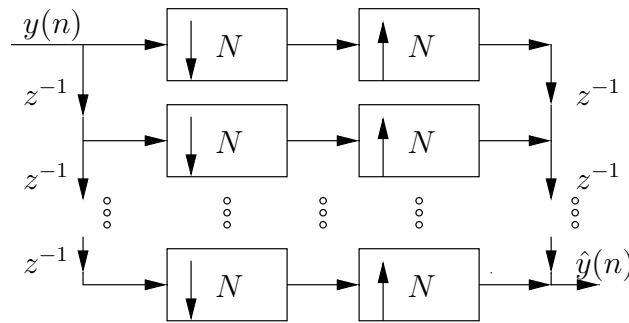


Figura 2.8: Reconstrução perfeita em banco M -bandas.

2.6 Transmultiplexadores ou Transceptores Multicanais

Com pequenas modificações na estrutura de um banco de filtros é possível implementar o que se chama de transmultiplexador, que é um multiplexador de sinais (ver Figura 2.9). A diferença principal é que no transmultiplexador é necessário ter ($M < N$), para haver a inserção de redundância no sistema. Isso porque no transmissor, se $N > M$, transmite-se mais símbolos (N) do que os que representam a informação original (M), a cada intervalo de amostragem.

A técnica de modulação OFDM [2] pode ser vista como um transmultiplexador, no qual o transmissor recebe vários sinais de entrada em canais independentes e realiza uma multiplexação na frequência com os mesmos para futura transmissão. No receptor é realizada a operação inversa, sendo o sinal recebido demultiplexado, obtendo novamente os canais independentes.

¹A resposta ideal para os subfiltros de síntese e análise seria a de ganho unitário na banda passante e ganho nulo na faixa de rejeição, com faixa de transição nula.

O transmultiplexador implementa a multiplexação de M sinais de entrada $x_i(n)$, $i = 0, \dots, M - 1$, em um único sinal $\hat{y}(n)$, e depois divide esse sinal em M subbandas, com sinais $\hat{x}_i(n)$, os quais podem ser, ou não, iguais aos sinais originais. No caso de PR temos $\hat{x}_i(n) = x_i(n)$ para $i = 0, \dots, M - 1$ [3], e os subfiltros não precisam ser perfeitamente seletivos para que o transmultiplexador funcione (como comentado na Seção 2.5) com PR, muito menos no caso da reconstrução próxima da perfeita². A Figura 2.9 mostra o sistema transmultiplexador, onde $P(z)$ é o canal, que pode ser ideal ou não.

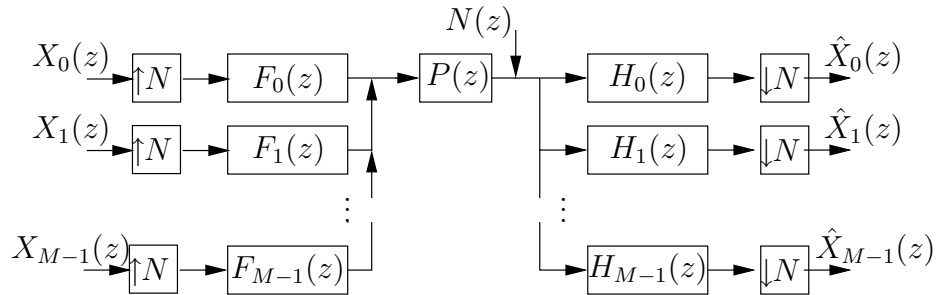


Figura 2.9: Sistema transmultiplexador de M canais, sobreamostrado com taxa N .

2.6.1 Definições

Os transceptores baseados em bancos de filtros FIR são a pedra fundamental deste trabalho, onde são empregados os bancos MFB do tipo CMFB [3, 5, 4], SMFB [6] e MDFT [7, 11], além de estruturas FB do tipo paraunitária [3] e genérica (sem nenhuma propriedade particular).

Como o trabalho proposto é baseado em sistemas multitaxas, é necessário o conhecimento dos conceitos básicos para que se possa desenvolver a teoria aplicada ao estudo proposto. Seções anteriores introduziram conceitos de decimação, interpolação, identidades nobres e decomposições polifásicas, assim como os princípios estruturais dos FBs.

Na subseção seguinte é apresentado o transceptor utilizado nos sistemas de

²Na reconstrução próxima da perfeita em um banco de filtros com entrada $y(n)$ e saída $\hat{y}(n)$, permite-se que o sinal $\hat{y}(n)$ não seja uma cópia exata defasada do sinal de entrada, mas sim uma versão com uma suave distorção em suas amostras. No caso dos transmultiplexadores, o mesmo irá ocorrer para os sinais $x_i(n)$ e $\hat{x}_i(n)$.

envolvidos, com desenvolvimento no domínio z , onde fica evidente seu claro relacionamento com os FBs.

Em alguns momentos também será necessário descrever os transceptores no domínio do tempo, para que se possa impor restrições temporais no projeto do sistema. A Subseção 2.6.3 aborda o assunto.

2.6.2 Análise no Domínio z

Os transceptores digitais baseados em bancos de filtros também são conhecidos como transmultiplexadores. Podem ser usados com ou sem redundância [12, 13, 14].

Os transmultiplexadores nada mais são do que bancos de filtros onde os bancos de análise e de síntese tiveram as posições trocadas. Uma vez que a representação de cada filtro de análise pode ser dada por

$$H_m(z) = \sum_{n=0}^{N-1} E_{m,n}(z^N)z^n, \quad (2.13)$$

para $m = 0, \dots, M-1$, e onde N é o fator de decimação/interpolação ($N \geq M$), o banco não-causal de análise de um transceptor de M -bandas sobreamostrado (redundante) pode ser definido por

$$\tilde{\mathbf{h}}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \mathbf{E}(z^N)\mathbf{d}(z^{-1}), \quad (2.14)$$

onde

$$\mathbf{E}(z^N) = \begin{bmatrix} E_{0,0}(z^N) & E_{0,1}(z^N) & \cdots & E_{0,N-1}(z^N) \\ E_{1,0}(z^N) & E_{1,1}(z^N) & \cdots & E_{1,N-1}(z^N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z^N) & E_{M-1,1}(z^N) & \cdots & E_{M-1,N-1}(z^N) \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

e

$$\mathbf{d}(z) = \left[1 \quad z^{-1} \quad \cdots \quad z^{-N+1} \right]^T \quad (2.16)$$

é o vetor de atrasos (*delays*).

Similarmente, os filtros causais de síntese podem ser descritos por suas componentes polifásicas como

$$F_m(z) = \sum_{n=0}^{N-1} R_{n,m}(z^N) z^{-n}. \quad (2.17)$$

Conseqüentemente, o banco causal de síntese de um banco de filtros transceptor de M -bandas sobreamostrado é definido por

$$\tilde{\mathbf{f}}^T(z) = \begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) & \cdots & F_{M-1}(z) \end{bmatrix} = z^{-N+1} \mathbf{d}^T(z) \mathbf{R}(z^N), \quad (2.18)$$

onde

$$\mathbf{R}(z^N) = \begin{bmatrix} R_{0,0}(z^N) & R_{0,1}(z^N) & \cdots & R_{0,M-1}(z^N) \\ R_{1,0}(z^N) & R_{1,1}(z^N) & \cdots & R_{1,M-1}(z^N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N-1,0}(z^N) & R_{N-1,1}(z^N) & \cdots & R_{N-1,M-1}(z^N) \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

A estrutura do banco de filtros transceptor, assim como a sua versão com implementação de baixa complexidade computacional, estão apresentadas nas Figuras 2.9 e 2.10. Nessas figuras, $P(z)$ representa o canal, que pode ser ou não ideal, e $N(z)$ representa o ruído, normalmente aditivo gaussiano.

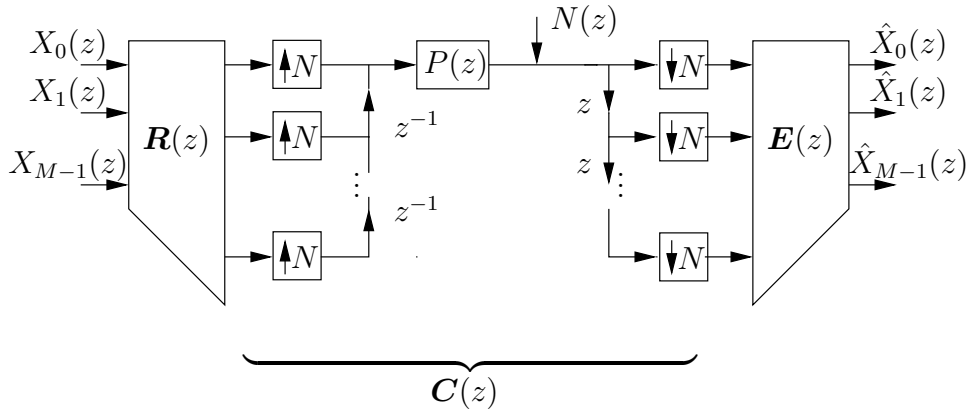


Figura 2.10: Estrutura de complexidade reduzida do TMUX sobreamostrado M -canais.

Uma vez tendo sido definidos ambos os bancos de análise e síntese em forma matricial, fica muito simples descrever a relação entrada/saída para o sistema transmultiplexador da Figura 2.9. Essa relação é dada por

$$\hat{\mathbf{X}}(z) = \mathcal{D}_N \left\{ \tilde{\mathbf{h}}(z) P(z) \tilde{\mathbf{f}}^T(z) \right\} \mathbf{X}(z), \quad (2.20)$$

onde $\mathcal{D}_N\{\cdot\}$ é o operador de decimação por N .

Fazendo uso das equações (2.14) e (2.18), pode-se reduzir a relação entrada/saída do sistema para

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}(z) &= \mathbf{E}(z)\mathcal{D}_N\{\mathbf{d}(z^{-1})P(z)\mathbf{d}^T(z)\}\mathbf{R}(z)\mathbf{X}(z) \\ &= \mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z)\mathbf{X}(z),\end{aligned}\quad (2.21)$$

onde

$$\mathbf{C}(z) = \mathcal{D}_N\{\mathbf{d}(z^{-1})P(z)\mathbf{d}^T(z)\} \quad (2.22)$$

é a matriz de transferência do canal $P(z)$, ou matriz de canal.

A natureza da matriz $\mathbf{C}(z)$ é facilmente compreendida se primeiro for definido

$$T(z)_{u,v} = \mathcal{D}_N\{z^u P(z) z^{-v}\} \quad (2.23)$$

como representado na Figura 2.11, a qual mostra a transferência da entrada v para a saída u , onde $u, v = 0, \dots, N-1$, na estrutura multitaxa definida por $\mathbf{C}(z)$ na Figura 2.10.

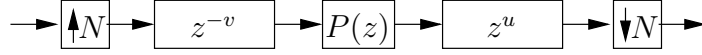


Figura 2.11: Descrição entrada/saída da matriz de canal $\mathbf{C}(z)$.

Usando a representação polifásica de $P(z)$ dada por

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N-1} P_n(z^N) z^{-n}, \quad (2.24)$$

a formulação da função $T(z)_{u,v}$ pode ser simplificada por

$$\begin{aligned}T(z)_{u,v} &= \mathcal{D}_N\left\{z^{u-v} \sum_{n=0}^{N-1} P_n(z^N) z^{-n}\right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_n(z) z^{\frac{u-v-n}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} W^{m(u-v-n)} \\ &= \begin{cases} P_{u-v}(z), & u \geq v \\ z^{-1} P_{N+u-v}, & u < v \end{cases},\end{aligned}\quad (2.25)$$

onde $W = e^{-j2\pi/N}$ e

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N-1} W^{m(u-v-n)} &= \frac{1 - W^{(u-v-n)N}}{1 - W^{u-v-n}} \\ &= \begin{cases} N, & u - v - n = cN, \quad c \in Z \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde Z é o conjunto dos números inteiros.

Uma vez que $0 \leq (n, u, v) < N$, a equação (2.26) somente será diferente de zero para:

- $(u - v - n = 0) \cap (0 \leq n < N)$, ou seja:

$$n = u - v, \quad u \geq v \quad (2.27)$$

- $(u - v - n = -N) \cap (0 \leq n < N)$, ou seja:

$$n = N + u - v, \quad u < v, \quad (2.28)$$

fato este que foi usado na equação (2.25).

Usando a equação (2.25) e tendo em mente que a matriz de canal $\mathbf{C}(z)$ tem as suas entradas (u, v) dadas por $T(z)_{u,v}$, é possível escrever

$$\mathbf{C}(z) = \begin{bmatrix} P_0(z) & z^{-1}P_{N-1}(z) & z^{-1}P_{N-2}(z) & \cdots & z^{-1}P_1(z) \\ P_1(z) & P_0(z) & z^{-1}P_{N-1}(z) & \cdots & z^{-1}P_2(z) \\ P_2(z) & P_1(z) & P_0(z) & \cdots & z^{-1}P_3(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N-1}(z) & P_{N-2}(z) & P_{N-3}(z) & \cdots & P_0(z) \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

a qual é uma matriz pseudo-circulante [3, 14].

A matriz $\mathbf{C}(z)$ pode ser dividida em duas matrizes, uma triangular superior, sem a diagonal principal, e a outra triangular inferior, ou seja

$$\mathbf{C}(z) = \mathbf{C}_0 + z^{-1}\mathbf{C}_1, \quad (2.30)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_0 &= \begin{bmatrix} P_0(z) & 0 & \dots & 0 \\ P_1(z) & P_0(z) & & \vdots \\ P_2(z) & P_1(z) & P_0(z) & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ P_{N-1}(z) & P_{N-2}(z) & \dots & P_1(z) & P_0(z) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & P_{N-1}(z) & P_{N-2}(z) & \dots & P_1(z) \\ & & P_{N-1}(z) & \dots & P_2(z) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & P_{N-1}(z) \\ 0 & & \dots & & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

A implementação prática do sistema transceptor baseado em banco de filtros requer que se faça uma alteração na Figura 2.10, inserindo um atraso unitário na saída, tornando o sistema causal. Sendo assim, a nova representação da estrutura pode ser vista na Figura 2.12, após deslocar o elemento atrasador para imediatamente antes dos decimadores, usando a propriedade nobre da decimação.

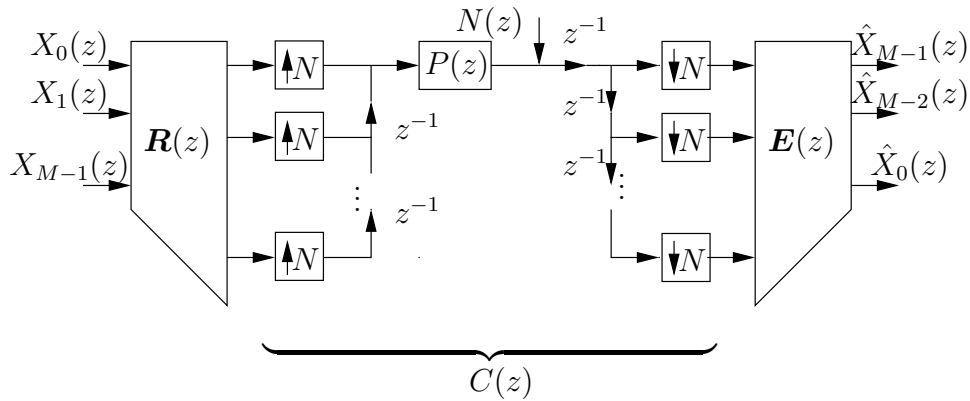


Figura 2.12: Estrutura de complexidade reduzida do TMUX sobreamostrado M -canais com implementação causal (prática).

2.6.3 Análise por Filtragem em Blocos

A análise por filtragem em blocos é útil quando se visa realizar uma implementação do sistema com processamento paralelo. Entretanto, por se tratar o

transmultiplexador de um transmissor em blocos, tal análise se tornou útil também para simplificar as equações que descrevem o comportamento do sistema no domínio temporal.

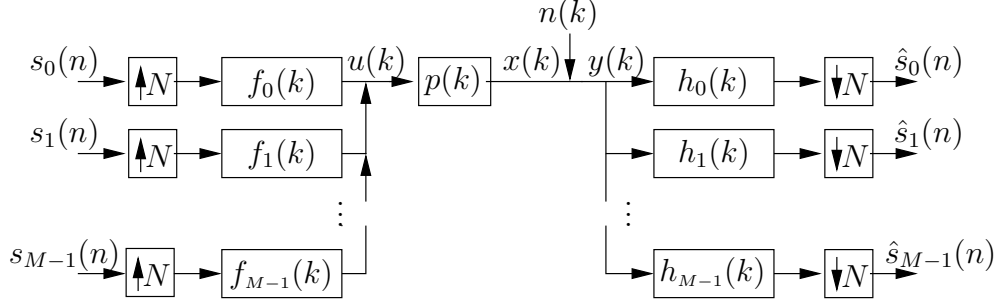


Figura 2.13: Banco de filtros redundante no domínio do tempo.

A Figura 2.13 permite visualizar o banco de filtros redundante representado no domínio do tempo. Entre os bancos de síntese e análise estão incluídos o canal não ideal $p(k)$ e o ruído aditivo $n(k)$.

Assumindo as definições

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}(n) &= [s_0(n) \ s_1(n) \ \cdots \ s_{M-1}(n)]^T \\
 \hat{\mathbf{s}}(n) &= [\hat{s}_0(n) \ \hat{s}_1(n) \ \cdots \ \hat{s}_{M-1}(n)]^T \\
 \mathbf{u}(n) &= [u(nN - N + 1) \ u(nN - N + 2) \ \cdots \ u(nN)]^T \\
 \mathbf{x}(n) &= [x(nN - N + 1) \ x(nN - N + 2) \ \cdots \ x(nN)]^T \\
 \mathbf{n}(n) &= [n(nN - N + 1) \ n(nN - N + 2) \ \cdots \ n(nN)]^T \\
 \mathbf{y}(n) &= [y(nN - N + 1) \ y(nN - N + 2) \ \cdots \ y(nN)]^T, \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

onde $\mathbf{s}(n)$ e $\hat{\mathbf{s}}(n)$ possuem tamanho $(M \times 1)$, e os vetores $\mathbf{u}(n)$, $\mathbf{x}(n)$, $\mathbf{n}(n)$ e $\mathbf{y}(n)$ possuem tamanho $(N \times 1)$, a representação da relação entrada/saída do sistema fica facilitada através de filtragem em blocos.

Inicialmente, sem perda de generalidade, o ruído $n(k)$ será desprezado. Sendo assim, a saída do sistema pode ser escrita em forma compacta por

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = [\mathbf{H}_{Q-1} \ \cdots \ \mathbf{H}_1 \ \mathbf{H}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n - Q + 1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(n - 1) \\ \mathbf{x}(n) \end{bmatrix}_{NQ \times 1}, \quad (2.33)$$

onde NQ é o comprimento de cada filtro do banco de análise, ou seja, dos filtros $h_m(k)$, $m = 0, \dots, M-1$. Já as matrizes \mathbf{H}_q , $q = 0, \dots, Q-1$ possuem suas entradas dadas por

$$\{\mathbf{H}_q\}_{m,l} = h_m(qN - l + N - 1), \quad (2.34)$$

para $l = 0, \dots, N-1$, e compõem o banco de filtros de análise.

Para obter simplificação ainda maior, definem-se

$$\mathcal{H} = [\mathbf{H}_{Q-1} \cdots \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_0]_{M \times NQ}, \quad (2.35)$$

e

$$\bar{\mathbf{x}}(n) = [\mathbf{x}^T(n-Q+1) \cdots \mathbf{x}^T(n-1) \mathbf{x}^T(n)]^T, \quad (2.36)$$

de onde obtém-se

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathcal{H}\bar{\mathbf{x}}(n). \quad (2.37)$$

Continuando o desenvolvimento da relação entrada/saída do sistema, se for definido

$$\bar{\mathbf{u}} = [\mathbf{u}^T(n-Q-B+1) \cdots \mathbf{u}^T(n-1) \mathbf{u}^T(n)]^T, \quad (2.38)$$

onde $B = \lceil L/N \rceil$, sendo L o comprimento da resposta ao impulso do canal, e definindo também

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} p(bN) & \cdots & p(bN - N + 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(bN + N - 1) & \cdots & p(bN) \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad (2.39)$$

e

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_B & \cdots & \mathbf{P}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_B & \cdots & \mathbf{P}_0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{P}_B & \cdots & \mathbf{P}_0 \end{bmatrix}_{NQ \times N(Q+B)}, \quad (2.40)$$

então, a filtragem do sinal transmitido através do canal não ideal pode ser representada por

$$\bar{\mathbf{x}}(n) = \mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}(n). \quad (2.41)$$

Já o vetor $\bar{\mathbf{u}}(n)$, que é composto por amostras do sinal filtrado no banco de síntese, pode ser representado por

$$\bar{\mathbf{u}}(n) = \mathcal{F}\bar{\mathbf{s}}(n), \quad (2.42)$$

onde

$$\bar{\mathbf{s}}(n) = [\mathbf{s}^T(n - 2Q - B + 2) \cdots \mathbf{s}^T(n - 1) \mathbf{s}^T(n)]^T, \quad (2.43)$$

e

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{Q-1} & \cdots & \mathbf{F}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{Q-1} & \cdots & \mathbf{F}_0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{Q-1} & \cdots & \mathbf{F}_0 \end{bmatrix}_{N(Q+B) \times M(2Q+B-1)}, \quad (2.44)$$

sendo que as entradas das matrizes \mathbf{F}_q , $q = 0, \dots, Q - 1$, são dadas por

$$\{\mathbf{F}_q\}_{l,m} = f_m(qN + l) \quad (2.45)$$

para $m = 0, \dots, M - 1$.

Tendo em vista todo o desenvolvimento apresentado, a relação entrada/saída do sistema acabou se transformando em um produto de matrizes especiais, onde cada uma delas é uma matriz composta por blocos de matrizes. Simplificando, a saída do sistema é dada por

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathcal{H}\mathcal{P}\mathcal{F}\bar{\mathbf{s}}(n). \quad (2.46)$$

A partir da equação (2.46) é simples observar que, se é desejada a propriedade PR do sinal, ou $\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathbf{s}(n)$, então basta que a seguinte relação seja satisfeita:

$$\mathcal{H}\mathcal{P}\mathcal{F} = [\mathbf{0}_{M \times M(2Q+B-2)} \mathbf{I}_M]. \quad (2.47)$$

Se o canal é ideal, então

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \mathbf{I}_{N \times N} \\ \mathbf{P}_j &= \mathbf{0}_{N \times N} \quad 1, \leq j \leq B \end{aligned} \quad (2.48)$$

e, uma vez que $B = 0$, vai resultar em

$$\mathcal{P} = [\mathbf{I}_{NQ \times NQ}]. \quad (2.49)$$

Uma vez que a equação (2.46) representa a transferência da entrada para a saída do sistema em blocos, então no caso do canal ideal, tem-se

$$\mathcal{H}\mathcal{P}\mathcal{F} = \mathcal{H}\mathcal{F}, \quad (2.50)$$

e, para se obter PR da informação transmitida, deve-se fazer

$$\mathcal{H}\mathcal{F} = [\mathbf{0}_{M \times M(2Q-2)} \quad \mathbf{I}_M]. \quad (2.51)$$

Entretanto, a solução prática para a PR é obtida permitindo um certo atraso da saída em relação à entrada, ou seja, $\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathbf{s}(n - \delta)$, onde $0 \leq \delta \leq 2(Q-1)$. Uma boa escolha para o atraso é $\delta = Q - 1$ [3, 4]. Entretanto, outras escolhas podem ser feitas.

Adotando o atraso como $\delta = Q - 1$, a equação necessária para atingir PR se torna

$$\mathcal{H}\mathcal{P}\mathcal{F} = [\mathbf{0}_{M \times M(Q+B-1)} \quad \mathbf{I}_M \quad \mathbf{0}_{M \times M(Q-1)}]. \quad (2.52)$$

Como exemplo, para $M = 2$, $N = 3$, $Q = 3$, $L = 0$ (canal sem memória), e $P(z) = p_0$, teríamos:

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} f_0(0) & f_1(0) \\ f_0(1) & f_1(1) \\ f_0(2) & f_1(2) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} f_0(3) & f_1(3) \\ f_0(4) & f_1(4) \\ f_0(5) & f_1(5) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} f_0(6) & f_1(6) \\ f_0(7) & f_1(7) \\ f_0(8) & f_1(8) \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_0 & & \\ & \mathbf{F}_2 & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_0 & \\ & & \mathbf{F}_2 & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_0 \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

assim como

$$\mathcal{P} = p_0 \quad \mathbf{I}_{(9 \times 9)}, \quad (2.55)$$

e

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} h_0(2) & h_0(1) & h_0(0) \\ h_1(2) & h_1(1) & h_1(0) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} h_0(5) & h_0(4) & h_0(3) \\ h_1(5) & h_1(4) & h_1(3) \end{bmatrix};$$

com

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} h_0(8) & h_0(7) & h_0(6) \\ h_1(8) & h_1(7) & h_1(6) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H} = [\mathbf{H}_2 \quad \mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_0]. \quad (2.56)$$

2.7 Figuras de Mérito de Bancos de Filtros e Transmultiplexadores

Na literatura, os sistemas transceptores têm sido estudados com diferentes abordagens, sendo uma delas a análise das figuras de mérito do sistema como se o mesmo fosse um banco de filtros [15, 16, 17, 18], sendo uma abordagem indireta. Já a abordagem direta é baseada em figuras como a interferência entre símbolos (*intersymbol interference*, ISI) e a interferência entre portadoras (*intercarrier interference*, ICI), que estão intimamente ligadas com a estrutura física do transceptor e suas imperfeições face ao meio de transmissão.

2.7.1 Figuras de Mérito dos FBs

Uma prática comum no projeto de transceptores é utilizar as figuras de mérito dos FBs, especialmente quando o sistema é baseado em MFBs [15, 17, 16, 19, 20, 21, 18]. Neste último caso, seja usando CMFBs [3, 4, 5], SMFBs [6] ou MDFTFBs [7], basta projetar um único filtro, chamado de filtro protótipo, e se este fornece baixa transferência de energia na faixa de rejeição, irá garantir que as figuras de mérito dos transceptores sejam praticamente idênticas às dos FBs [3].

As propriedades mencionadas favorecem o uso de sistemas baseados em MFBs, uma vez que nestes só é necessário projetar um único filtro protótipo [3, 4], tornando o projeto independente do número de subbandas do sistema transceptor. Já a desvantagem em utilizar transceptores baseados em MFBs reside no fato de não existirem estruturas de implementação eficiente, ou seja, baixa complexidade computacional, para sistemas redundantes [22, 23]. No entanto, algumas adaptações podem ser feitas, o que será descrito em breve.

A relação entrada/saída do banco de filtros da Figura 2.1, pode ser derivada usando a propriedade descrita pelas equações (2.2) e (2.4) [3, 4, 24], adaptadas ao domínio z . O sinal na saída do m -ésimo ramo do banco de análise, denominado $X_m(z)$, é dado por

$$\begin{aligned} X_m(z) &= \mathcal{D}_N \{H_m(z)Y(z)\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} H_m(z^{\frac{1}{N}} e^{-\frac{j2\pi i}{N}}) Y(z^{\frac{1}{N}} e^{-\frac{j2\pi i}{N}}), \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde o operador $\mathcal{D}_N\{U(z)\}$ denota a decimação por N do polinômio $U(z)$.

Em função dos M ramos do banco de filtros, pode-se descrever a relação entrada/saída como

$$\begin{aligned}
\hat{Y}(z) &= \sum_{m=0}^{M-1} F_m(z) X_m(z^N) \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} F_m(z) \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} H_m(ze^{-j\frac{2\pi i}{N}}) Y(ze^{-j\frac{2\pi i}{N}}) \right] \\
&= \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} F_m(z) H_m(z) \right] Y(z) + \sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} F_m(z) H_m(ze^{-j\frac{2\pi i}{N}}) \right] Y(ze^{-j\frac{2\pi i}{N}}),
\end{aligned} \tag{2.58}$$

ou seja

$$\hat{Y}(z) = T_0(z)Y(z) + \sum_{i=1}^{N-1} T_i(z)Y(zW_i), \tag{2.59}$$

onde $W_i = e^{-j\frac{2\pi i}{N}}$.

Na equação (2.59), o termo $T_0(z)$ é a função de distorção (amplitude e fase) da entrada para a saída, e o termo $T_i(z)$, para $i = 1, \dots, N-1$, é a transferência de *aliasing*, que mede a influência da i -ésima repetição espectral, devida à decimação após filtragem por $H_m(z)$, com $m = 0, \dots, M-1$, nos ramos do banco de filtros. É importante ressaltar que, como as funções de distorção se referem aos FBs, o canal (meio físico) não é levado em consideração. Dessa forma, o projeto é independente do canal. Este tipo de formulação é útil quando se deseja desenvolver um transceptor para atuar em um meio onde o canal varia suficientemente rápido a ponto de tornar proibitivo recalcular o melhor receptor para a situação presente do meio físico. Por exemplo, comunicações sem fio com mobilidade costumam possuir canais hostis, altamente variantes no tempo. Uma boa prática de projeto adotada neste tipo de situação é utilizar equalizadores menos computacionalmente intensivos do que o par transceptor e atualizá-los preferencialmente com a frequência de recepção de cada bloco de sinal de informação. Nestes casos, se faz necessário o uso de sistemas adaptativos de equalização [8, 9].

As figuras de mérito $T_0(z)$ e $T_i(z)$ são dadas pelas equações

$$T_0(z) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} F_m(z) H_m(z) \quad (2.60)$$

$$T_i(z) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} F_m(z) H_m(z W_i) \quad (2.61)$$

Caso se deseje PR no FB, ou seja, $\hat{Y}(z) = Y(z)$, a função $T_0(z)$ deve apresentar resposta em frequência constante com ganho unitário, e as transferências $T_i(z)$, para $i = 1, \dots, N - 1$, devem possuir transferências nulas. Já no caso da reconstrução ser próxima da perfeita (NPR), admite-se uma pequena distorção de amplitude para a resposta em frequência da função $T_0(z)$ em torno de 1, assim como pequenos níveis de transferência de *aliasing* para as funções $T_i(z)$.

Este trabalho propôs uma forma eficiente e rápida de calcular as funções de distorção mencionadas acima de forma a facilitar o projeto dos transceptores. Os detalhes serão apresentados posteriormente.

As figuras de mérito comumente usadas nesse tipo de projeto são:

$$\begin{aligned} d_1 &= \max_{\omega} \{ | |T_0(e^{j\omega})| - 1 | \} \\ d_2 &= \max_{i,\omega} \{ |T_i(e^{j\omega})| \}, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde d_1 quantifica a máxima distorção, em módulo, da transferência da entrada para a saída e d_2 determina a maior distorção devido ao *aliasing*.

2.7.2 Figuras de Mérito dos Transmultiplexadores

A mais abrangente forma de se desenvolver sistemas transceptores multicanais consiste em desenvolver os bancos de análise e síntese do sistema considerando figuras de mérito intrínsecas à estrutura do TMUX, as quais, dado um transmultiplexador genérico, com M entradas/saídas, como na Figura 2.9, são descritas em função das entradas e saídas do sistema, representadas no domínio z respectivamente pelos polinômios $X_m(z)$ e $\hat{X}_m(z)$, com $m = 0, \dots, M - 1$.

A descrição vetorial do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \begin{bmatrix} X_0(z) & X_1(z) & \cdots & X_{M-1}(z) \end{bmatrix}^T \\ \hat{\mathbf{X}}(z) &= \begin{bmatrix} \hat{X}_0(z) & \hat{X}_1(z) & \cdots & \hat{X}_{M-1}(z) \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

sendo definido \mathbf{a}^T como o operador de transposição do vetor ou matriz \mathbf{a} . Os vetores de entrada/saída também podem ser descritos por suas versões interpoladas

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(z^N) &= \begin{bmatrix} X_0(z^N) & X_1(z^N) & \cdots & X_{M-1}(z^N) \end{bmatrix}^T \\ \hat{\mathbf{X}}(z^N) &= \begin{bmatrix} \hat{X}_0(z^N) & \hat{X}_1(z^N) & \cdots & \hat{X}_{M-1}(z^N) \end{bmatrix}^T,\end{aligned}$$

que serão mais úteis.

A partir da análise da Figura 2.9, observa-se que o polinômio que descreve a saída de um determinado ramo k do sistema transmultiplexador é dado por

$$\begin{aligned}\hat{X}_k(z) &= \mathcal{D}_N \left\{ H_k(z) \sum_{l=0}^{M-1} F_l(z) X_l(z^N) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[H_k(z^{\frac{1}{N}} e^{-j\frac{2\pi i}{N}}) \sum_{l=0}^{M-1} F_l(z^{\frac{1}{N}} e^{-j\frac{2\pi i}{N}}) X_l(z) \right].\end{aligned}\quad (2.63)$$

Sendo assim, a versão interpolada da saída no ramo k pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\hat{X}_k(z^N) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[H_k(z e^{-j\frac{2\pi i}{N}}) \sum_{l=0}^{M-1} F_l(z e^{-j\frac{2\pi i}{N}}) X_l(z^N) \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{M-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} H_k(z e^{-j\frac{2\pi i}{N}}) F_l(z e^{-j\frac{2\pi i}{N}}) \right] X_l(z^N) \\ &= \sum_{l=0}^{M-1} [\mathbf{G}(z^N)]_{k,l} X_l(z^N),\end{aligned}\quad (2.64)$$

onde a função $[\mathbf{G}(z^N)]_{k,l}$, que descreve a relação de transferência do sinal interpolado do ramo de entrada l para o sinal interpolado no ramo de saída k do sistema transmultiplexador, é definida como

$$[\mathbf{G}(z^N)]_{k,l} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} H_k(z W_i) F_l(z W_i).\quad (2.65)$$

Logo se conclui que o termo $[\mathbf{G}(z^N)]_{k,k}$ representa a transferência de um determinado canal k e os outros termos representam a interferência cruzada entre dois canais ou *crosstalk*, a qual deve ser zero para um sistema com PR, da mesma forma que o termo $[\mathbf{G}(z^N)]_{k,k}$ deve se tornar um simples atraso [19].

Dada a equação (2.64) e definindo a matriz de transferência do sistema $\mathbf{G}(z^N)$, onde cada elemento (k, l) é definido pela equação (2.65), obtém-se a relação entrada/saída do sistema na forma vetorial

$$\hat{\mathbf{X}}(z^N) = \mathbf{G}(z^N) \mathbf{X}(z^N).\quad (2.66)$$

Definidas as relações entrada/saída do sistema transmultiplexador, pode-se agora introduzir duas figuras de mérito para avaliar tal sistema [25]. A primeira figura de mérito, conhecida como ISI, quantifica o quanto a resposta impulsional de determinado canal k se difere da resposta impulsional ideal $\delta(n)$. Se a resposta impulsional é mais longa que uma amostra, interferências entre símbolos adjacentes transmitidos em um mesmo ramo irão ocorrer. A segunda figura de mérito, dada pela ICI, mede o quanto determinado ramo de saída k será influenciado pelos demais ramos. Então, as expressões que traduzem as figuras de mérito ISI e ICI são dadas respectivamente por

$$\text{ISI} = \max_k \left\{ \sum_n [\delta(n-d) - g_{k,k}(n)]^2 \right\} \quad (2.67)$$

$$\text{ICI} = \max_{k,\omega} \left\{ \sum_{l=0, k \neq l}^{M-1} |[\mathbf{G}(e^{j\omega})]_{k,l}|^2 \right\}, \quad (2.68)$$

sendo $\delta(n)$ um impulso ideal, d um atraso apropriado, $g_{k,k}(n)$ a resposta impulsional do k -ésimo canal, e o termo $[\mathbf{G}(e^{j\omega})]_{k,l}$ o *crosstalk* entre o k -ésimo e l -ésimo canais, cuja expressão é dada pela equação (2.65).

Em um projeto usando as figuras de mérito ISI e ICI, as distorções introduzidas pelo canal $P(z)$ (ver Figura 2.9) podem ser consideradas. Caso o projeto desconsidere o canal, a melhor solução é usar as figuras de mérito de FBs apresentadas na Seção 2.7.1 porque são menos complexas computacionalmente. Caso o canal seja considerado, existem duas opções: partir do princípio que somente a ordem do canal é conhecida ou assumir que o canal é conhecido. Se o projeto está sendo desenvolvido para transmissões sem fio, com possível mobilidade, é interessante que seja usada apenas uma estimativa da ordem do canal, ao invés de tentar estimar sua resposta impulsional em cada transmissão de blocos com o propósito de corrigir o receptor. A estimativa do canal pode ser feita sim, a cada bloco transmitido, com a finalidade de atualizar o equalizador. Mais uma vez, isso se deve ao fato de que geralmente é mais simples, ou menos computacionalmente intensivo, ajustar o equalizador do que o banco de análise no receptor.

É importante frisar que o objetivo de usar transceptores FIR é obter uma estrutura que, apesar de mais complexa, possa atuar com eficiência nos mais diversos meios, sem necessidade de muita adaptação. Se o equalizador para um determinado transceptor se tornar muito complexo, é melhor abrir mão do uso desse transceptor,

porque o mesmo já é normalmente computacionalmente intensivo. Para sistemas onde o meio físico é muito bem comportado, com pouca variação no tempo, o transceptor pode ser projetado de forma que o próprio banco de análise se comporte como um equalizador. Nestes casos, o projeto do sistema como um todo envolve estimativas da resposta impulsional do canal e possivelmente será baseado em mínimo erro quadrático médio (*minimum mean-square error*, MMSE).

2.8 Bancos de Filtros Modulados (MFBs)

Como os bancos de filtros modulados são alvo de estudo nesse trabalho, suas características construtivas são abordadas aqui.

Ao longo dessa tese foi mencionado que os MFBs não possuem estrutura rápida para realizar transceptores redundantes [23], mas que era possível contornar esse problema utilizando alguns desenvolvimentos específicos (ver Subseção 6.2.2). Por isso, serão apresentadas formulações para bancos maximamente decimados (não-redundantes).

Os MFBs possuem como vantagens principais sobre os FBs genéricos a implementação eficiente e a facilidade de projeto [3, 4]. No último caso, apenas um filtro protótipo $H_p(z)$ tem que ser projetado, e suas versões moduladas irão compor os filtros de análise e síntese no sistema resultante.

Em um MFB de M bandas, $H_p(z)$ deve ter banda passante $2M$ vezes menor do que a banda máxima da entrada ou $\omega_s/2$, onde ω_s é a frequência de amostragem, para que cada versão modulada do filtro protótipo tenha banda $\omega_s/2M$. Se a frequência de amostragem é 2π (sistema normalizado), então cada filtro de análise e síntese terá banda π/M . Resumindo, como a banda passante de $H_p(z)$ é metade da banda passante dos filtros de análise e síntese,

$$\omega_{3dB} = \frac{\pi}{2M}. \quad (2.69)$$

Para permitir que os filtros sejam factíveis, define-se um fator de sobreposição ou *roll-off* ρ para as faixas passante e de rejeição. Dessa forma, o início da banda de rejeição de $H_p(z)$ deve ser dado por

$$\omega_r = \frac{(1 + \rho)\pi}{2M}. \quad (2.70)$$

Seja o filtro protótipo definido por

$$H_p(z) = \sum_{n=0}^{N_p} h_p(n) z^{-n} \quad (2.71)$$

com ordem N_p , e a sua decomposição em componentes polifásicas,

$$H_p(z) = \sum_{j=0}^{2M-1} S_j(z^{2M}) z^{-j} \quad (2.72)$$

$$S_j(z) = \sum_{k=0}^K h_p(2Mk + j) z^{-k}, \quad (2.73)$$

onde assume-se que a ordem do filtro protótipo é dada por $N_p = 2KM - 1$.

A partir das formulações anteriores, os filtros de análise e síntese no CMFB podem ser representados por [3]:

$$\begin{aligned} H_m(z) &= \sum_{n=0}^{N_p} h_p(n) c_{m,n} z^{-n} \\ F_m(z) &= \sum_{n=0}^{N_p} h_p(n) \tilde{c}_{m,n} z^{-n} \end{aligned} \quad (2.74)$$

para $m = 0, \dots, (M - 1)$ e para $n = 0, \dots, N_p$, onde

$$\begin{aligned} c_{m,n} &= 2 \cos[(2m + 1)(n - N_p/2)\pi/(2M) + (-1)^m \pi/4] \\ \tilde{c}_{m,n} &= 2 \cos[(2m + 1)(n - N_p/2)\pi/(2M) - (-1)^m \pi/4] \end{aligned} \quad (2.75)$$

A estrutura rápida dos CMFBs é implementada através da versão simplificada das matrizes $\mathbf{E}_c(z)$ e $\mathbf{R}_c(z)$ [3, 4, 6],

$$\mathbf{E}_c(z) = \mathbf{C}_{IV} (\mathbf{A}_c \mathbf{\Lambda}_0(z) + z^{-1} \mathbf{B}_c \mathbf{\Lambda}_1(z)) \quad (2.76)$$

$$\mathbf{R}_c(z) = z^{-2K+1} \tilde{\mathbf{E}}_c(z), \quad (2.77)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_0(z) &= \text{diag} \{ S_0(-z^2), \dots, S_{M-1}(-z^2) \} \\ \mathbf{\Lambda}_1(z) &= \text{diag} \{ S_{M-1}(-z^2), \dots, S_0(-z^2) \} \\ \mathbf{A}_c &= \mathbf{I} - (-1)^K \mathbf{J} \\ \mathbf{B}_c &= \mathbf{I} + (-1)^K \mathbf{J} \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde $2K - 1$ é a ordem da matriz $\mathbf{E}_c(z)$ e \mathbf{C}_{IV} é a matriz de transformada rápida DCT-IV [5]. Além disso, \mathbf{I} e \mathbf{J} são, respectivamente, a matriz identidade e a matriz identidade reversa.

Já nos SMFBs, os filtros de análise e síntese são descritos por

$$\begin{aligned} H_m(z) &= \sum_{n=0}^{N_p} h_p(n) s_{m,n} z^{-n} \\ F_m(z) &= \sum_{n=0}^{N_p} h_p(n) \tilde{s}_{m,n} z^{-n} \end{aligned} \quad (2.79)$$

onde

$$\begin{aligned} s_{m,n} &= 2 \sin[(2m+1)(n-N_p/2)\pi/(2M) + (-1)^m \pi/4] \\ \tilde{s}_{m,n} &= 2 \sin[(2m+1)(n-N_p/2)\pi/(2M) - (-1)^m \pi/4] \end{aligned} \quad (2.80)$$

A estrutura rápida dos SMFBs é implementada através da versão simplificada das matrizes $\mathbf{E}_s(z)$ e $\mathbf{R}_s(z)$ [6],

$$\mathbf{E}_s(z) = \mathbf{S}_{IV} (\mathbf{A}_s \mathbf{\Lambda}_0(z) + z^{-1} \mathbf{B}_s \mathbf{\Lambda}_1(z)) \quad (2.81)$$

$$\mathbf{R}_s(z) = z^{-2K+1} \tilde{\mathbf{E}}_s(z)$$

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{I} + (-1)^K \mathbf{J}$$

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{I} - (-1)^K \mathbf{J} \quad (2.82)$$

onde \mathbf{S}_{IV} é a implementação rápida da transformada DST-IV [4, 5], também dada por $\mathbf{S}_{IV} = \mathbf{J} \mathbf{C}_{IV} \mathbf{I}_r = \mathbf{I}_r \mathbf{C}_{IV} \mathbf{J}$, onde $\mathbf{I}_r = \text{diag}(1, -1, 1, \dots)$ [6].

Nos sistemas MDFT, uma vez que são baseados em modulações por exponenciais complexas, devem ser utilizadas $2M$ bandas, para efeito de comparação com estruturas CMFB e SMFB. Nesse MFB, $f_m(n) = h_m(n)$, e os filtros de análise são descritos por

$$H_m(z) = \sum_{n=0}^{N_p} h_p(n) \exp_{m,n} z^{-n} \quad (2.83)$$

onde

$$\exp_{m,n} = \sqrt{2} e^{j2m(n-N_p/2)\pi/(2M)} \quad (2.84)$$

para $m = 0, \dots, 2M-1$.

Os sistemas MDFT apresentam como principal atrativo a fase linear nos subcanais.

Para os MFBs, é conhecido na literatura [3, 6, 7, 4, 26] que a realização dos bancos de análise e síntese é rápida porque depende somente de uma filtragem com

complexidade da ordem do filtro protótipo mais a complexidade de uma transformada rápida do tipo DFT, cosseno ou seno. Desse modo, o banco de análise é implementado com filtragem seguida de transformação, e o banco de síntese com transformação seguida de filtragem. No rigor matemático, considerando as matrizes polifásicas das equações (2.10) e (2.11),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z) &= \mathbf{T}\mathbf{U}(z) \\ \mathbf{R}(z) &= \mathbf{V}(z)\mathbf{T}^{-1},\end{aligned}\tag{2.85}$$

onde $\mathbf{V}(z)\mathbf{U}(z) = z^{-d}\mathbf{I}$, $\mathbf{U}(z)$ e $\mathbf{V}(z)$ são matrizes FIR, d é um inteiro qualquer, e \mathbf{T} é a matriz que representa a transformada em questão.

2.9 PR em MFBs Paraunitários

A reconstrução perfeita em bancos de filtros é atingida ao satisfazer a relação $\mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}(z)\mathbf{R}(z) = \mathbf{I}z^{-\Delta}$ (consultar Figuras 2.7 e 2.12). Porém, na literatura, é conhecido que a matriz de componentes polifásicas do banco de análise $\mathbf{E}(z)$ pode ser desenvolvida para ser paraunitária ou sem perdas [3], o que significa $\mathbf{E}^H(z)\mathbf{E}(z) = \mathbf{I}$, sendo que \mathbf{I} é uma matriz identidade de dimensão $(M \times M)$, e $(^H)$ denota o transposto conjugado. Dessa forma, a matriz polifásica do banco de síntese pode ser facilmente obtida a partir da matriz $\mathbf{E}(z)$, pertencendo os coeficientes dos subfiltros ao conjunto dos números reais (uma transformada apropriada, tal como a DFT, se encarregará do tratamento de sinais complexos), da seguinte forma:

$$\mathbf{R}(z) = z^{-\Delta}\mathbf{E}^{-1}(z) = z^{-\Delta}\mathbf{E}^T(z^{-1}).\tag{2.86}$$

uma vez que $z = e^{j\omega}$.

Agora, o que se deve procurar é uma forma de desenvolver o filtro protótipo para obter uma matriz polifásica paraunitária para o banco de análise, e isso é obtido quando [3, 4]

$$S_j(z^{-1})S_j(z) + S_{j+M}(z^{-1})S_{j+M}(z) = \frac{1}{2M}\tag{2.87}$$

para $j = 0, 1, \dots, M-1$, sendo $S_j(z)$ as componentes polifásicas do filtro protótipo $H_p(z)$.

Se o filtro protótipo for de fase linear, essas restrições podem ser reduzidas pela metade, porque elas são únicas apenas para $j = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}$, se M é ímpar,

ou $j = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1$, se M é par. Essa regra vale para os seguintes MFBs: CMFB, SMFB e MDFTFB.

A condição da equação (2.87) se resume a requerer que as componentes polifásicas do filtro protótipo sejam complementares em potência, duas a duas. Esse tipo de relacionamento entre as componentes polifásicas pode ser atendido usando estruturas treliça [15, 27], as quais são descritas no Apêndice C.

2.10 Complexidade Computacional

A complexidade computacional em um FB pode ser definida como o número de operações de multiplicação/soma realizadas no banco de análise ou no banco de síntese de forma a gerar uma amostra na saída de sua estrutura. A complexidade será derivada para o CMFB, sendo a mesma no SMFB e muito similar no MDFTFB, mas foge do escopo deste trabalho tal demonstração (ver [7] e [6]).

No caso do bloco de síntese, basta observar quantas multiplicações e somas foram necessárias para gerar uma amostra na saída $\hat{y}(n)$, levando em conta a complexidade computacional de se realizar a transformada DCT-IV [5] e de se realizar a filtragem com as componentes polifásicas $S_j(-z^2)$, para $j = 0, 1, \dots, 2M - 1$. As operações realizadas com as matrizes identidade e identidade reversa³, respectivamente \mathbf{I} e \mathbf{J} , não serão levadas em conta, uma vez que tais matrizes irão possuir elementos $+2$, $+1$, 0 , -1 e -2 , o que não têm a mesma relevância que uma operação de multiplicação não trivial⁴, e resultam em uma pequena quantidade de adições (aproximadamente M para cada matriz). Já para o banco de análise, a complexidade computacional deverá ser vista como o número de operações realizadas para obter uma amostra $x_j(m)$, em um dos ramos ou subbandas, para $j = 0, 1, \dots, M - 1$.

A ordem do número de realizações de operações de multiplicação e adição (conjuntamente) será definido como $O(x)$, o que significa que foi realizada uma

³As matrizes identidade e identidade reversa irão compor duas novas matrizes, definidas como $[\mathbf{I} + (-1)^K \mathbf{J}]$ e $[\mathbf{I} - (-1)^K \mathbf{J}]$.

⁴De fato, multiplicar por $+1$ ou 0 não tem peso computacional algum, e multiplicar por -1 implica apenas em inverter o sinal do número, o que, em uma aritmética de complemento dois, se resume a inverter o número original e adicionar a ele uma unidade. As operações de multiplicação por $+2$ e -2 também são simples.

ordem de x operações de multiplicação e x operações de adição em determinado processamento. Esse operador definirá a complexidade computacional do CMFB, de onde o O significa “da ordem ou acima de”.

A complexidade computacional da transformada DCT é dada por $O(N \log_2 N)$ [28], onde N é o tamanho de bloco a ser transformado, resultando, no caso do CMFB, em $\gamma = O(M \log_2 M)$, uma vez que $N = M$. Já a complexidade computacional para se filtrar o sinal com as componentes polifásicas do filtro protótipo é $\beta = 2MO(K)$, uma vez que existem $2M$ componentes e cada filtro FIR tem comprimento K .

O multiplicador c na entrada do bloco de análise ou na saída do bloco de síntese não deve ser esquecido, o qual tem peso 1 (não implica em adição, mas a multiplicação, por ser mais complexa que a adição, pode contar como $O(1)$).

A complexidade computacional do bloco de síntese será, portanto

$$\mathcal{C} = \frac{\beta + \gamma + 1}{M} = 2K + \alpha \quad (2.88)$$

com $\alpha = \frac{\gamma+1}{M}$. E, uma vez que, na saída do bloco de síntese, a rede de atraso com interpoladores irá gerar M amostras para cada operação em bloco de transformada e filtragem realizada, a complexidade computacional foi dividida por M . É importante ressaltar que o bloco de análise apresenta a mesma complexidade computacional do bloco de síntese. Já o número de multiplicações distintas do banco CMFB para análise/síntese é dado por

$$\mathcal{M} = 2KM + \alpha M \quad (2.89)$$

Se o filtro protótipo possuir fase linear, a complexidade computacional e o número de multiplicações distintas, já incluindo o peso da DCT, serão:

$$\mathcal{C} = K + \alpha \quad (2.90)$$

$$\mathcal{M} = KM + \alpha M \quad (2.91)$$

É interessante observar que, em problemas que se deseje otimizar as figuras de mérito de um banco CMFB com filtro protótipo de fase linear, não existirão \mathcal{M} graus de liberdade, mas sim

$$\mathcal{M}_p = \mathcal{M} - \alpha M = KM \quad (2.92)$$

uma vez que os únicos multiplicadores otimizáveis são os relacionados ao filtro protótipo (os seus coeficientes), sendo então esta última medida bem mais apro-

priada para esse trabalho, a qual define simplesmente o número de coeficientes ou variáveis a otimizar.

2.11 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os fundamentos teóricos necessários ao desenvolvimento do trabalho, no que tange as estruturas multitaxas.

A teoria que envolve os bancos de filtros de uma forma geral e os bancos de filtros modulados foi detalhada, assim como o relacionamento destes com os transceptores FIR, objeto de estudo deste trabalho.

No caso dos transceptores FIR multicanais, também conhecidos como transmultiplexadores ou TMUXes, também foram apresentados fundamentos teóricos com enfoque dedicado.

Todo o capítulo serve de base para o bom entendimento dos capítulos seguintes.

Capítulo 3

Técnicas de Otimização

Neste capítulo será dada uma breve introdução aos métodos de otimização utilizados nesta pesquisa de tese: os algoritmos de otimização de programação quadrática e seqüencial quadrática, que são utilizados na resolução de problemas de aproximação quadrática com restrições lineares e não-lineares, respectivamente.

As Seções 3.1 e 3.2 apresentam uma introdução à otimização geral e sem restrições, respectivamente. Já a Seção 3.3 detalha como deve ser encontrado o passo na direção do(s) ponto(s) de mínimo. A Seção 3.4 explica como resolver um problema quadrático com restrições não-lineares a partir de otimizações seqüenciais de problemas quadráticos com restrições lineares. E finalmente, a Seção 3.5 conclui o capítulo.

3.1 Introdução à Otimização Quadrática com e sem Restrições

Seja o problema geral ou GP (*general problem*) de otimização

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m_e \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m_e + m_i \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $f(x)$ e $g_i(x)$ são funções possivelmente não-lineares. Se $f(x)$ for quadrática e as restrições $g_i(x)$ forem lineares, o problema pode ser solucionado com programação

quadrática ou QP (*quadratic programming*) [29, 30]. Por outro lado, se $f(x)$ e $g_i(x)$ são não-lineares, a solução irá se basear em programação não-linear ou NP (*non-linear programming*), que geralmente usa métodos iterativos [29].

3.2 Otimização sem Restrições

Primeiro, considere o caso mais simples onde não existem restrições. Assumindo que a função a otimizar $f(x)$ seja quadrática, e usando sua representação em série de Taylor em torno de $(x - x_0)$, o problema se traduz em

$$\min_{x \in \mathcal{R}} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \quad (3.2)$$

onde, após aplicada a derivada primeira e igualando a zero para achar o ponto de mínimo se $f''(x) > 0$, resulta em

$$x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}. \quad (3.3)$$

Ou seja, para qualquer ponto x_0 , se a função for quadrática, o mínimo será obtido através da equação (3.3).

Agora, seja a representação vetorial da versão multivariável do GP apresentado, com representação de segunda ordem de $f(\mathbf{x})$, ou

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n} f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H}_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (3.4)$$

onde o operador ∇f denota o gradiente de f , ou

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]^T, \quad (3.5)$$

e \mathbf{H}_0 é a matriz hessiana [29] em torno do ponto x_0 , cujos elementos são dados por

$$[\mathbf{H}_0]_{i,j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (3.6)$$

a qual carrega informações de curvatura da função f , ou seja, derivadas parciais de segunda ordem.

Similarmente à equação (3.3), o ponto de mínimo é obtido por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{H}_0^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_0), \quad (3.7)$$

sendo que é necessário satisfazer

$$\mathbf{x}^T \mathbf{H}_0 \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (3.8)$$

o que significa dizer que a hessiana é positiva definida [29, 31].

Muitos algoritmos de otimização não calculam diretamente a matriz hessiana. Pelo contrário, tentam obter aproximações para a mesma em um processo iterativo. Tais algoritmos foram batizados como *Quasi-Newton* (QN) [29]. Nestes casos, e levando também em conta que a função $f(\mathbf{x})$ em geral é aproximada por sua série de Taylor de segunda ordem (talvez a função tenha ordem superior a 2), é necessário inserir um fator de ajuste α que determina o comprimento do passo na direção de busca $\mathbf{d} = -\mathbf{H}^{-1} \nabla f$.

O GP multivariável nos métodos de otimização QN é então escrito em sua forma mais geral, em cada iteração k , por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k - \alpha_k \hat{\mathbf{H}}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{d}_k, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{d}_k = \hat{\mathbf{H}}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k)$, $\hat{\mathbf{H}}_k$ é uma estimativa de \mathbf{H} e, geralmente, $\hat{\mathbf{H}}_0 = \mathbf{I}$. Por conveniência, a estimativa da matriz hessiana na iteração k será denotada apenas por \mathbf{H}_k .

Existem técnicas especiais para achar o melhor passo α_k na direção de busca do mínimo baseadas em interpolação quadrática e cúbica. Entretanto, tais técnicas não serão abordadas e podem ser consultadas em [29, 30]. Da mesma forma, existem diferentes algoritmos de atualização da matriz Hessiana, sendo que os mais conhecidos e utilizados são o BFGS e o DFP [29]. Por exemplo, no BFGS, cada iteração é acompanhada de uma atualização de \mathbf{H}_k^{-1} dada por

$$\mathbf{H}_{k+1}^{-1} = \mathbf{H}_k^{-1} + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k^{-T}}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{s}_k}, \quad (3.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k &= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \\ \mathbf{q}_k &= \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k), \end{aligned} \quad (3.11)$$

o que evita que seja calculada a matriz hessiana inversa, pois a mesma já está sendo estimada iterativamente [29].

Já no método DFP, tem-se

$$\mathbf{H}_{k+1}^{-1} = \mathbf{H}_k^{-1} + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{q}_k} - \frac{\mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T \mathbf{H}_k^{-T}}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{q}_k}. \quad (3.12)$$

3.3 Busca do Melhor Passo de Atualização

O método de busca em linha ou LN (*line-search*) permite encontrar um passo α na direção \mathbf{d}_k que garanta que o processo iterativo continuamente decresce a função objetivo. Isso é feito minimizando modelos de interpolação polinomial da função objetivo.

Existem duas etapas no método LN:

- A etapa de delimitação: busca o intervalo de valores para α que delimitam a faixa dinâmica de $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$.
- A etapa de seccionamento: divide o intervalo delimitado em subintervalos onde o mínimo será aproximado por interpolação polinomial.

O passo resultante satisfaz as condições de Wolfe [29, 30]:

$$f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) + c_1 \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k \quad (3.13)$$

$$\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k)^T \mathbf{d}_k \geq c_2 \alpha \nabla f^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k, \quad (3.14)$$

onde c_1 e c_2 são constantes que satisfazem $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq 1$.

A equação (3.13) requer que α_k reduza suficientemente a função objetivo. Já a equação (3.14) garante que o passo não seja muito pequeno. Pontos que satisfaçam ambas as condições são ditos pontos aceitáveis.

Em uma dada iteração k , o passo a ser dado na direção de atualização \mathbf{d}_k será considerado determinado se forem satisfeitas

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) < f(\mathbf{x}_k) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k \geq 0, \quad (3.16)$$

com

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k. \quad (3.17)$$

Então será atualizada a matriz hessiana e deverá ser encontrada uma nova direção de atualização \mathbf{d}_{k+1} . Caso contrário, se a equação (3.15) não for atendida, o algoritmo LN tentará buscar um novo valor para o passo da iteração k , que será uma versão reduzida em amplitude do passo anterior. Se somente a equação (3.16) não for satisfeita, então novas interpolações cúbicas serão realizadas para encontrar um tamanho de passo que permita satisfazer tal equação.

Para cada direção de busca \mathbf{d}_k é necessário executar o algoritmo LN para encontrar o passo mais adequado.

3.4 Otimização com Restrições

Seja o GP multivariável de otimização com restrições

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n} && f(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a} && \\ & && g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m_e \\ & && g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde $f(\mathbf{x})$ e $g_i(\mathbf{x})$ são definidos como anteriormente, e $m = m_e + m_i$.

Os métodos de otimização com restrições utilizados atualmente para resolver o GP da equação (3.18) buscam satisfazer as condições de Kuhn-Tucker (KT) [29], que são condições necessárias de otimalidade para um problema de otimização com restrições. Se $f(\mathbf{x})$ e $g_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m$, são funções convexas [29], então as condições KT são necessárias e suficientes para otimalidade. Se for definido o lagrangeano [29]

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{3.19}$$

onde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= [\lambda_1 \ \dots \ \lambda_m]^T \\ \mathbf{g} &= [g_1(\mathbf{x}) \ \dots \ g_m(\mathbf{x})]^T, \end{aligned} \tag{3.20}$$

o ponto ótimo pode ser encontrado fazendo

$$\nabla L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) = 0. \tag{3.21}$$

As condições de KT estabelecem que no ponto ótimo $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ \lambda_i^* &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{3.22}$$

As duas últimas linhas da equação (3.22) determinam implicitamente que, se a restrição $g_i(\mathbf{x}^*)$ não está ativa (foi satisfeita), seu multiplicador de Lagrange será nulo.

Se a equação (3.19) for representada por sua aproximação quadrática (na verdade, no ponto ótimo seria a representação quadrática de $f(\mathbf{x})$ porque as restrições foram atendidas), e se as restrições forem linearizadas, o problema NP se transforma em um problema QP, ou seja, função objetivo quadrática com restrições lineares. Dessa forma, solucionar o problema NP pode se traduzir em seqüencialmente solucionar subproblemas do tipo QP, o que é conhecido como programação quadrática seqüencial ou SQP (*Sequential Quadratic Programming*).

O subproblema QP é dado por

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k + \mathbf{d}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{d}_k \\ \text{sujeito a} \quad & \\ \nabla g_i(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k + g_i(\mathbf{x}_k) &= 0, \quad i = 1, \dots, m_e \\ \nabla g_i(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k + g_i(\mathbf{x}_k) &\leq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde $\mathbf{d}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$.

O método SQP possui 3 estágios principais [29, 30]:

- Atualização da hessiana da função objetivo dada pelo lagrangeano.
- Solução de um subproblema do tipo QP.
- Cálculo do passo da procura em linha e da função de mérito.

Cada um dos estágios é brevemente descrito na seqüência.

3.4.1 Atualização da Hessiana

Sendo a função objetivo definida pelo lagrangeano, as equações de atualização da hessiana de acordo com o método BFGS são dadas por

$$\mathbf{H}_{k+1}^{-1} = \mathbf{H}_k^{-1} + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k^{-T}}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{s}_k}, \quad (3.24)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k &= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \\ \mathbf{q}_k &= \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (\nabla g_i(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla g_i(\mathbf{x}_k)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Nesse caso também se aplicam outros métodos de estimação da hessiana tal como o DFP [29, 30].

Essa é a iteração principal do método SQP.

3.4.2 Solução QP

Seja o problema QP

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d} \in \mathcal{R}^n} \quad & q(\mathbf{d}) = \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} + \mathbf{c}^T \mathbf{d} \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & [\mathbf{A}]_i \mathbf{d} = b_i, \quad i = 1, \dots, m_e \\ & [\mathbf{A}]_i \mathbf{d} \leq b_i, \quad i = m_e + 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.26)$$

o qual se relaciona intimamente com a equação (3.23), onde $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$.

Para solucionar o problema acima é usado o método do conjunto ativo [29, 30], o qual define uma matriz $\bar{\mathbf{A}}_k$, iterativa, que guarda informação das restrições ativas, ou seja, as restrições que foram atendidas (se encontram na fronteira das restrições). Já os vetores $[\mathbf{A}]_i$ são as linhas da matriz de restrições \mathbf{A} , de tamanho $m \times n$, onde n é o número de variáveis a otimizar.

A matriz $\bar{\mathbf{A}}_k$ é atualizada em cada iteração k e é a base para encontrar a direção de busca $\hat{\mathbf{d}}_k$, assim definida aqui para ser diferenciada da direção de busca \mathbf{d}_k das iterações principais do método SQP (ver Subseção 3.4.1). A direção de busca $\hat{\mathbf{d}}_k$ está contida no espaço varrido pelas colunas da matriz \mathbf{Z}_k , que são ortogonais à matriz de restrições ativas $\bar{\mathbf{A}}_k$, ou seja [29, 30]

$$\bar{\mathbf{A}}_k \mathbf{Z}_k = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

Para que a direção de busca $\hat{\mathbf{d}}_k$ se encontre no espaço nulo da matriz de restrições ativas, ou seja, mantenha ativas as restrições, basta fazer

$$\hat{\mathbf{d}}_k = \mathbf{Z}_k \mathbf{p}, \quad (3.28)$$

onde \mathbf{p} é um vetor qualquer. Sendo assim, o problema sofre mudança de variável e é reescrito por

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{R}^n} \quad & q(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{Z}_k^T \mathbf{H} \mathbf{Z}_k \mathbf{p} + \mathbf{c}^T \mathbf{Z}_k \mathbf{p} \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & [\mathbf{A}]_i \mathbf{Z}_k \mathbf{p} = b_i, \quad i = 1, \dots, m_e \\ & [\mathbf{A}]_i \mathbf{Z}_k \mathbf{p} \leq b_i, \quad i = m_e + 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.29)$$

Se a matriz \mathbf{H} é positiva definida, então o mínimo é encontrado fazendo

$$\nabla q(\mathbf{p}) = \mathbf{Z}_k^T \mathbf{H} \mathbf{Z}_k \mathbf{p} + \mathbf{c}^T \mathbf{Z}_k = \mathbf{0}. \quad (3.30)$$

O vetor de variáveis a otimizar é então finalmente atualizado por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \hat{\mathbf{d}}_k, \quad (3.31)$$

com

$$\hat{\mathbf{d}}_k = \mathbf{Z}_k \mathbf{p} \quad (3.32)$$

Em cada iteração, devido à natureza quadrática do problema, existem apenas duas escolhas para o comprimento do passo α . A primeira é utilizar passo unitário, que é o passo exato para o mínimo da função. Por outro lado, as restrições inativas (fora do conjunto ativo) podem influenciar no tamanho do passo, para evitar que o processo iterativo se afaste da fronteira dessas restrições. Nesse caso, o passo seria dado por [30]

$$\alpha = \min_i \left\{ \frac{-([\mathbf{A}]_i \mathbf{x}_k - b_i)}{[\mathbf{A}]_i \hat{\mathbf{d}}_k} \right\} \quad (3.33)$$

o qual é definido para as restrições fora do conjunto ativo e a direção $\hat{\mathbf{d}}_k$ segue para a fronteira, ou $[\mathbf{A}]_i \hat{\mathbf{d}}_k > 0$, $i = 1, \dots, m$.

3.4.3 Procura em Linha e Função de Mérito

A solução do subproblema QP produz um vetor \mathbf{d}_k que é usado para realizar cada nova iteração de atualização das variáveis do problema, ou seja,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k. \quad (3.34)$$

O tamanho do passo α_k é escolhido de forma a produzir um decréscimo suficiente em uma função de mérito. Uma função de mérito comumente usada é dada por [29, 30]

$$\Psi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m_e} r_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=m_e+1}^m r_i \max[0, g_i(\mathbf{x})], \quad (3.35)$$

onde o parâmetro de penalidade r_i é dado por

$$r_i = (r_{k+1})_i = \max[\lambda_i, 1/2((r_k)_i + \lambda_i)], \quad (3.36)$$

permitindo contribuição das restrições que estão inativas na solução QP mas estavam recentemente ativas. Nessa solução, o parâmetro de penalidade r_i é inicialmente definido por

$$r_i = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}{\|\nabla g_i(\mathbf{x})\|}, \quad (3.37)$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma euclidiana. Isso garante que as restrições com menores gradientes tenham maiores contribuições na função de mérito, o que seria o caso para restrições ativas no ponto de solução.

3.5 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada uma breve introdução aos métodos de otimização quadrática e seqüencial quadrática, que são muito importantes para o desenvolvimento desta pesquisa de tese.

Todos os projetos dos sistemas transceptores pesquisados dependem fortemente de um bom método de otimização, capaz de lidar usualmente com restrições não-lineares.

Para futuras referências e maior aprofundamento no assunto, favor consultar [29].

Ambas as rotinas QP e SQP utilizadas nessa pesquisa estão disponíveis no *toolbox* de otimização do MATLAB® [30], conhecidas por *fminunc* e *fmincon*, respectivamente.

Capítulo 4

Otimização de Bancos de Filtros Modulados Não-Redundantes

Neste capítulo, transceptores não-redundantes baseados em bancos de filtros modulados serão desenvolvidos, de forma a otimizar a ocupação espectral do sistema, reduzindo a interferência em bandas adjacentes. Para tanto, será feito o uso de sistemas multiportadoras com memória finita (FIR).

Este capítulo apresenta parte do trabalho desenvolvido durante a pesquisa de tese, e que, dentre os frutos, estão os artigos de revista [18, 32] e o artigo de congresso [33].

Dentre as propostas apresentadas no primeiro artigo pode-se citar o desenvolvimento de método computacionalmente eficiente para o cálculo das figuras de mérito dos sistemas, com redução drástica do tempo de processamento, o que viabiliza a realização de projetos jamais vistos na literatura, dada a complexidade dos mesmos. Além disso, outra proposta foi o desenvolvimento de um procedimento de otimização capaz de modelar a resposta em frequência dos subfiltros do sistema de forma obter um balanceamento entre energia e máximo pico de transferência na faixa de rejeição, através do uso da técnica WLS [4, 34], e muito útil para minimizar interferência entre sistemas que ocupem faixas espectrais adjacentes.

Já para os artigos [32, 33], as principais propostas foram: desenvolvimento de estrutura especial para o banco de filtros modulados, baseada na técnica FRM [35, 36], que permitiu realizar projetos de grande complexidade computacional, com número elevado de bandas e/ou pequena sobreposição espectral; proposta de novas

restrições de projeto no domínio temporal, que garantem uma redução ainda maior na complexidade do processo de otimização.

A Seção 4.1 apresenta a teoria geral envolvendo os MFBs estudados. Já a Seção 4.2 apresenta as funções objetivo comumente utilizadas nesse tipo de projeto. Uma técnica de otimização especialmente adaptada ao projeto de MFBs é apresentada em seguida na Seção 4.3. As restrições de projeto no domínio da frequência e do tempo são detalhadamente descritas nas Seções 4.4 e 4.5. Um procedimento especial de otimização com ajuste fino é descrito na Seção 4.6 e exemplos numéricos são vistos na Seção 4.7. A seção 4.8 conclui o capítulo.

4.1 O Projeto do Banco MFB

O projeto de MFBs se concentrará no desenvolvimento de filtros protótipos para bancos criticamente amostrados (sem redundância), porque não existe estrutura rápida para implementar MFBs redundantes. Por isso, o fator de mudança de taxa de amostragem N será substituído pelo número de subbandas M , uma vez que são iguais neste caso.

O filtro protótipo $H_p(z)$ para bancos MFB pode ser definido como

$$H_p(z) = \mathbf{h}_p^T \mathbf{d}(z) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{h}_p = [h_p(0) \ h_p(1) \ \dots \ h_p(N_p)]^T \quad (4.2)$$

$$\mathbf{d}(z) = [1 \ z^{-1} \ \dots \ z^{-N_p}]^T, \quad (4.3)$$

onde $h_p(n)$, $n = 0, \dots, N_p$, são os coeficientes do filtro protótipo, e sua ordem é dada por

$$N_p = 2KM - 1, \quad (4.4)$$

onde $\varrho = 2K$ é o fator de sobreposição (*overlapping factor*) de blocos, e que determina quantos blocos de informação na entrada do transmissor são utilizados para gerar um bloco na saída do mesmo. A ordem é necessariamente ímpar e escolhida dessa forma porque os MFBs com estrutura rápida requerem tal tipo de restrição, conforme a Seção 2.8. Além disso, o filtro protótipo possui fase linear.

A partir de modulações do filtro protótipo, todos os filtros das subbandas do

transceptor são desenvolvidos. Por isso, o filtro protótipo deve seguir certos critérios de projeto para resultar em um bom sistema transceptor.

4.2 Condições de Seletividade e Função Objetivo

As equações (2.60) e (2.61) já definem condições necessárias e suficientes para que um FB possa ser desenvolvido de forma a resultar em um TMUX com reconstrução perfeita. Entretanto, é interessante impor ao transceptor uma boa seletividade em suas subbandas por dois motivos: pelo lado do transmissor, será possível reduzir a interferência co-canal (com bandas adjacentes) com outros sistemas de transmissão que estejam atuando no local; já no receptor, o ruído proveniente de subbandas adjacentes (ruído branco) será mais atenuado, reduzindo o ruído de recepção da subbanda em questão.

Então, para impor seletividade nas subbandas do sistema transceptor, define-se uma função objetivo (OF) que contemple a faixa de rejeição das mesmas, ou seja,

$$E_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}_p) = \left(\int_{\omega_s}^{\pi} W^2(\omega) |H_p(e^{j\omega})|^{\mathbf{p}} d\omega \right)^{\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}} \quad (4.5)$$

Na equação (4.5), se $\mathbf{p} = 2$, $\mathbf{q} = 2$, o critério é *weighted least-squares* (WLS) [4, 37] ou *peak-constrained least-squares* (PCLS) [34, 18], ou *least-squares* (LS) se $W(\omega) = 1$. Similarmente, se $\mathbf{p} = \infty$, $\mathbf{q} = 1$ e $W(\omega) = 1$, o critério é minimax [4, 38]. Na mesma equação, $H_p(e^{j\omega})$ é a resposta em frequência do filtro protótipo e ω_s é o início da banda de rejeição.

Se o objetivo fosse desenvolver pura e simplesmente filtros FIR, a solução LS, ou seja, E_2 , poderia ser obtida analiticamente [4, 15], enquanto que a solução minimax, ou E_{∞} , poderia ser obtida usando o algoritmo de Parks-McClellan [38]. Entretanto, os algoritmos tradicionais de projeto de filtros não são apropriados para otimizar a equação (4.5), porque a solução está sujeita a restrições não-lineares de projeto impostas pela funções de distorção $T_0(z)$ e de *aliasing* $T_i(z)$, dadas pelas equações (2.60) e (2.61). Nestes casos, a solução é criar uma função objetivo modificada (*modified objective function*, MOF) que contemple as restrições de distorção do sistema e os requisitos de seletividade das subbandas, ou seja

$$\hat{F}(\mathbf{h}_p) = E_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}_p) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(\mathbf{h}_p), \quad (4.6)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor de pesos (ou multiplicadores de Lagrange) e $\mathbf{c}(\mathbf{h}_p)$ é o vetor de restrições, que necessariamente quantifica as N funções de distorção do sistema, ou seja,

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0 \ \lambda_1 \ \dots \ \lambda_{N_c}]^T \quad (4.7)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{h}_p) = [c_0(\mathbf{h}_p) \ c_1(\mathbf{h}_p) \ \dots \ c_{N-1}(\mathbf{h}_p)]^T. \quad (4.8)$$

O vetor de restrições será descrito detalhadamente mais adiante.

A MOF $\hat{F}(\mathbf{h}_p)$ desenvolvida na equação (4.6) pode ser resolvida com métodos QP ou LS [29], que requerem a formulação analítica das derivadas parciais de primeira e segunda ordem da MOF. Neste caso, $\boldsymbol{\lambda}$ deveria ser definido *a priori*. Outra solução é fazer uso de método SQP [29], que otimamente ajustará os multiplicadores de Lagrange a fim de atender às condições de KT [29], introduzidas no Capítulo 3. O segundo algoritmo de Dutta e Vidyasagar baseado em métodos QP é bastante eficiente para resolver tais problemas. O apêndice A traz maiores detalhes sobre esse algoritmo. Já a alternativa proposta nessa tese se baseia no método que será visto na Seção 4.3, menos computacionalmente intensivo e de igual eficiência.

Via de regra, o sistema terá um bom compromisso entre energia e mínima atenuação na banda de rejeição, e boas figuras de distorção, se o projeto for desenvolvido com OF do tipo LS ou WLS, sendo que projetos LS são bem mais simples. Isso é intuitivo porque as subbandas apresentarão resposta em frequência com atenuação crescente à medida que a frequência se afasta da banda passante. Entretanto, a solução WLS é mais geral, e, por isso, desenvolveu-se neste trabalho uma técnica de otimização baseada no algoritmo WLS-Chebyshev [34], conhecida como *peak constrained least squares* (PCLS), adaptada ao desenvolvimento de MFBs com restrições não-lineares [18]. Essa foi uma proposta dessa pesquisa de tese. Apesar do algoritmo ter sofrido algumas alterações, foi batizado com o mesmo nome atribuído pelos autores em [34], ou seja, PCLS. A Subseção 4.3 explica o processo iterativo PCLS e como atualizar a função de ponderação $W(\omega)$.

A equação (4.5) pode ser representada por uma versão discretizada, onde $\mathbf{p} = 2$, $\mathbf{q} = 2$, que permite obter as soluções LS, WLS, PCLS e minimax (as duas últimas iterativas), sendo descrita por

$$E'_2(\mathbf{h}_p) = \sum_{\omega_j \in [\omega_s, \pi]} W^2(\omega_j) A_{\mathbf{h}_p}^2(\omega_j) \Delta\omega, \quad (4.9)$$

onde

$$A_{h_p}(\omega_j) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N_p-1}{2}} h_p(n) \cos[\omega_j(n - N_p/2)] \quad (4.10)$$

é a resposta em frequência de fase zero de $H_p(e^{j\omega_j})$, e Δ_ω é o tamanho do intervalo da grade de frequência. O número de pontos em frequência ω_j deve ser pelo menos 10 vezes o número de coeficientes no vetor \mathbf{h}_p [18], e foi determinado após a realização de inúmeros projetos.

Para executar o processo de otimização, o vetor gradiente da função objetivo deve ser computado [29]. O gradiente de uma função genérica $f(h_p(0), h_p(1), \dots, h_p(N_p))$, escalar, simplesmente denominada f , é escrito como:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial h_p(0)} \\ \frac{\partial f}{\partial h_p(1)} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial h_p(N_p)} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

onde o operador $\frac{\partial f}{\partial h_p(n)}$ denota a derivada parcial da função f em relação à variável $h_p(n)$.

As derivadas parciais de $E'_2(\mathbf{h}_p)$, para $n = 0, \dots, \frac{N_p-1}{2}$ (o filtro protótipo tem fase linear para resultar em uma transferência total do FB de fase linear), são detalhadas em [18], e são necessárias para calcular o vetor gradiente usado no algoritmo de otimização. Tais derivadas são dadas por:

$$\frac{\partial E'_2(\mathbf{h}_p)}{\partial h_p(n)} = 4\Delta_\omega \sum_{\omega_j} W^2(\omega_j) A_{h_p}(\omega_j) \cos[\omega_j(n - N_p/2)], \quad (4.12)$$

uma vez que N_p é ímpar.

As derivadas parciais das restrições na MOF em relação aos parâmetros a otimizar serão tratadas nas Seções 4.4 e 4.5. Tais derivadas são necessárias para o cálculo do vetor gradiente que será usado durante o processo de otimização (ver Seções 3.2 e 3.4).

O problema de encontrar o filtro ótimo PCLS sujeito às restrições não-lineares foi estudado em [39], resultando em um projeto mais complexo do que o que é proposto em [18]. Já o projeto de FBs 2-bandas foi estudado em [40]. Um tratamento mais geral pode ser encontrado em [15], porém envolve otimização QP baseada em

objetivo LS ou minimax, mas com função objetivo similar à (4.6). Outra técnica interessante é apresentada em [41], onde o filtro protótipo é restrito a ser uma fatoração espectral de um filtro de Nyquist [42, 43]. O resultado é um MFB com função de distorção nula ($T_0(z) = z^{-d}$, $d \in Z$, onde d é um atraso qualquer), mas que ainda representa distorção devido ao *aliasing*. O método SQP foi necessário em alguns momentos nessa tese para efetuar a otimização do MFB porque existiam restrições não-lineares.

4.3 O Algoritmo PCLS

Como apresentado em [37, 44], a solução do problema minimax pode ser aproximado por sucessivas minimizações WLS. A solução PCLS também é capaz de solucionar o problema minimax. Porém, a solução PCLS não se restringe a unicamente este, mas atinge qualquer relação de compromisso entre as soluções LS e minimax, através de um processo iterativo.

A equação (4.9) faz uso de uma função de ponderação $W(\omega_j)$, a qual deve ser calculada iterativamente no algoritmo PCLS. Sendo assim, a função objetivo PCLS fica

$$E'_2(\mathbf{h}_p) = \sum_{\omega_j \in [\omega_s, \pi]} W_k^2(\omega_j) |H_p(e^{j\omega_j})|^2 \Delta\omega, \quad (4.13)$$

onde $W_k(\omega_j)$ é a função de ponderação na k -ésima iteração.

Para realizar a otimização PCLS de um filtro FIR, basta minimizar a equação (4.13) iterativamente com o método descrito em [34], o qual é capaz de atingir uma excelente relação de compromisso entre as soluções LS e minimax. Neste algoritmo, o processo de otimização modifica gradualmente a função objetivo em cada iteração através de ponderações para cada ponto da grade de frequências pelo valor quadrático do erro entre a resposta desejada (zero) e a atual, na banda de rejeição [34]. Isto é alcançado ao longo das iterações $k = 0, 1, \dots, k_m$, onde k_m é o número máximo de iterações, fazendo

$$W_{k+1}^2(\omega_j) = W_k^2(\omega_j) V_k(\omega_j) \quad (4.14)$$

$$V_k(\omega_j) = \begin{cases} B_k(\omega_j), & \omega_s \leq \omega_j \leq \omega_J \\ B_k(\omega_J), & \omega_J \leq \omega_j \leq \pi \end{cases}, \quad (4.15)$$

com

$$B_k(\omega_j) = \frac{(\omega_j - \omega_I)E(\omega_{I+1}) + (\omega_{I+1} - \omega_j)E(\omega_I)}{(\omega_{I+1} - \omega_I)},$$

$$\omega_I \leq \omega_j \leq \omega_{I+1}, \quad (4.16)$$

e

$$E(\omega_j) = |H_p(e^{j\omega_j})|, \quad \omega_s \leq \omega_j \leq \pi, \quad (4.17)$$

onde as frequências ω_I , arranjadas em ordem crescente, para $I = 1, 2, \dots, J, \dots, N_I$, correspondem aos picos da função erro $E(\omega_j)$ na banda de rejeição, na k -ésima iteração. Desta forma, a função $B_k(\omega_j)$ se torna a envoltória de $|H_p(e^{j\omega})|$ naquela iteração. O parâmetro J caracteriza unicamente o projeto PCLS, uma vez que determina a grade de frequências onde a resposta do filtro protótipo transita do comportamento minimax para o LS. Em particular, os projetos LS e minimax correspondem a $J = 1$ ($\omega_J = \omega_s$) e $J = N_I$ ($\omega_J = \pi$), respectivamente. Como resultado, N_I é o índice do último pico da função erro, uma vez que as fronteiras da faixa de rejeição também são consideradas picos [34]. A Figura 4.1 mostra a função erro (linha pontuada) para um filtro passa-baixas genérico, assim como sua envoltória $B_k(\omega)$ (linha tracejada-pontuada) e a envoltória modificada $V_k(\omega)$ (linha sólida), a qual é forçada a ser constante a partir da frequência ω_J ($J = 5$ no exemplo).

Agora, o procedimento para o projeto de filtros protótipos PCLS para MFBs baseado na função objetivo modificada na equação (4.6) é apresentado.

Assumindo que $\hat{F}(\mathbf{h}_p)$ leva em consideração a função objetivo WLS $E'_2(\mathbf{h}_p)$ e as restrições não-lineares do problema em questão, como na equação (4.6), os passos que descrevem um procedimento suavemente convergente são os seguintes:

1. Defina o número de subbandas M e o fator de sobreposição $\varrho = 2K$. Escolha algum filtro protótipo com comportamento LS e comprimento $2KM$, como solução inicial ou, alternativamente, use um protótipo PR como descrito em [15, 27]. Faça $k = 0$ (primeira iteração) e ajuste o parâmetro J que unicamente determina a função de ponderação, ou

$$W_k^2(\omega_j) = \left(\frac{V_k(\omega_j)}{\bar{V}_k} \right)^{\theta_k}, \quad (4.18)$$

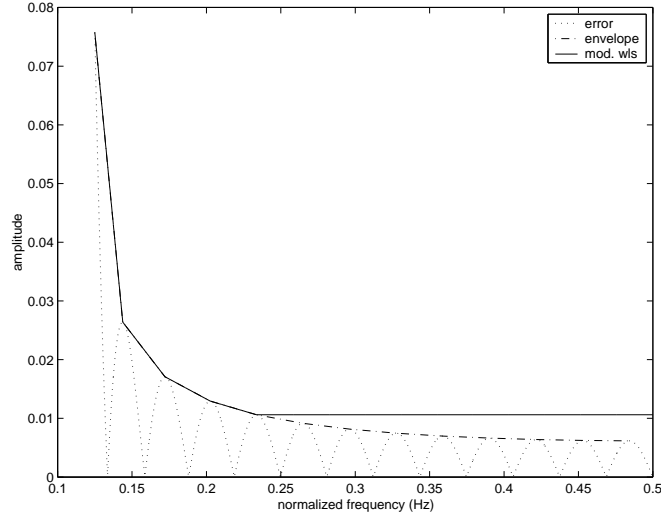


Figura 4.1: Função erro $E(\omega)$ (linha pontuada), e suas derivações $B(\omega)$ (envoltória, linha tracejada-pontuada) e $V(\omega)$ (linha sólida), para um filtro genérico passa-baixas.

com $V_k(\omega_j)$ dado pela equação (4.15), a qual precisa ser calculado sobre uma grade de frequências densa, com $S \approx 10N_p$ pontos, e onde

$$\bar{V}_k = \frac{1}{S} \sum_{\omega_j} V_k(\omega_j) \quad \omega_j \in [\omega_s, \pi] \quad (4.19)$$

é o valor médio da função envoltória calculada na k -ésima iteração, e

$$\theta_k = \theta_{k-1}^\psi \quad (4.20)$$

é atualizado em cada iteração usando o parâmetro ψ , começando por $\theta_0 = 1,5$. Um bom valor para este parâmetro encontrado heurísticamente é $\psi = 0,9$. Cuidado deve ser tomado para evitar que θ_k se torne muito pequeno. Uma boa faixa para tal parâmetro é dada em [37] $1,2 \leq \theta_k \leq 2$, o que significa que θ_0 pode ser ajustado até para um valor maior do que o proposto no procedimento acima.

Escolha um algoritmo QP, ajustando os pesos das restrições no vetor $\boldsymbol{\lambda}$ e fornecendo ao algoritmo de otimização a função $\hat{F}(\mathbf{h}_p)$ e suas derivadas parciais de primeira ordem.

Otimize eficientemente os coeficientes do filtro protótipo, mantendo a função de ponderação WLS inalterada durante o decorrer do processo, na iteração atual.

2. Faça $k = k+1$. Se $k = k_m$ for alcançado ou outro qualquer critério de tolerância for satisfeito, pare. Caso contrário, calcule V_k e \bar{V}_k como nas equações (4.15) e (4.19) e atualize $W_k^2(\omega_j)$ como segue:

$$W_k^2(\omega_j) = \begin{cases} W_{k-1}^2(\omega_j) \left(\frac{V_k(\omega_j)}{\bar{V}_k} \right)^{\theta_k}, & \omega_j \in [\omega_s, \omega_J] \\ W_{k-1}^2(\omega_j) \left(\frac{\epsilon}{\bar{V}_k} \right)^{\theta_k}, & \omega_j \in [\omega_J, \pi] \end{cases}, \quad (4.21)$$

onde

$$\epsilon = \max_{\omega_J \leq \omega_j \leq \pi} \{V_k(\omega_j)\}, \quad (4.22)$$

com θ_k atualizado usando a equação (4.20). Com este novo valor de $W_k^2(\omega_j)$, calcule $E_2'(\mathbf{h}_p)$ usando a equação (4.13). Então, otimize $\hat{F}(\mathbf{h}_p)$ na equação (4.6) eficientemente usando um algoritmo QP, e repita o Passo 2. Em geral, $5 \leq k_m \leq 10$ é uma boa faixa para o número de iterações.

Se a escolha for pelo algoritmo SQP, será preciso determinar $E_2'(\mathbf{h}_p)$ e as restrições separadamente, assim como suas derivadas parciais de primeira ordem. É importante ressaltar que, quando um algoritmo tipo SQP está sendo usado, o vetor de pesos das restrições $\boldsymbol{\lambda}$ não é usado e a função objetivo se reduz a

$$\hat{F}(\mathbf{h}_p) = E_2'(\mathbf{h}_p).$$

O procedimento proposto faz uso de uma função de ponderação normalizada (dada pelas equações (4.18) e (4.21)), similarmente ao proposto em [37], de forma a assegurar que a faixa dinâmica da função de ponderação seja mantida baixa. A principal diferença é que, aqui, a atualização é feita de uma forma mais suave. Além disso, a função de ponderação possui um parâmetro extra ϵ , que atua na faixa LS da banda de rejeição, evitando que a função de ponderação se torne pequena nesta região, assegurando que picos de magnitude elevada nunca ocorram.

4.4 Restrições no Domínio da Freqüência

Na prática, para controlar a função de distorção $T_0(z)$ e a transferência de *aliasing* $T_i(z)$, $i = 1, \dots, M-1$, as seguintes restrições são definidas

$$\hat{c}_0(\mathbf{h}_p, \omega) = \left| |T_0(e^{j\omega})| - 1 \right| - \delta_1 \leq 0 \quad (4.23)$$

$$\hat{c}_i(\mathbf{h}_p, \omega) = |T_i(e^{j\omega})| - \delta_2 \leq 0, \quad (4.24)$$

para $\omega \in [0, \frac{\pi}{M}]$, uma vez que as funções $T_i(e^{j\omega})$ são periódicas com período $\frac{\pi}{M}$ [3, 15]. Foi observado em [45], que um número razoável de pontos para a grade gira em torno de $40K$, onde $\varrho = 2K$ é o fator de sobreposição, que influencia diretamente na ordem do filtro protótipo.

Os parâmetros δ_1 e δ_2 ajustam a margem permitida das distorções para o alcance da meta, e são especificações de projeto.

É importante frisar que existem técnicas para se desenvolver o projeto do FB ou do MFB de forma que as distorções sejam totalmente eliminadas devido às propriedades intrínsecas da estrutura utilizada [27, 26]. Tais técnicas são discutidas na Seção 2.9.

As restrições de desigualdade no domínio da frequência ou FDIC (*frequency domain inequality constraints*) das equações (4.23) e (4.24) devem ser calculadas para um conjunto discreto de frequências que contemple $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{M}$ e devem ter valor menor ou igual a zero em qualquer ponto do conjunto para que sejam satisfeitas. Sendo assim, podem ser definidas funções de distorção quadráticas que satisfazem tais requisitos e fornecem melhor senso de direção ao método de otimização na busca do mínimo. Tais funções são dadas por

$$c_i(\mathbf{h}_p) = \sum_{\omega \in [0, \frac{\pi}{M}] \setminus \hat{c}_i > 0} \hat{c}_i^2(\mathbf{h}_p, \omega). \quad (4.25)$$

As funções de distorção da equação (4.25) serão usadas na equação (4.6) para que seja efetuada a otimização do tranceptor.

Aparentemente, a complexidade computacional do sistema é bem elevada. Porém, existe uma forma rápida de calcular cada função $T_i(e^{j\omega})$ [45, 32], partindo da representação das funções de distorção no domínio z , que, após certo algebrismo e considerando a simetria do filtro protótipo ¹, tornam-se [18] (ver Apêndice B)

$$T_i(z) = z^{-N_p} 2M \left[a_i(N_p) + \sum_{l=1}^{K-1} a_i(N_p - 2Ml) (-1)^l (z^{2Ml} + z^{-2Ml}) \right], \quad (4.26)$$

onde N_p é a ordem do filtro protótipo, e cada coeficiente $a_i(n)$ é definido de acordo com

$$\mathcal{Z} \{W_i^n h_p(n) * h_p(n)\} = \sum_{n=0}^{2N_p} a_i(n) z^{-n}, \quad (4.27)$$

¹Os filtros protótipos para MFBs do tipo CMFB, SMFB e MDFTFB em geral possuem fase linear. [3, 4]

ou seja, os coeficientes $a_i(n)$ podem ser calculados convoluindo a resposta impulsional $h_p(n)$ com sua versão exponencial-complexa modulada $W_i^n h_p(n)$, onde $W_i = e^{\frac{j2\pi i}{M}}$. E mais, pode-se mostrar que [18] (Apêndice B)

$$T_i(z) = \mathcal{Z} \{(W_i^n h_p(n) * h_p(n)) \gamma(n)\}, \quad (4.28)$$

para $i = 0, \dots, (M - 1)$, onde

$$\gamma(n) = \begin{cases} 0, & (N_p - n) \neq 2Mc \\ 2M(-1)^c, & (N_p - n) = 2Mc, \quad c \in \mathbb{Z} \end{cases}. \quad (4.29)$$

Devido à simetria, $T_i(z) = T_{M-i}(z)$ [3, 15], as funções só precisam ser calculadas para $i = 0, \dots, \lfloor M/2 \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira de x .

Cada resposta impulsional $t_i(n) = \mathcal{Z}^{-1} \{T_i(z)\}$, para $i = 0, \dots, \lfloor M/2 \rfloor$, é calculada como segue:

1. Para um dado filtro protótipo $h_p(n)$ de ordem N_p , faça $L = \lceil (2N_p - 1)/M \rceil M$, onde $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a x , e calcule a DFT de tamanho L de $h_p(n)$ completada com zeros, a qual será chamada de $H_p(k)$.
2. Calcule $H_p^i(k) = H_p(k - L/Mi)$ simplesmente aplicando deslocamentos circulares à direita nas componentes de $H_p(k)$
3. Os coeficientes $a_i(n)$ resultam da DFT inversa do produto $H_p(k)H_p^i(k)$. Finalmente, resta multiplicar $a_i(n)$ por $\gamma(n)$ para obter a resposta impulsional desejada $t_i(n)$.

A Tabela 4.1 mostra o número de multiplicações em ponto-flutuante associadas com as equações (2.61) e (4.26), as quais representam as formulações tradicional e simplificada, respectivamente para o cálculo das funções $T_i(z)$. Foi assumido que o filtro protótipo tem fase linear e ordem $N_p = 2KM - 1$. Nesta tabela, as entradas MC e MP significam modulação por cosseno e multiplicação polinomial, nesta ordem. Percebe-se claramente que, se $K \gg 1$ e $M \gg 1$, o número total de multiplicações aproxima-se de $4K^2M^3$ e $2K^2M$ para a formulação tradicional e para a simplificada, respectivamente, resultando em uma redução por um fator $r = \frac{1}{2M^2}$ em favor das formulações simplificadas [18]. Essa foi uma proposta dessa tese, e veio a viabilizar o desenvolvimento de bancos de filtros NPR, que facilmente permitem

ajustar o compromisso entre distorção e concentração espectral. Outro ponto importante reside no fato de que o domínio das técnicas de projetos para estruturas menos restritivas (onde se baseiam os filtros NPR), permite adaptá-las com bastante eficiência aos sistemas onde o meio de transmissão é bem hostil.

Tabela 4.1: Complexidade computacional das formulações tradicional e simplificada, para o cálculo das funções $T_i(z)$.

estágio	tradicional	simplificada
MC	$4KM$	-
MP	$KM(2KM + 1) \times M$	$KM(K + 1)$
Total	$2KM^2(2KM + 1 + \frac{3}{M})$	$2KM(K + 1)$

Considerando o fato de que o ganho computacional para o cômputo das funções $T_i(z)$ é especialmente impressionante quando o número de bandas M é elevado, e a necessidade usual de MFBs com um elevado M , que traz consigo alta seletividade espectral para transmissões multiportadoras, este resultado contribuiu significativamente para o projeto de tais sistemas.

Uma vez dadas as funções de distorção quadrática $c_i(\mathbf{h}_p)$, que compõem o vetor de restrições $\mathbf{c}(\mathbf{h}_p)$, é necessário desenvolver as derivadas parciais destas em relação aos coeficientes do filtro protótipo a otimizar. Estas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial c_i}{\partial h_p(n')} = 2 \sum_{\omega \in [0, \frac{\pi}{M}] \setminus \hat{c}_i > 0} \hat{c}_i(\omega) \frac{\partial \hat{c}_i(\omega)}{\partial h_p(n')}, \quad (4.30)$$

onde

$$\frac{\partial \hat{c}_i(\omega)}{\partial h_p(n')} = \begin{cases} \text{sign}(\hat{c}_0(\omega) A_{T_0}(\omega)) \frac{\partial A_{T_0}(\omega)}{\partial h_p(n')}, & i=0 \\ \text{sign}(A_{T_i}(\omega)) \frac{\partial A_{T_i}(\omega)}{\partial h_p(n')}, & i \neq 0 \end{cases}, \quad (4.31)$$

sendo que $\text{sign}(x)$ é o sinal de x ,

$$T_i(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega N_p + \frac{\pi i}{M})} A_{T_i}(\omega), \quad (4.32)$$

$$A_{T_i}(\omega) = 2M e^{j \frac{\pi i}{M}} \left[a_i(N_p) + 2 \sum_{l=1}^{K-1} a_i(N_p - 2Ml) \cos[(2M\omega + \pi)l] \right] \quad (4.33)$$

e que (consultar Apêndice B)

$$\frac{\partial A_{T_i}(\omega)}{\partial h_p(n')} = 8M \cos \frac{\pi i(2n' + 1)}{M} \times \left[h_p(n') + \sum_{l=1}^{K-1} [h_p(n' + 2Ml) + h_p(n' - 2Ml)] \cos(2M\omega + \pi)l \right]. \quad (4.34)$$

Aqui, $h_p(n') = 0$ para $n' < 0$ e $n' > N_p$.

Todos os detalhes das formulações envolvendo o cálculo das restrições e todos os detalhes de projeto dos MFBs se encontram também nos artigos [18, 32, 45].

4.5 Restrições no Domínio do Tempo

As restrições no domínio do tempo são muitos úteis quando se deseja desenvolver um projeto onde o transceptor seja otimizado baseado somente no conhecimento da ordem do canal. Isso ocorre porque, para cada atraso inserido no canal, pode ser inserido mais um conjunto de restrições temporais sobre as restrições atuais, a fim de minimizar as imperfeições devidas ao meio físico.

O desenvolvimento desta seção é feita com base em filtros de Nyquist [42, 43], que são uma classe de filtros FIR cujos coeficientes da resposta impulsional satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} h_n(N) &\neq 0 \\ h_n(N + lM) &= 0, \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (4.35)$$

para um inteiro N e um fator de interpolação M . Estes filtros também são conhecidos como filtros de banda M -ésima e podem ter fase linear.

Na seqüência, $H_n^{(M)}(z)$ denota a função de transferência de um filtro de ordem $2N$ e banda M -ésima (filtro de Nyquist), com os coeficientes da resposta impulsional dados por $h_n(n)$ e satisfazendo, além das condições da equação (4.35), a condição $h_n(2N - n) = h_n(n)$. Portanto, o filtro resultante possui fase linear. Tal classe de filtro é muito útil, por exemplo, em comunicações digitais onde os símbolos de dados são sobreamostrados de um fator M e filtrados por $H_n^{(M)}(z)$ [43]. Nestes casos, não haverá ISI na seqüência recebida assumindo que o transmissor e receptor estejam sincronizados e que o canal seja ideal, ou um simples atraso. Esse tipo de

conformação de pulso é útil para modelar o espectro do sinal transmitido, evitando interferência demasiada em bandas adjacentes do espectro. Dessa forma, basta que o receptor decime o sinal recebido por M para recuperar a informação original.

Existem muitas alternativas para se desenvolver o filtro de Nyquist, sendo que sempre se usa alguma restrição espectral.

Foi verificado independentemente em [41] e [46] que MFBs do tipo CMFB, SMFB e MDFT com distorção de amplitude e fase nulas ($T_0(z) = z^{-d}$), e conseqüentemente TMUXes com ISI nula, são obtidos desenvolvendo filtros protótipos $H_p(z)$ de forma que satisfaçam

$$[H_p(z)]^2 \equiv H_n^{(2M)}(z), \quad (4.36)$$

ou seja, que a convolução do filtro protótipo com ele mesmo resulte em um filtro de Nyquist. Obter tal propriedade significa impor restrições de igualdade no domínio do tempo ou TDEC (*time domain equality constraints*). Se a ordem de $H_p(z)$ é $N_p = 2KM - 1$, os coeficientes $h_n(n)$ de $H_n^{(2M)}(z) = [H_p(z)]^2$, com ordem resultante $N_n = 2N_p = 2(2KM - 1)$, devem satisfazer as seguintes propriedades para obter um MFB que resulte em um transceptor com ISI nula:

$$h_n(N_p - 2Ml) = \begin{cases} 1/(2M), & \text{se } l = 0 \\ 0, & \text{se } l = 1, \dots, K - 1 \end{cases}, \quad (4.37)$$

onde $1/(2M)$ é o valor do coeficiente central da resposta impulsional, o que vai de acordo com a definição de um filtro FIR de banda $2M$ -ésima de fase linear [43]. Além disso, os coeficientes $h_n(n)$ e $h_p(n)$ são relacionados por

$$h_n(m) = \sum_{\tau=0}^m h_p(m - \tau)h_p(\tau), \quad (4.38)$$

para $m = 0, 1, \dots, N_p$, onde $h_p(n) = 0$ para $n < 0$ e $n > N_p$.

A idéia de impor TDECs para filtros sem ISI foi desenvolvida em [41] e [43], onde o primeiro focalizou no desenvolvimento de filtros protótipos na forma direta para bancos CMFB, e o segundo desenvolveu uma estrutura cascadeada para projetar filtros de banda M -ésima.

Como $H_n(z)$ é função quadrática em $h_p(n)$, as restrições na equação (4.37) são não-lineares. Entretanto, fazendo

$$c_l = h_n(N_p - 2Ml) = \begin{cases} 1/(2M), & \text{if } l = 0 \\ 0, & \text{if } l = 1, \dots, K - 1 \end{cases}, \quad (4.39)$$

obtém-se um cenário típico de otimização SQP (objetivo e restrições não-lineares), bastando apenas considerar a MOF da equação (4.6), tendo como OF a seletividade espectral e a equação (4.39) como restrições.

Neste caso específico, as derivadas parciais das restrições com relação aos coeficientes a otimizar são muito simples [32]

$$\frac{\partial c_l}{\partial h_p(n)} = 2 (h_p(n + 2Ml) + h_p(n - 2Ml)). \quad (4.40)$$

para $l = 0, \dots, K - 1$.

O benefício direto de usar as TDECs da equação (4.39) é que sua complexidade computacional depende somente de K , o que tende a ser muito menor do que M . O mesmo não se aplica às FDICs, como na Subseção 4.4, e em [46]. Então, ao otimizar um FB para um número elevado de subbandas M , a melhor escolha em termos de complexidade computacional seria usar TDECs. Além disso, como essa técnica permite desenvolver transceptores com ISI nula, a distorção é devida somente à ICI, a qual será aproximadamente da mesma magnitude que a máxima transferência na faixa de rejeição da resposta em frequência do filtro protótipo [3, 15, 33, 41]. Por outro lado, restrições de igualdade podem trazer soluções muito limitadas e, permitindo pequenas distorções na ISI, a respectiva ICI pode ser reduzida. Dessa forma, ao invés de empregar TDECs, uma boa opção de projeto pode se basear no uso de restrições de desigualdade no domínio do tempo ou TDICs (*time domain inequality constraints*), as quais limitam a magnitude das restrições temporais a serem menores do que um pequeno fator de tolerância, ou seja,

$$\begin{aligned} c_l &= \begin{cases} |h_n(N_p - 2Ml) - 1/(2M)|, & \text{se } l = 0 \\ |h_n(N_p - 2Ml)|, & \text{se } l = 1, \dots, K - 1, \end{cases} \\ &\leq \delta. \end{aligned} \quad (4.41)$$

O valor de δ deve ser escolhido de forma que a distorção total do sistema seja aproximadamente a mesma do problema usando FDICs. Os coeficientes da resposta impulsional resultante $h_n(N_p - 2Ml)$ podem diferir dos valores ideais dados na equação (4.37), e são, portanto, denotados por $\bar{h}_n(N_p - 2Ml)$.

Um pequeno incremento δ , que pode ser restrito a uma faixa dinâmica apropriada, determina a diferença entre os valores ideais e os resultantes da otimização, para as restrições. No pior caso, o erro resultante $e(l) = \bar{h}_n(N_p - 2Ml) - h_n(N_p - 2Ml)$

para $l = 0, 1, \dots, (K - 1)$, se soma construtivamente de uma maneira que, no domínio da frequência, exista um ganho de $(2K - 1)$. Isso se deve ao fato de que o número de termos para o erro $e(l)$ é $(2K - 1)$. Sendo assim, δ deve ser escolhido na faixa

$$\frac{\delta_1}{2K - 1} \leq \delta \leq \delta_1, \quad (4.42)$$

onde δ_1 é a distorção total desejada, como na equação (4.23). Uma vez determinado δ , o algoritmo de otimização pode ser executado.

A equação (4.41) é adequada ao emprego de rotinas de otimização baseadas em SQP, mas o mesmo não se aplica às rotinas do tipo QP porque as restrições não-lineares c_l , para $l = 0, \dots, (K - 1)$, têm que ser explicitamente inseridas na MOF, como na equação (4.6). Mas isso pode ser contornado, por exemplo, escrevendo a MOF como

$$F = E_p(1 - \lambda) + \lambda \sum_{l \in [0, K-1] \setminus c_l > 0} c_l, \quad (4.43)$$

onde, neste caso, apenas as restrições ativas serão consideradas em cada iteração do processo de otimização, e λ é um escalar entre 0 e 1 definido pelo projetista para controlar a relevância das restrições. De fato, essa MOF foi testada em algoritmos do tipo QP, e os resultados obtidos foram muito similares aos obtidos utilizando rotinas do tipo SQP, que ajustam a relevância das restrições otimamente de acordo com multiplicadores de Lagrange [29].

4.6 Procedimento de Otimização com Ajuste Fino

As subseções anteriores mostraram como usar apropriadamente ambas as restrições FD e TD, de forma a otimizar MFBs com determinada margem de distorção prescrita. Foi observado que o uso das restrições FD (TD) resultam em rotinas caracterizadas por uma alta (baixa) complexidade computacional e maior (menor) acurácia do resultado final. Portanto, para obter uma rotina que seja rápida e acurada, é interessante combinar de forma apropriada ambas as técnicas FD e TD. Uma boa alternativa é utilizar uma rotina de otimização com ajuste fino, que foi proposta nesta tese, e que permite o desenvolvimento de tais sistemas.

Dadas as especificações básicas do FB, ou seja, o número de subbandas M e o fator de sobreposição $\rho = 2K$, é possível calcular a ordem de filtro protótipo por

$N_p = (2KM - 1)$. O conjunto de especificações está definido quando se determina o fator de *roll-off* ρ , e as máximas distorções de amplitude (e fase) e de aliasing, δ_1 e δ_2 , respectivamente.

Dado o conjunto de especificações, pode-se achar a solução otimizada usando o seguinte procedimento em 3 passos:

1. Escolha uma rotina QP ou SQP, pois são adequadas para a otimização dos MFBs em consideração. Projete um filtro protótipo passa-baixas satisfazendo o conjunto de especificações, a não ser pela máxima distorção de amplitude e de *aliasing*.
2. Otimize eficientemente o MFB com restrições TD, como na Subseção 4.5, usando uma escolha apropriada para o parâmetro δ , dada a máxima distorção de amplitude δ_1 . Dependendo do problema em consideração, mais de 500 iterações podem ser necessárias.
3. Use o filtro protótipo do Passo 2 como solução inicial para este passo. A otimização agora é realizada com restrições FD, com a mesma rotina de otimização usada no Passo 2. O número total de iterações neste passo é consideravelmente baixo. Usualmente, menos de 50 iterações são necessárias.

No procedimento acima, o Passo 2 realiza uma otimização “grosseira” (menos acurada) do MFB, enquanto que o Passo 3 é responsável pelo ajuste fino do filtro protótipo resultante, de forma que as especificações são atingidas e a função objetivo é minimizada convenientemente.

4.7 Exemplos Numéricos

O filtro protótipo para um MFB M -bandas pode ser especificado pelas frequências de corte

$$\omega_p = \frac{(1 - \rho)\pi}{2M}; \quad \omega_s = \frac{(1 + \rho)\pi}{2M} \quad (4.44)$$

onde ω_p e ω_s são as frequências de corte da banda passante e da banda de rejeição, respectivamente, e ρ é o chamado fator de *roll-off*.

É desejável que $\omega_{3dB} \approx \frac{\pi}{2M}$, a fim de atingir a NPR para o sistema resultante.

Um algoritmo quasi-Newton com *line search* baseado na técnica BFGS [29] foi utilizado, o que visava resolver o problema apresentado na Subseção 4.2, buscando obter bom desempenho no que tange a energia e máxima transferência na faixa de rejeição, ou seja, minimizar E_2 e E_∞ , para uma dada distorção de amplitude, medida por d_1 (equação (2.62)), e que está intimamente relacionada com a ISI.

A técnica PCLS, apresentada anteriormente na Subseção 4.3, é amplamente utilizada devido ao fato de permitir ajustar a relação de compromisso entre E_2 e E_∞ , apenas ajustando o parâmetro J , discutido na Subseção 4.3 e com detalhes em [18].

A idéia principal é analisar o comportamento das figuras de mérito d_2 da equação (2.62) e ICI quando d_1 (ou ISI) é mantido constante, para várias relações de compromisso entre E_2 e E_∞ , começando pelo projeto LS (mínimo E_2 e máximo E_∞), e finalizando no projeto minimax (máximo E_2 e mínimo E_∞).

Todos os exemplos foram realizados no Matlab®.

4.7.1 Exemplo numérico sem restrição de *aliasing*

O procedimento PCLS foi aplicado no projeto de um MFB com as seguintes especificações:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 32 \\ K = 8 \\ \rho = 1.0 \\ \delta_1 = 0.01 \\ \delta_2 \quad (\text{o menor possível}) \end{array} \right. \quad (4.45)$$

o que significa que a restrição δ_1 tem que ser atingida e que a restrição δ_2 não existia, mas deveria ser mantida baixa, o que culminaria em um valor reduzido também para a figura de mérito d_2 .

A ordem do filtro protótipo é $N_p = (2KM - 1) = 511$. A Tabela 4.2 sumariza os resultados atingidos por ambos os projetos LS ($J = 1$, $\omega_J = \omega_s$) e minimax ($J = N_I$, $\omega_J = \pi$). O parâmetro J , como mencionado, é utilizado em projetos PCLS e determina a porção da banda de rejeição onde a resposta em frequência é minimax. Por exemplo, para $J = 1$, toda a banda de rejeição é LS. Para J tendendo ao máximo, toda a banda é minimax.

Na tabela também há uma comparação com o projeto LS em [15], cujo desempenho foi medido baseado nos coeficientes fornecidos atenciosamente pelo respectivo autor. Claramente, ambos os projetos LS tiveram desempenhos semelhantes. Entretanto, a técnica proposta nesta tese é bem menos complexa computacionalmente.

O projeto LS resultou em menores ICI e d_2 , enquanto que o projeto minimax resultou nos maiores valores para tais figuras de mérito.

A Figura 4.2 mostra as principais figuras de mérito como uma função do parâmetro J . Uma vez que d_2 depende fortemente da resposta nas subbandas adjacentes do FB, e que a parte de picos de transferência constantes na banda de rejeição ocupa a largura de banda destas subbandas, a figura de mérito d_2 quase não varia após um determinado valor do parâmetro J . Este comportamento é claramente observado na Figura 4.2(a) para $J \geq 50$.

A Figure 4.3 mostra o banco de filtros resultante.

Tabela 4.2: Figuras de mérito para os filtros protótipos otimizados LS e minimax no Exemplo 4.7.1. Em todos os casos, $d_1 = 0.01$ e $\text{ISI} = -43.0$ dB.

Figuras de Mérito	LS	LS em [15]	Minimax
d_2 (dB)	-124.9	-125	-118.6
E_∞ (dB)	-112.4	-112.0	-123.4
E_2 (dB)	4×10^{-14}	4.5×10^{-14}	6.4×10^{-13}
ICI (dB)	-118.8	-118.8	-109.3

4.7.2 Exemplo Numérico com Restrição de *Aliasing*

Este exemplo mostra o comportamento do projeto PCLS para filtros protótipos com comprimento fixo e diferentes relações de compromisso entre energia e máxima transferência na banda de rejeição. Entretanto, difere-se do exemplo anterior pelo fato de que agora, tanto d_1 como d_2 foram restringidos simultaneamente. O sistema foi especialmente desenvolvido para bancos CMFB, mas se aplica também a bancos SMFB e MDFTFB.

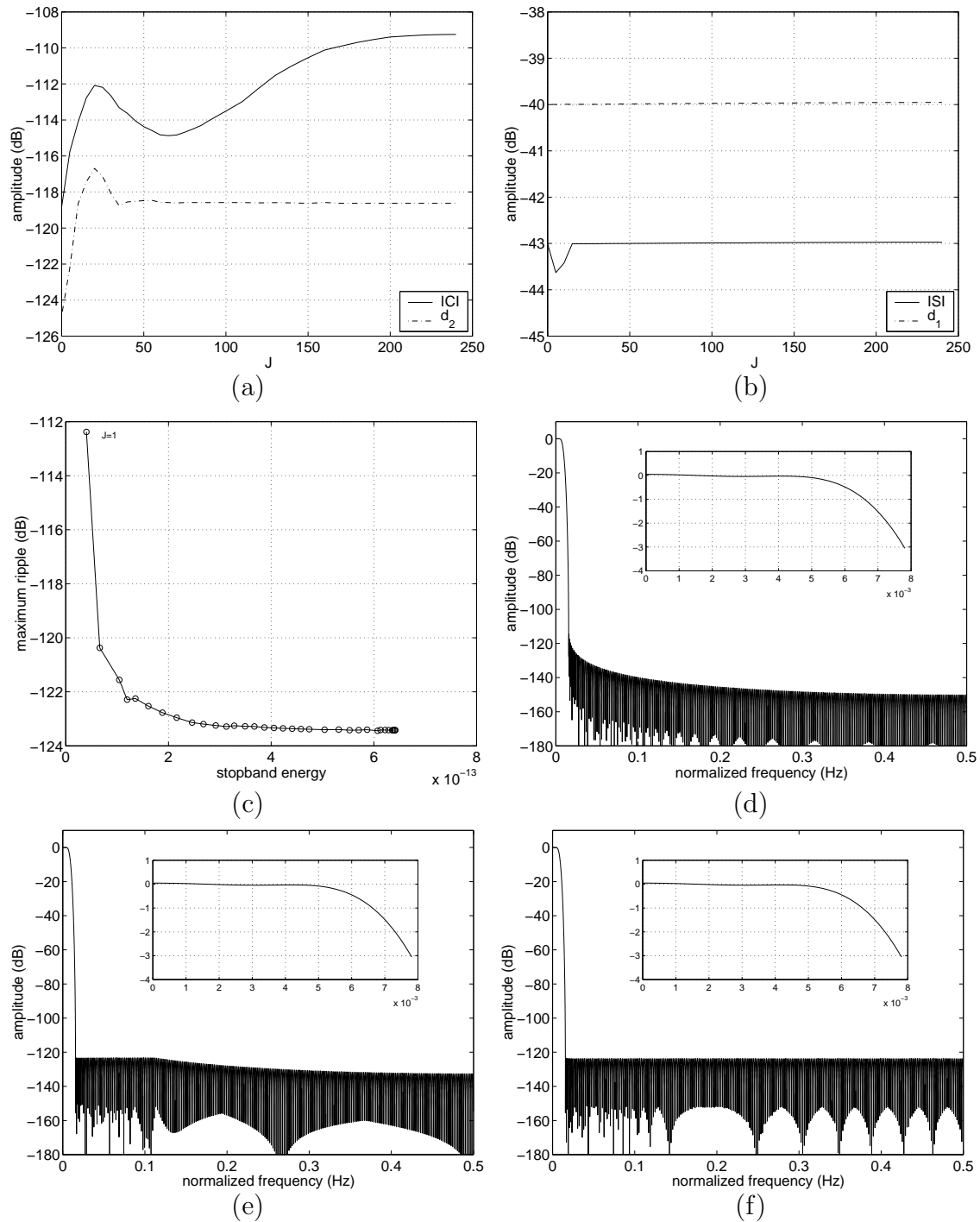


Figura 4.2: Projetos PCLS no Exemplo 4.7.1: (a) ICI (sólido) e d_2 (traço-e-ponto); (b) ISI (sólido) e d_1 (traço-e-ponto); (c) Relação de compromisso E_2/E_∞ para diferentes valores de J ; (d) Resposta em magnitude do projeto LS ($J = 1$) e o respectivo detalhe na banda passante; (e) Resposta em magnitude para $J = 50$ e o respectivo detalhe na banda passante; (f) Resposta em magnitude para o projeto minimax ($J = N_I$) e o respectivo detalhe na banda passante.

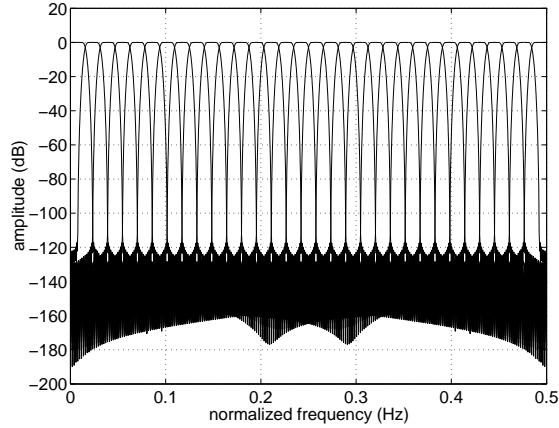


Figura 4.3: Banco CMFB otimizado com critério LS.

As especificações são as seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 8 \\ K = 8 \\ \rho = 1.0 \\ \delta_1 = 0.01 \\ \delta_2 = -126 \text{ (dB)} \end{array} \right. , \quad (4.46)$$

o que significa que ambas as restrições δ_1 e δ_2 precisam ser satisfeitas.

De acordo com as especificações, o filtro protótipo tem ordem $N_p = (2KM - 1) = 127$.

O propósito do exemplo é comparar diferentes projetos PCLS para os mesmos níveis de d_1 e d_2 . Também há comparação com projetos onde a restrição δ_2 é livre, como no Exemplo 4.7.1.

Como pode ser observado na Figura 4.4, ambas as figuras d_1 e ISI têm comportamento similar, assim como d_2 e ICI.

O desempenho em termos de E_2 e E_∞ para os projetos com restrição em d_2 era esperado ser pior do que o de projetos sem restrição, o que foi confirmado na Tabela 4.3 e pela Figura 4.4. Em outras palavras, a restrição δ_2 imposta sobre a distorção de *aliasing* foi responsável por aumentar a energia (E_2) e o pico da transferência (E_∞) na banda de rejeição, em diversos projetos, quando comparados com os projetos livres de restrição em d_2 .

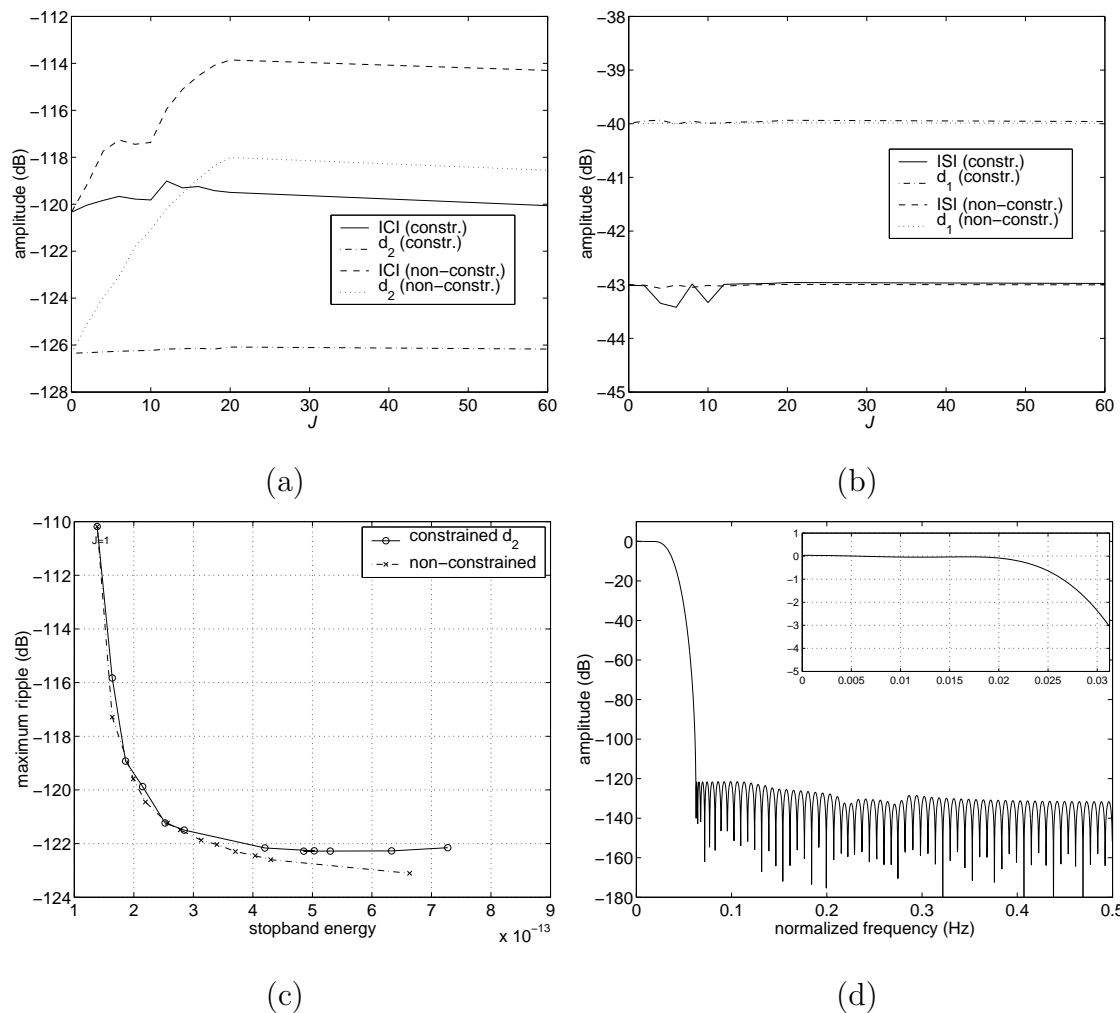


Figura 4.4: Projeto PCLS no Exemplo 4.7.2: (a) ICI e d_2 para os projetos com e sem restrição em d_2 ; (b) ISI e d_1 para os projetos com e sem restrição em d_2 ; (c) Relação de compromisso E_2/E_∞ para os projetos com e sem restrição em d_2 ; (d) Resposta em magnitude para o filtro protótipo com parâmetro $J = 10$ e restrição em d_2 com respectivo detalhe na banda passante.

Tabela 4.3: Figuras de mérito para os filtros protótipos otimizados pelo WLS modificado para o Exemplo 4.7.2. Casos $J = 1$ e $J = N_I = 60$ correspondem aos projetos LS e minimax, respectivamente. Em todos os casos, $d_1 = 0.01$ e $\text{ISI} = -43.0$ dB.

Figuras de Mérito	$J = 1$	$J = 10$	$J = 20$	$J = 60$
d_2 restringido				
d_2 (dB)	-126.3	-126.2	-126.1	-126.2
E_∞ (dB)	-110.2	-121.5	-122.3	-122.2
E_2 (dB)	1.39×10^{-13}	2.85×10^{-13}	6.33×10^{-13}	7.28×10^{-13}
ICI (dB)	-120.3	-119.8	-119.5	-120.0
d_2 sem restrição				
d_2 (dB)	-126.3	-121.8	-118.0	-118.6
E_∞ (dB)	-110.2	-121.5	-122.6	-123.1
E_2 (dB)	1.39×10^{-13}	2.78×10^{-13}	4.30×10^{-13}	6.63×10^{-13}
ICI (dB)	-120.3	-117.4	-113.9	-114.3

4.8 Conclusão

Foram apresentadas técnicas de projeto para o desenvolvimento de bancos de filtros modulados otimizados, que visavam manter uma boa relação entre concentração espectral e baixa distorção da saída em relação à entrada, através de projetos de reconstrução próxima da perfeita. Outra opção seria reduzir ligeiramente a concentração espectral e tornar a distorção de amplitude a *aliasing* nulas, através do projeto com reconstrução perfeita, que será apresentado no Capítulo 6 como ferramenta necessária ao desenvolvimento de transceptores redundantes baseados em MFBS.

Nenhuma das técnicas de projeto apresentadas neste capítulo contemplava o conhecimento do canal digital, de forma que os transceptores resultantes podem ser usados em qualquer sistema, seja para canais curtos ou longos, fixos ou variantes no tempo. Entretanto, será sempre uma boa prática fazer uso de equalizadores.

É importante frisar que os transceptores desenvolvidos não possuem redundância alguma.

No Capítulo 7 serão apresentadas simulações visando medir o desempenho

dos sistemas aqui projetados e compará-los com outros sistemas existentes.

Capítulo 5

Projeto de MFBs de Alta Complexidade

Neste capítulo será apresentada uma técnica especial para o desenvolvimento de MFBs que, por necessidades da aplicação em questão, resultem em alta complexidade computacional, o que implica em filtros protótipos com comprimento muito elevado, podendo ultrapassar centenas de milhares de coeficientes. Entretanto, o número de variáveis a otimizar pode permanecer relativamente reduzida, na ordem de alguns milhares de coeficientes.

A estrutura especial baseada na técnica FRM [35, 36] foi inicialmente utilizada em MFBs por [47]. Entretanto, a estrutura não era otimizada, e desta forma, esta pesquisa de tese contribui para desenvolver métodos de otimizar a estrutura eficientemente, permitindo a redução do número de variáveis a otimizar e melhorando as figuras de mérito do MFB resultante.

A Seção 5.1 apresenta a técnica FRM e a Seção 5.2 apresenta as condições de seletividade e função objetivo do sistema. As restrições de projeto do tipo FD e TD são apresentadas nas Seções 5.3 e 5.4, nessa ordem. Exemplos numéricos e a conclusão do capítulo são apresentados nas Seções 5.5 e 5.6, respectivamente.

5.1 MFBs Baseados na Técnica FRM

O projeto com Mascaramento da Resposta em Frequência, ou FRM (de *frequency response masking*) [35, 36] usa um par complementar de filtros FIR de fase

linear. O filtro base, $H_b(z)$, com atraso de grupo $\frac{N_b}{2}$, e sua versão complementar, $z^{-N_b L/2} - H_b(z^L)$, são interpoladas por um fator L , para formar bandas de transição acentuadas, ao custo de introduzir múltiplas imagens (passa-bandas) em ambas as respostas. Essas bandas espaçadamente repetidas são então filtradas e removidas pelos filtros de mascaramento positivo e negativo, denotados por $G_1(z)$ e $G_2(z)$, respectivamente, e adicionadas para compor a função de transferência final desejada, dada por [35]

$$H_f(z) = H_b(z^L)G_1(z) + (z^{-N_b L/2} - H_b(z^L))G_2(z), \quad (5.1)$$

a qual será usada como o filtro protótipo $H_p(z)$ para o desenvolvimento de MFBs de alta complexidade. O motivo desta escolha é porque a técnica FRM permite o desenvolvimento de filtros com transição abrupta e banda larga ou estreita, o que é muito útil em projetos de MFBs altamente seletivos.

O uso do filtro protótipo baseado na técnica FRM no mínimo resulta em MFBs com complexidade computacional igual ao de MFBs utilizando filtros protótipos com realização direta (DF ou *direct-filter*) [47, 45]. O preço pago é um desempenho levemente pior em termos das figuras de mérito, quando novamente comparado ao projeto tradicional, com DF [45]. Por exemplo, em projetos com função objetivo LS, a energia na banda de rejeição seria um pouco maior em um projeto baseado na técnica FRM. Além disso, e mais importante, a estrutura FRM permite a redução do número de variáveis a serem otimizadas no projeto do MFB [48, 46, 49], o que torna o processo de otimização bem mais rápido, reduzindo também a quantidade de memória volátil utilizada durante a execução do algoritmo, uma vez que algoritmos do tipo SQP [29] requerem o armazenamento da matriz hessiana ou sua inversa, cujo número de entradas é o quadrado do número de variáveis a serem otimizadas. Em casos extremos, com número de subbandas muito elevado (ex.: 1024) e uma faixa de transição muito estreita (ex.: $\rho = 0.05$), pode ser impossível otimizar o filtro protótipo com técnicas tradicionais, ou otimizá-lo pode requerer uma quantidade de tempo impraticável.

É importante enfatizar que se a largura de banda requerida é estreita, o ramo inferior da estrutura FRM, onde a multiplicação polinomial por $G_2(z)$ é realizada, não é utilizado. A Figura 5.1 mostra a estrutura geral FRM para gerar o filtro protótipo para o MFB.

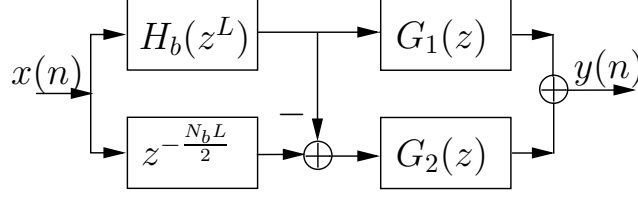


Figura 5.1: A estrutura FRM.

Como apresentado em [48], é possível derivar uma estrutura eficiente para bancos CMFB (e conseqüentemente SMFB e MDFTFB), a qual terá complexidade computacional menor do que as implementações eficientes de MFBs conhecidas na literatura [3, 4, 5]. Entretanto, existe uma restrição com relação ao fator de interpolação FRM, o qual deve ser expresso por

$$L = 2K_a M + M/K_b, \quad (5.2)$$

onde $K_a \geq 0$ e $K_b > 0$ são inteiros. Em tais casos, usando somente o ramo superior por simplicidade, o m -ésimo filtro de análise pode ser escrito por

$$H_m(z) = \sum_{q=0}^{Q-1} \left[z^{-Lq} H'_{b1q}(-z^{LQ}) \sum_{i=0}^{2M-1} c_{m, (n + \frac{M}{K_b} q)} z^{-i} E'_i(-z^{2M}) \right], \quad (5.3)$$

onde

$$H'_{b1q}(z) = \sum_{k=0}^{K_c-1} (-1)^{K_a q} h_b(kQ + q) z^{-k} \quad (5.4)$$

para $q = 0, 1, \dots, (Q - 1)$. Aqui, $Q = 2K_b$ é o número de componentes polifásicas do filtro base FRM. Além disso

$$E'_i(z) = \sum_{k=0}^{K_d-1} g_1(2kM + i) z^{-k} \quad (5.5)$$

para $i = 0, 1, \dots, (2M - 1)$, onde $g_1(n)$ é a resposta impulsional do filtro de mascaramento positivo de ordem N_{g_1} , e K_c se relaciona com N_b e Q por $(N_b + 1) = QK_c$.

A equação (5.3) descreve como deve ser implementada a estrutura eficiente descrita em [48], a qual não foi desenvolvida somente para o caso em que se usa apenas o ramo superior da estrutura FRM, mas também para quando os dois ramos são utilizados. Os detalhes dessa estrutura estão fora do escopo deste trabalho, porque os filtros protótipos FRM podem ser mapeados em filtros FIR realizados na forma direta, convencional, e tais filtros são aplicados diretamente nas estruturas eficientes tradicionalmente mencionadas na literatura [3, 4, 50]. Essa é a configuração de

interesse neste trabalho porque, ao usar a técnica FRM, o número de variáveis a otimizar pode ser drasticamente reduzido, como anteriormente mencionado, e o que se pretende aqui é reduzir a complexidade computacional do processo de otimização e não do sistema transceptor.

5.2 Condições de Seletividade e Função Objetivo para FRM-MFBs

Tudo o que foi exposto na Seção 4.2, relativo às condições de seletividade e função objetivo se aplica aqui também. Entretanto, como o filtro protótipo agora é composto por uma combinação paralela de cascatas, ou $H_p(z) = H_f(z)$, como na equação (5.1), é necessário reescrever as derivadas da função objetivo em relação às variáveis a otimizar.

No domínio temporal, o filtro protótipo $h_p(n)$ é descrito por

$$h_p(n) = \sum_{\nu=0}^{\lfloor n/L \rfloor} (h_b(\nu)g_1(n - L\nu) - h_b(\nu)g_2(n - L\nu)) + g_2(n - N_bL/2). \quad (5.6)$$

Já a função objetivo é dada pela equação (4.9), que é aqui reescrita como

$$E'_2(\mathbf{h}_p) = \sum_{\omega_j \in [\omega_s, \pi]} W_k^2(\omega_j) f_j^2 \Delta\omega, \quad (5.7)$$

onde

$$f_j^2 = |H_p(e^{j\omega_j})|^2. \quad (5.8)$$

Sendo assim, as derivadas parciais de primeira ordem podem ser escritas por

$$\frac{\partial E'_2(\mathbf{h}_p)}{\partial h(n)} = 2 \sum_{\omega_j \in [\omega_s, \pi]} W_k^2(\omega_j) f_j \Delta\omega \frac{\partial f_j}{\partial h(n)}, \quad (5.9)$$

onde $h(n)$ pode ser $h_b(n)$, $g_1(n)$, ou $g_2(n)$, e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_j}{\partial h_b(n)} &= 2 c_1 \operatorname{sign}(A_{H_b}(\omega_j L)) \cos[(n - N_b/2) \omega_j L] |A_{G_1}(\omega_j) - A_{G_2}(\omega_j)|, \\
0 \leq n &\leq \left\lfloor \frac{N_b}{2} \right\rfloor, \\
\frac{\partial f_j}{\partial g_1(n)} &= 2 c_2 \operatorname{sign}(A_{G_1}(\omega_j)) \cos[(n - N_g/2) \omega_j] |A_{H_b}(\omega_j L)|, \\
0 \leq n &\leq \left\lfloor \frac{N_g - 1}{2} \right\rfloor, \\
\frac{\partial f_j}{\partial g_2(n)} &= 2 c_2 \operatorname{sign}(A_{G_2}(\omega_j)) \cos[(n - N_g/2) \omega_j] |1 - A_{H_b}(\omega_j L)|, \\
0 \leq n &\leq \left\lfloor \frac{N_g - 1}{2} \right\rfloor,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

onde

$$\begin{aligned}
c_1 &= \begin{cases} 1/2, & \text{se } n = N_b/2 \text{ (} N_b \text{ par)} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}, \\
c_2 &= \begin{cases} 1/2, & \text{se } n = N_g/2 \text{ (} N_g \text{ par)} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases},
\end{aligned} \tag{5.11}$$

com $N_{g_1} = N_{g_2} = N_g$. Além disso, a descrição da resposta em frequência dos filtros de fase linear $H_b(z^L)$, $G_1(z)$ e $G_2(z)$ em termos de suas respostas de fase zero (amplitude e fase) é

$$\begin{aligned}
H_b(e^{j\omega L}) &= e^{-j\omega N_b L/2} A_{H_b}(\omega L), \\
G_1(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega N_g/2} A_{G_1}(\omega), \\
G_2(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega N_g/2} A_{G_2}(\omega).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Com as equações (4.5) e (5.9), assim como as equações auxiliares (5.10), (5.11) e (5.12), é possível implementar uma rotina rápida para calcular acuradamente a função objetivo e suas derivadas parciais de primeira ordem, as quais trarão convergência rápida para o processo de otimização [32].

5.3 Restrições no Domínio da Frequência para os FRM-MFBs

As restrições do projeto MFB no domínio da frequência foram tratadas na Seção 4.4. Porém, assim como no caso da função objetivo, as derivadas de primeira

ordem terão o cômputo diferenciado, uma vez a estrutura FRM está sendo utilizada.

Sendo assim, e com auxílio da equação (4.30), as derivadas parciais de primeira ordem das restrições em relações aos coeficientes do filtro protótipo devem ser calculadas por

$$\frac{\partial c_i}{\partial h(n)} = \sum_{n'=0}^{N_p} \frac{\partial c_i}{\partial h_p(n')} \frac{\partial h_p(n')}{\partial h(n)}, \quad (5.13)$$

onde $h(n)$ pode ser tanto $h_b(n)$, $g_1(n)$ ou $g_2(n)$. Além disso

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_p(n')}{\partial h_b(n)} &= c_1 \left[g_1 \left(n' - Ln \right) + g_1 \left(n' - L(N_b - n) \right) \right. \\ &\quad \left. - g_2 \left(n' - Ln \right) + g_2 \left(n' - L(N_b - n) \right) \right], \\ \frac{\partial h_p(n')}{\partial g_1(n)} &= c_2 \left[h_b \left(\frac{n' - n}{L} \right) + h_b \left(\frac{n' + n - N_g}{L} \right) \right], \\ \frac{\partial h_p(n')}{\partial g_2(n)} &= -c_2 \left[h_b \left(\frac{n' - n}{L} \right) + h_b \left(\frac{n' + n - N_g}{L} \right) \right] + c_3, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde $h_b(n) = 0$ para valores não inteiros de n e para $n < 0$ e $n > N_b$, assim como $g_1(n) = 0$ e $g_2(n) = 0$ para $n < 0$ e $n > N_g$ no caso em que $N_g = N_{g_1} = N_{g_2}$. As restrições c_1 e c_2 são dadas pela equação (5.11). Já c_3 é dado por

$$c_3 = \begin{cases} 1, & \text{se } (n' - n) = N_b L / 2 \text{ or } (n' - n) = N_b L / 2 + N_g \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $n' = 0, 1, \dots, (N_p - 1)/2$. Aqui, foi assumido sem perda de generalidade, que os coeficientes da resposta impulsional do filtro protótipo satisfazem a seguinte condição de simetria: $h_p(n') = h_p(N_p - n')$.

5.4 Restrições no Domínio do Tempo para os FRM-MFBs

Foi mostrado na Seção 4.5 que, se o filtro protótipo for uma fatoração espectral de um filtro de Nyquist [42, 43], então o MFB resultante terá ISI e d_1 nulos. Além disso, na mesma subseção, foi descrita a forma de impor aos coeficientes do filtro protótipo restrições no domínio do tempo, sejam de igualdade ou desigualdade, de forma a realizar MFBs com distorção controlada.

Agora, dada a teoria exposta na Seção 4.5, fica fácil extrapolar para o caso em que o filtro protótipo é baseado na estrutura FRM.

Assumindo que $H_p(z) \equiv H_f(z)$, com $H_f(z)$ dado pela equação (5.1), e que a equação (5.6) relaciona a resposta impulsional do filtro protótipo com as respostas impulsionais dos subfiltros FRM, é imediato o desenvolvimento para as derivadas parciais das restrições temporais. Neste caso, a ordem do filtro protótipo se relaciona com a ordem dos subfiltros por $N_p = (LN_b + N_g) = (2KM - 1)$.

A idéia de impor restrições TD para sistemas livres de ISI foi tratada em [43] e [41], onde [41] focalizou na realização direta do filtro protótipo para CMFBs, e o primeiro desenvolveu uma estrutura em cascata para desenvolver um filtro genérico de M -ésima banda.

O bloco fundamental para o filtro de Nyquist tratado aqui é dado pela Figura 5.2.

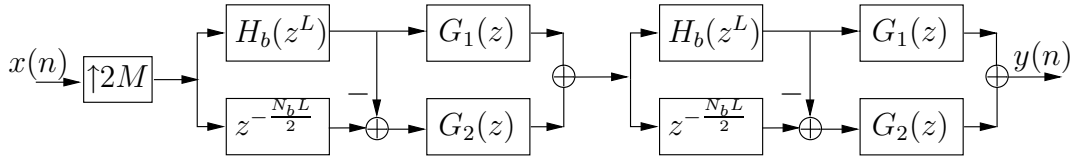


Figura 5.2: Filtro de Nyquist de $2M$ -ésima banda composto por subfiltros FRM.

As equações (4.39) e (4.41) definem as restrições temporais. Já as derivadas, se mais uma vez for considerado um filtro genérico $h(n)$, que pode ser substituído por $h_b(n)$, $g_1(n)$ ou $g_2(n)$, podem ser escritas por

$$\frac{\partial h_n(N_p - 2Ml)}{\partial h(n)} = \sum_{n=0}^{N_p} \frac{\partial h_n(N_p - 2Ml)}{\partial h_p(n')} \frac{\partial h_p(n')}{\partial h(n)}, \quad (5.15)$$

para $l = 0, \dots, K - 1$, onde também se faz necessário o uso das equações (4.40) e (5.14).

5.5 Exemplos Numéricos de Alta Complexidade

Nesta subseção, dois exemplos validam a teoria exposta anteriormente: no primeiro são exigidos pequenos fatores de *roll-off* e número de subbandas (largura de banda será relativamente elevada); o segundo requer pequeno fator de *roll-off*, mas

com número de subbandas elevado, resultando em largura de banda muito pequena. No primeiro exemplo, a otimização se baseia nos critérios LS e minimax. Já no segundo, será realizada apenas a otimização LS.

Em ambos os exemplos, os filtros protótipos iniciais foram desenvolvidos com a técnica proposta em [35], de forma que, usualmente, as distorções de amplitude e *aliasing* iniciais ficam razoavelmente altas.

As ordens dos subfiltros FRM $H_b(z)$, $G_1(z)$, e $G_2(z)$, assim como o fator de interpolação L foram escolhidos de forma que a ordem do filtro protótipo resultante seja $N_p = (2KM - 1)$, e que seja minimizado o número de variáveis a otimizar.

5.5.1 Exemplo de Banda Larga

Neste exemplo, as especificações foram dadas de forma que o filtro protótipo apresentasse uma largura de banda relativamente alta, mas com uma faixa de transição consideravelmente estreita. As especificações são:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 8 \\ \rho = 0.1 \\ K = 40 \\ \delta_1 \leq 0.01 \\ \delta_2 \leq 0.02 \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Na Tabela 5.1, N_b é a ordem do filtro base, N_1 é a ordem do filtro de mascaramento, N_p é a ordem do filtro protótipo resultante, e L corresponde ao fator de interpolação FRM. Além disso, \mathcal{N} indica o número de variáveis a serem otimizadas e \mathcal{M} especifica a quantidade de memória, em bytes (considerando 8 bytes para representar um número real), requerida para o armazenamento da matriz hessiana. A forma DF consiste apenas de um filtro FIR simples.

A Tabela 5.2 apresenta as figuras de mérito para ambos os projetos LS e minimax, para restrições FD. Com propósitos de comparação, filtros protótipos na forma direta (consistindo de um simples filtro FIR) atendendo as mesmas especificações também foram desenvolvidos, os quais atingiram figuras de mérito que servem de limites inferiores para os projetos baseados em FRM.

O algoritmo de otimização utilizado era baseado em SQP, através da função `fmincon` do MATLAB® [30], e foi usado para minimizar ambos os objetivos LS e

Tabela 5.1: Configurações para os subfiltros FRM e o filtro final resultante no Exemplo 5.5.1.

Parâmetro	DF	FRM
N_b	–	30
N_1	–	199
N_2	–	199
N_p	639	639
L	–	18
\mathcal{N}	320 (*)	116
\mathcal{M}	≈ 819.2 kB (**)	≈ 107.6 kB

(*) 160 variáveis são necessárias se o projeto for de um protótipo PR, ou seja, ambas ISI e ICI são nulos.

(**) Se o problema é PR, o tamanho da matriz hessiana reduz para 204.8 kilobytes.

minimax dados pela equação (4.5). Mais ainda, um número razoável de pontos para a grade discreta de frequências, utilizado para o cômputo da função objetivo, foi descoberto ser em torno de $20N_p$. A Tabela 5.2 claramente mostra que os projetos DF apresentaram desempenho ligeiramente melhor do que os FRM. Entretanto, a otimização FRM requer esforço computacional muito menor.

A estratégia adotada nos projetos foi considerar como única restrição a distorção de amplitude, limitada por δ_1 , e checar se a distorção de *aliasing* resultante d_2 estava dentro da margem especificada por δ_2 . Se isso não acontecesse, essas restrições não atendidas deveriam ser utilizadas em um novo processo de otimização.

As Figuras 5.3(a) e 5.3(b) mostram as respostas em magnitude dos filtros protótipo FRM, otimizados de acordo com os critérios LS e minimax, respectivamente.

Alternativamente, usando as mesmas especificações dadas anteriormente, pode-se utilizar restrições TD de desigualdade.

Reprojetando os filtros protótipos nas formas DF e FRM para objetivos LS e minimax, foram obtidos os resultados da Tabela 5.3. As restrições foram atingidas com tolerância do erro na ordem de 10^{-12} .

Os resultados da Tabela 5.3 se aproximam dos obtidos com as restrições FD, da Tabela 5.2, mas com complexidade computacional reduzida porque não existe a necessidade de calcular as restrições sobre uma grade densa de frequências.

Tabela 5.2: Figuras de mérito resultantes dos projetos em forma direta e FRM no Exemplo 5.5.1, com restrições FD.

Figuras de Mérito	DF		FRM	
	LS	Minimax	LS	Minimax
d_1	0.01	0.01	0.01	0.01
d_2	0.7×10^{-4}	10.0×10^{-4}	0.8×10^{-4}	20.0×10^{-4}
ISI (dB)	-43.0	-43.4	-44.1	-43.0
ICI (dB)	-79.5	-53.4	-75.0	-49.0
E_2	0.2×10^{-7}	3.3×10^{-7}	0.3×10^{-7}	10.0×10^{-7}
E_∞ (dB)	-51.7	-61.7	-47.0	-58.0

Tabela 5.3: Figuras de mérito resultantes para as formas direta e FRM nos projetos do Exemplo 5.5.1, ao usar restrições de desigualdade TD.

Figuras de Mérito	DF		FRM	
	LS	Minimax	LS	Minimax
d_1	0.01	0.01	0.01	0.01
d_2	0.4×10^{-4}	2.6×10^{-4}	2.1×10^{-4}	26.0×10^{-4}
ISI (dB)	-49.8	-44.0	-48.7	-45.7
ICI (dB)	-86.6	-55.5	-70.0	-46.2
E_2	0.4×10^{-7}	2.6×10^{-7}	1.1×10^{-7}	24.0×10^{-7}
E_∞ (dB)	-46.8	-55.6	-41.0	-51.0

Ao longo de muitos projetos desenvolvidos com variadas especificações, o tempo de execução requerido por rotinas usando TD foi aproximadamente 1/3 (um terço) do tempo requerido quando usadas rotinas FD, as quais são amplamente mencionadas em literatura dedicada [3, 15, 41, 45].

As Figuras 5.4(a) e 5.4(b) mostram a resposta em magnitude dos filtros protótipos resultantes depois da otimização com restrições TD de desigualdade.

5.5.2 Exemplo de Banda Estreita

Agora, um exemplo desafiador com um número de bandas elevado é apresentado. Neste caso, o método proposto mostra claramente sua vantagem contra os

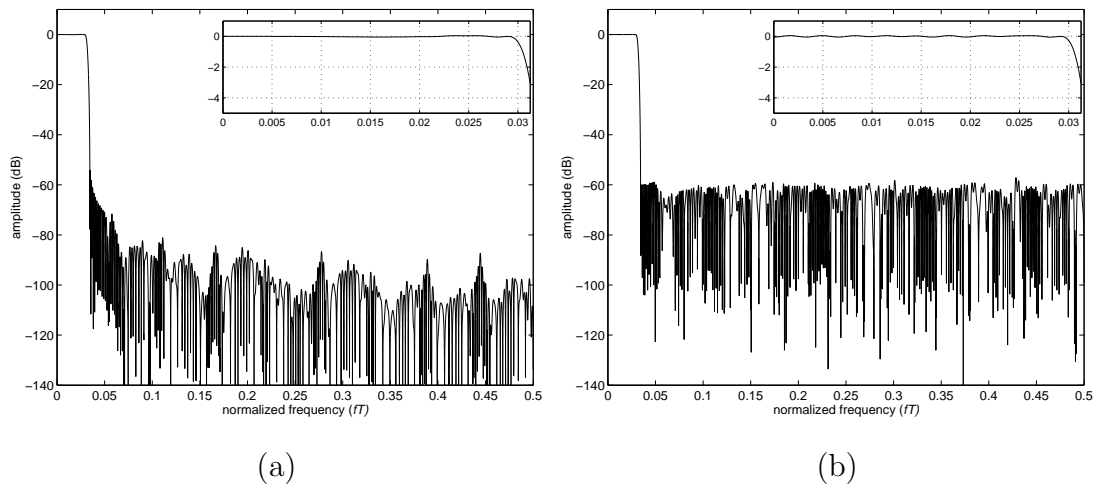


Figura 5.3: Resposta em magnitude e detalhe na banda passante para os protótipos FRM otimizados usando restrições FD no Exemplo 5.5.1: (a) projeto LS; (b) projeto minimax.

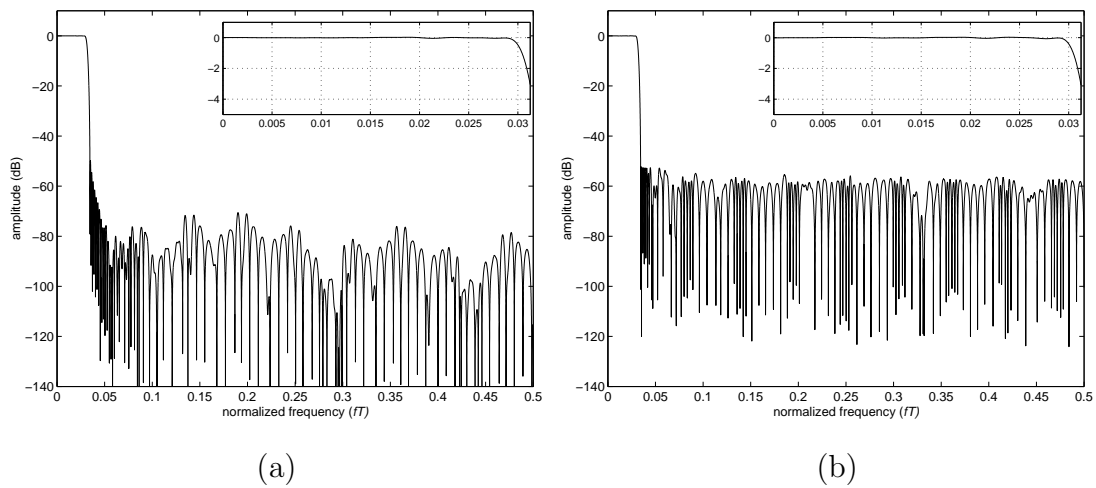


Figura 5.4: Resposta em magnitude e detalhe na banda passante para os filtros protótipos FRM otimizados usando restrições TD no Exemplo 5.5.1: (a) projeto LS; (b) projeto minimax.

métodos DF.

As especificações são as seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 2048 \\ \rho = 0.5 \\ K = 8 \\ \delta_1 \leq 0.01 \\ \delta_2 \leq 0.01 \end{array} \right. \quad (5.17)$$

As especificações foram elaboradas de forma a resultar em um filtro protótipo com banda estreita e transição razoavelmente abrupta. Este cenário faz com que apenas o ramo superior da estrutura FRM seja usado [33], uma vez que não há a necessidade de aumentar a largura de banda do filtro resultante com bandas imagem provenientes do filtro complementar no ramo inferior da estrutura na Figura 5.2. Além disso, uma vez que a ordem do filtro protótipo é dada por $N_p = (2KM - 1) = 32767$, as técnicas de otimização convencionais baseadas em rotinas QP e SQP não podem ser diretamente utilizadas, uma vez que requerem o armazenamento da matriz hessiana, a qual será neste caso, extremamente grande. As características das estruturas DF e FRM para o exemplo em questão estão apresentadas na Tabela 5.4. O projeto DF não foi realizado por requerer armazenamento em memória volátil em níveis superiores aos disponíveis em computadores pessoais acessíveis.

O procedimento de otimização com ajuste fino descrito na Seção 4.6 com o critério de otimalidade LS foi usado neste exemplo, para reduzir a carga computacional devido às exigentes especificações do problema.

As Figuras 5.5(a) e 5.5(b) mostram o filtro protótipo resultante e um pequeno número de subbandas do FRM-MFB, respectivamente. Tais figuras foram geradas após o ajuste fino, que é a última etapa desse processo de otimização.

A Tabela 5.5 mostra o resultado da otimização do FRM-MFB segundo o critério LS, para ambos os passos inicial (ajuste grosseiro) e final (ajuste fino) do método proposto de otimização, de onde se observa o comportamento de ajuste do erro residual através da melhora das figuras de mérito ao final do ajuste fino.

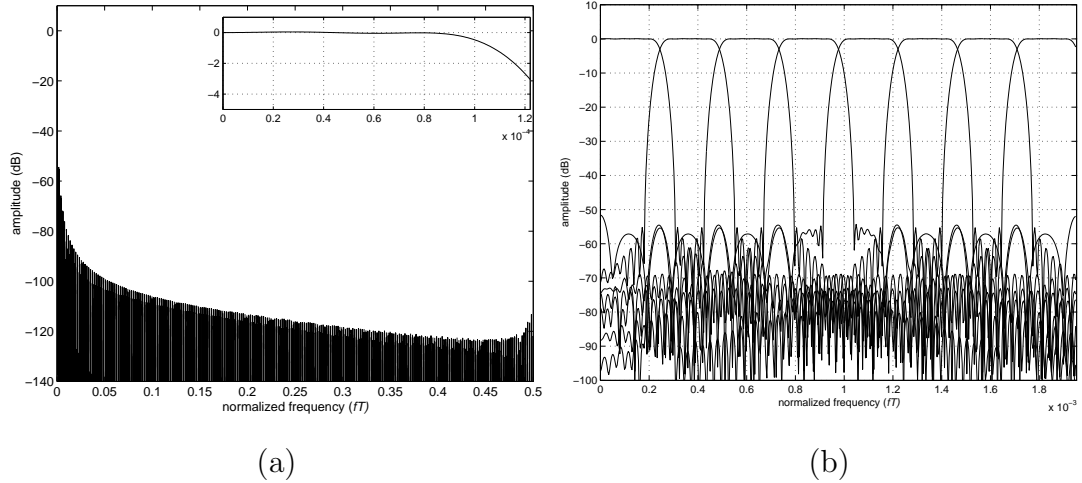


Figura 5.5: FRM-MFB resultante do Exemplo 5.5.2: (a) resposta em magnitude e detalhe na banda passante; (b) algumas subbandas de baixa frequência do FRM-MFB: 8 de um total de 2048.

5.6 Conclusão

Foram apresentadas técnicas de projeto para o desenvolvimento de bancos de filtros modulados otimizados baseados na técnica FRM, que viabilizam o desenvolvimento de projetos com alta seletividade e número de bandas elevado, o que se traduz em um número grande de variáveis a otimizar.

Assim como no Capítulo 4, nenhuma das técnicas de projeto apresentadas neste capítulo contemplava o conhecimento do canal digital, e os transceptores desenvolvidos não possuíam redundância alguma.

Tabela 5.4: Configurações para os subfiltros FRM e o filtro protótipo resultante no Exemplo 5.5.2.

Parâmetro	DF	FRM
N_b	–	62
N_1	–	1024
N_2	–	–
N_p	32767	32767
L	–	512
\mathcal{N}	16384 (*)	544
\mathcal{M}	≈ 2150 MB (**)	≈ 2.37 MB

(*) 8192 variáveis são necessárias se o protótipo é do tipo PR.

(**) Se o problema é PR, o tamanho da matriz Hessiana se reduz para 536.9 megabytes.

Tabela 5.5: Figuras de mérito resultantes do FRM-MFB do Exemplo 5.5.2 com o critério de otimalidade LS.

Figuras de Mérito	Passo	
	inicial	final (ajuste fino)
d_1	0.01	0.01
d_2	5.0×10^{-3}	2.0×10^{-3}
ISI (dB)	–43.2	–43.1
ICI (dB)	–42.6	–46.0
E_2	3.9×10^{-9}	1.0×10^{-9}
E_∞ (dB)	–47.0	–50.0

Capítulo 6

Otimização de Bancos de Filtros Redundantes

Neste capítulo, transceptores redundantes serão desenvolvidos de forma a reduzir o efeito nocivo do canal com memória, de comprimento finito.

Uma introdução aos sistemas do tipo PR para MFBs é apresentada na Seção 6.1, e que com certas modificações irá permitir o desenvolvimento de sistemas redundantes baseados em MFBs, estudados na Seção 6.2. Nesse caso, será realizada certa modificação na estrutura do transceptor, o qual irá permitir a inserção de redundância de informação visando minimizar a interferência provocada pelas imperfeições do meio físico.

Na Seção 6.3 serão projetados transceptores mais gerais, sem nenhum efeito de modulação, mas com a restrição de serem paraunitários, visando reduzir o esforço computacional de soluções otimizadas.

Ao contrário do capítulo anterior, onde nenhuma informação do canal foi utilizada, aqui será assumido conhecer a ordem do canal, já digitalizado.

A Seção 6.4 apresenta resultados de simulações aplicando a teoria apresentada. Já a Seção 6.5 conclui o capítulo.

6.1 MFBs Não-Redundantes com Reconstrução Perfeita

Nesta seção será apresentada uma técnica de projeto [26, 27], baseada em estruturas treliça, detalhada no Apêndice C, que resulta em MFBs com distorção de amplitude e *aliasing* intrinsicamente nulas. Tal desenvolvimento se faz necessário porque os transeptores utilizados neste capítulo se baseiam nessas estruturas.

A função objetivo para modelar a resposta em frequência do filtro protótipo é a mesma usada na Subseção 4.2, e o sistema transeptor resultante será fortemente baseado na estrutura de um MFB.

Por conveniência, a função objetivo da equação (4.5) é reescrita aqui, ou seja,

$$E_p(\mathbf{h}_p) = \left(\int_{\omega_s}^{\pi} W^2(\omega) |H_p(e^{j\omega})|^p d\omega \right)^{\frac{q}{p}}, \quad (6.1)$$

onde \mathbf{h}_p são os coeficientes do filtro protótipo a serem otimizados.

Para obter um MFB do tipo PR, ou seja, sem distorção de amplitude ou *aliasing*, é aconselhável projetar o filtro protótipo baseando-se em estruturas treliça [26, 27]. Dessa forma, otimizar a concentração espectral de um MFB para obter a PR se torna uma tarefa simples, a partir do momento em que o filtro protótipo é descrito por

$$H_p(z) = \sum_{j=0}^{2M-1} S_j(z^{2M}) z^{-j}, \quad (6.2)$$

onde $S_j(z)$, $j = 0, \dots, 2M - 1$, são as componentes polifásicas do filtro protótipo. Tais componentes devem atender às condições estabelecidas na Seção 2.9, por meio da equação (2.87). Tais condições são naturalmente atendidas quando as componentes polifásicas $S_j(z)$ provêm de $\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor$ estruturas treliça complementares em potência, onde $S_j(z)$ e $S_{j+M}(z)$ compõem um par. Sendo assim, será apenas necessário desenvolver as estruturas para $j = 0, \dots, \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor$, uma vez que o filtro protótipo FIR $H_p(z)$, de ordem $N_p = 2KM - 1$, tem que possuir fase linear, ou seja,

$$S_j(z) = z^{-(K-1)} S_{2M-j}(z^{-1}) \quad (6.3)$$

para $j = 0, \dots, M - 1$.

Cada estrutura treliça gera um par de componentes polifásicas complementares em potência, e tais componentes agora serão funções de ângulos ϕ_{jk} , que compõem a estrutura, e que devem ser otimizados. O Apêndice C apresenta a estrutura e as equações que a descrevem.

Uma vez que o filtro protótipo tem suas componentes polifásicas descritas por ramos de estruturas treliça, a derivada da função objetivo com relação às variáveis a otimizar pode ser descrita por

$$\frac{\partial E_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}_p)}{\partial \phi_{jk}} = \sum_{n=0}^{N_p} \frac{\partial E_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}_p)}{\partial h_p(n)} \frac{\partial h_p(n)}{\partial \phi_{jk}}. \quad (6.4)$$

As equações (6.1) e (6.4) são as únicas necessárias ao projeto de um MFB do tipo PR como apresentado em [27, 26].

Para otimizar tal projeto pode ser utilizado algoritmo do tipo QP, baseado em rotinas quasi-Newton. Tais algoritmos convergirão para o ponto ótimo de forma suave e eficiente.

O filtro protótipo como aqui descrito pode ser utilizado em MFBs do tipo CMFB, SMFB e MDFT, entre outros.

6.2 Transceptores Redundantes Baseados em estruturas de MFBs

6.2.1 Transmissor Mono-Portadora e Receptor Multi-Portadora

No Capítulo 4, foram desenvolvidos transceptores utilizando MFBs. Nesta subseção, o transmissor sofrerá uma modificação, de forma que o mesmo não concentre espectralmente a informação a ser transmitida em subbandas, mas que tal informação seja difundida por todo o espectro disponível. Já no receptor, um MFB será utilizado para separar a informação em subbandas bem seletivas, permitindo uma equalização no domínio da frequência. Essa estrutura foi batizada por transceptor FIR SCMC (*single-carrier multi-carrier*).

Para desenvolver o transceptor redundante aqui sugerido será necessário o conhecimento da ordem do canal, porque permite calcular o tamanho necessário

para a redundância a ser inserida.

As condições necessárias para que se consiga recompor integralmente um sinal transmitido em blocos por um canal não-ideal, foram objeto de estudo em muitas publicações [12, 13, 51, 52], as quais normalmente assumiam que o canal era representado por um filtro FIR. Mais ainda, as condições eram expressas em termos do tamanho da redundância inserida no sinal transmitido, para que este, mesmo sendo distorcido pelo canal, ainda pudesse ser recuperado integralmente.

Intuitivamente, dado um canal FIR $P(z)$, com comprimento L , e supondo a ausência de ruído, bastaria modificar o sinal digital a ser transmitido, com a inserção de $L - 1$ zeros entre suas amostras válidas, para que o sinal recebido não possuísse nenhuma interferência inter-simbólica, mas apenas distorção de amplitude, a qual poderia ser compensada com um ajuste de ganho. Entretanto, tal tratamento traz uma condição suficiente mas não necessária ao tamanho da redundância, e limites inferiores foram obtidos com estudos mais detalhados [12, 13, 51, 52], onde a transmissão era feita em blocos e, via de regra, fazia-se uso de equalizadores do tipo *zero forcing* (ZF), os quais tentam cancelar a função de transferência do canal.

Para um sinal $X(z)$ transmitido por um canal $P(z)$, sem ruído aditivo, o sinal recebido $\hat{X}(z)$ se torna a melhor estimativa de $X(z)$ se o equalizador ZF for dado por [42]

$$E_q(z) = \frac{1}{P(z)}, \quad (6.5)$$

com a imposição de que $\frac{1}{P(z)}$ seja estável.

As condições para a equalização ZF de um transceptor redundante, independentemente da localização dos zeros da função de transferência $P(z)$ do canal digital, são dadas por [51]

$$Q \geq \left\lceil \frac{N_c}{N - M} \right\rceil - \left\lceil \frac{N_c}{N} \right\rceil + 1, \quad (6.6)$$

onde o transmissor não possui memória (ordem zero), o receptor possui ordem Q , e o canal $P(z)$ tem ordem N_c . Na equação (6.6), $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior do que ou igual a x .

O transceptor escolhido em [51] é dado pelas matrizes de transferência (ver

Figura 2.10 e Subseção 2.6.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M \times M} \\ \mathbf{0}_{r \times M} \end{bmatrix} \\ \mathbf{E} &= [\mathbf{G}_{M \times M} \quad \mathbf{0}_{M \times r}], \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde $r = (N - M)$ e, usualmente $r \geq L$. Essa solução, freqüentemente considerada na literatura [13, 51, 53], introduz redundância com inserção de zeros. Se \mathbf{G} é projetado convenientemente, a equação (6.6) pode ser satisfeita. Tal sistema pode ser visto como um transmultiplexador no domínio do tempo (TDM).

É possível adicionar ao transceptor previamente apresentado um codificador pré-transmissor com ordem B , e adicionar a mesma ordem a um decodificador pós-receptor, de forma que a equação (6.6) ainda seja satisfeita. Tal sistema resulta em um novo transceptor, com transmissor de ordem B e receptor de ordem $Q+B$, e pode ser convenientemente projetado se, por exemplo, o par codificador/decodificador for paraunitário, como descrito na Seção 2.9. Dessa forma, o produto matricial codificador/decodificador resulta em uma matriz identidade seguida de um atraso.

Para uma dada matriz FIR $\mathbf{S}(z)$, a paraunitariedade é satisfeita se

$$\mathbf{S}(z)\tilde{\mathbf{S}}(z) = d\mathbf{I}, \quad \forall z, \quad (6.8)$$

onde $\tilde{\mathbf{S}}(z) = \mathbf{S}^H(z)$, d é uma constante inteira, e o operador $(^H)$ representa o transposto conjugado.

Foi proposta uma estrutura especial para o equalizador, o qual permite a equalização no domínio da freqüência. O par transceptor paraunitário/equalizador resultou em um novo sistema transceptor, onde a transmissão é baseada em portadora única (SC ou *single-carrier*), e a recepção baseada em múltiplas-portadoras (MC ou *multi-carrier*) [42]. O transmissor proposto é dito ser do tipo SC porque mistura os sinais de entrada de forma que a informação se espalha ao longo de todo o espectro, não havendo separação em subbandas. Já o receptor é dito ser do tipo MC porque separa o sinal recebido em múltiplas subbandas, através de filtros modulados. Na seqüência, a estrutura proposta será detalhada de forma que suas características ficarão bem claras.

O transceptor FIR SCMC foi proposto com o objetivo de aumentar a imunidade do sistema ao ruído colorido, ou seja, aquele que possui espectro de potência

localizado [42]. Tal imunidade é devida ao fato do receptor MC possuir subbandas altamente seletivas, isolando o efeito degradante do ruído colorido apenas nas faixas de frequência que o mesmo ocupa, resultando em baixa SIR somente nessas faixas.

Como dito anteriormente, o tranceptor SCMC proposto é paraunitário, e por isso se torna mais simples, porque o receptor depende do transmissor e vice-versa. Tal transmissor é dado por

$$\mathbf{R}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(z)_{M \times M} \\ \mathbf{0}_{r \times M} \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

Nesse caso, se $\mathbf{S}(z)$ é paraunitário, $\mathbf{R}(z)$ também o será.

As entradas da matriz $\mathbf{S}(z)$ podem ser compostas por polinômios gerados por estruturas treliça complementares em potência [3], assim como as do Apêndice C, as quais são freqüentemente usadas como parte da estrutura de MFBs [3, 4].

Os SCMCs são tranceptores que têm projeto simplificado e podem ser otimizados para atender a um critério específico de otimalidade. A Seção 6.1 descreve como otimizar a estrutura, quer seja para aumentar a concentração espectral no receptor ou para reduzir os efeitos do canal sobre a ISI e ICI.

Para projetar o sistema com estruturas treliça, resultando em uma matriz $\mathbf{R}(z)$ paraunitária, basta assumir que $S_i(z)$, $i = 0, \dots, (M - 1)$, são funções de transferência dos ramos de tais estruturas. Então, defini-se

$$\mathbf{S}(z) = z^{-1} \mathbf{\Lambda}_0(z) \mathbf{A} + \mathbf{\Lambda}_1(z) \mathbf{B} \quad (6.10)$$

com

$$\begin{cases} \mathbf{\Lambda}_0(z) = \text{diag} \{S_0(-z^2), \dots, S_{M-1}(-z^2)\} \\ \mathbf{\Lambda}_1(z) = \text{diag} \{S_{M-1}(-z^2), \dots, S_0(-z^2)\} \\ \mathbf{A} = \mathbf{I} - (-1)^K \mathbf{J} \\ \mathbf{B} = \mathbf{I} + (-1)^K \mathbf{J} \end{cases}, \quad (6.11)$$

onde $2K$ é a ordem desejada da matriz $\mathbf{S}(z)$. Na formulação anterior, \mathbf{I} e \mathbf{J} são, respectivamente, a matriz identidade e a identidade reversa.

Usando as equações (6.9), (6.10), e (6.11) na equação (6.8), resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(z) \tilde{\mathbf{S}}(z) &= \mathbf{\Lambda}_0(z) \mathbf{A}^2 \mathbf{\Lambda}_0(z^{-1}) + \mathbf{\Lambda}_1(z) \mathbf{B}^2 \mathbf{\Lambda}_1(z^{-1}) \\ &= 2 (\mathbf{\Lambda}_0(z) \mathbf{\Lambda}_0(z^{-1}) + \mathbf{\Lambda}_1(z) \mathbf{\Lambda}_1(z^{-1})), \end{aligned} \quad (6.12)$$

uma vez que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}^2 = 2(\mathbf{I} - (-1)^K \mathbf{J}) \\ \mathbf{B}^2 = 2(\mathbf{I} + (-1)^K \mathbf{J}) \\ \mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{0} \\ \Lambda_0(z) \mathbf{J} \Lambda_0(z^{-1}) = \Lambda_1(z) \mathbf{J} \Lambda_1(z^{-1}) \end{array} \right. . \quad (6.13)$$

O lado direito da equação (6.12) pode ser escrito como

$$S_i(-z^2)S_i(-z^{-2}) + S_{M-1-i}(-z^2)S_{M-1-i}(-z^{-2}) = 1/2, \quad (6.14)$$

para $i = 0, \dots, \lceil M/2 \rceil - 1$, que são condições para a PR, e que podem ser obtidas fazendo $S_i(z)$ e $S_{M-1-i}(z)$ serem as funções de transferência dos ramos superior e inferior de estruturas treliça complementares em potência, para cada i , como em [3]:

$$\begin{bmatrix} S_i(z) \\ S_{M-1-i}(z) \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^K \begin{bmatrix} \sin \theta_{ik} & z^{-1} \cos \theta_{ik} \\ \cos \theta_{ik} & -z^{-1} \sin \theta_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_{i0} \\ \cos \theta_{i0} \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Uma vez que $\tilde{\mathbf{S}}(z)$ não é causal, a matriz do receptor deve ser projetada utilizando a sua versão atrasada, ou simplesmente

$$\mathbf{E}(z) = z^{-2K+1} \begin{bmatrix} z^{-1} \tilde{\mathbf{S}}(z) & \mathbf{0}_{M \times r} \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

O próximo passo é otimizar $\mathbf{S}(z)$ eficientemente de forma que os efeitos nocivos do canal possam ser minimizados. As funções objetivo a serem utilizadas para tal fim são dadas na Seção 6.1. Como exemplo, um método indireto é minimizar a energia na banda de rejeição de $H_p(z)$, o filtro protótipo do sistema, ou seja

$$F_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_s}^{\pi} |H_p(e^{j\omega})|^2 d\omega, \quad (6.17)$$

onde

$$H_p(z) = \sum_{i=0}^{M-1} S_i(z^{2M})z^{-i} + z^{-2K+2} S_i(z^{-2M})z^{-2M+1-i}. \quad (6.18)$$

Nesse caso, os polinômios $S_i(z)$, $i = 0, \dots, M - 1$, formam as $2M$ componentes polifásicas do filtro protótipo de fase linear $H_p(z)$, projetado para um MFB M -bandas do tipo PR (ver Seção 6.1), onde o fator de sobreposição de blocos é $\rho = 2K$, uma vez que o comprimento de $H_p(z)$ é $2KM$. Tal filtro protótipo é muito usado em sistemas do tipo CMFB, SMFB e MDFTFB, entre outros. De fato, se o equalizador

utilizado logo após o receptor contiver em sua estrutura uma matriz unitária \mathbf{T} do tipo DCT, DST, ou DFT, o par receptor/equalizador poderá se tornar o banco de análise de um CMFB, SMFB ou MDFTFB [6, 54], respectivamente. Nesse caso, haverá a necessidade do uso de uma matriz de equalização $\mathbf{W}^H(z)$ e da transformada inversa \mathbf{T}^H para recuperar a informação transmitida. A estrutura do SCMC e do equalizador propostos estão apresentadas na Figura 6.1, onde o MFB seria composto pelo SCMC de análise (receptor) e a matriz de transformação \mathbf{T} do equalizador.

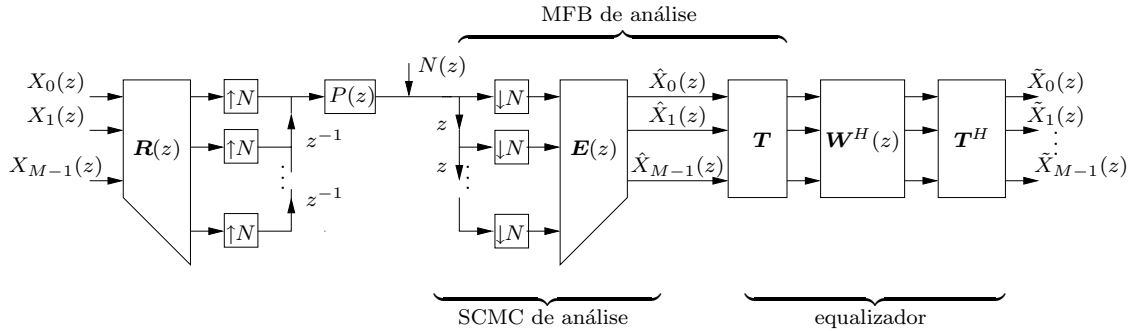


Figura 6.1: Estrutura de complexidade reduzida do transceptor SCMC com M canais e do equalizador propostos.

Se a otimização do filtro protótipo for feita de acordo com o critério LS (least-squares) [4], como dado pela equação (6.17), o par receptor/equalizador resultará em um sistema altamente seletivo em frequência, possibilitando uma equalização eficiente no domínio da frequência, o que melhora o desempenho do sistema sobre canais com resposta não-plana e com ruído colorido. Alternativamente, a matriz $\mathbf{S}(z)$ pode ser otimizada para reduzir ambas ISI e ICI, como mencionado na Seção 6.1.

Nessa pesquisa de tese, rotinas QP foram usadas para realizar a otimização do filtro protótipo, e conseqüentemente do sistema SCMC [54], e as variáveis a otimizar eram os ângulos θ_{ik} da equação (6.15).

O transceptor proposto está intimamente ligado aos MFBs. De fato, se $r = 0$ e \mathbf{C}_{IV} é a matriz DCT tipo 4 [4, 5], então $\mathbf{C}_{IV}\tilde{\mathbf{S}}(z)$ é o banco de análise de um CMFB.

O Capítulo 7 contempla simulações de transmissão por meios dispersivos, e por isso os equalizadores não serão descritos aqui, mas somente na Seção 7.2, que apresenta métodos de equalização que, ao serem associadas aos transceptores

propostos, permitem reduzir de forma significativa o efeito degradante do canal com memória.

6.2.2 Transceptor Multi-Portadora Codificado

O sistema apresentado nessa subseção foi batizado de CMC (*coded multi-carrier*), que é um sistema multi-portadora (pré e pós) codificado.

Como não existe estrutura transceptora FIR multi-portadora com redundância de implementação rápida (baseada em MFBs), onde a mudança de taxa N/M seja racional [23], o sistema é desenvolvido com MFBs maximamente decimados e a redundância é inserida com pré-codificação, através de uma matriz \mathbf{P} . Tal pré-codificador pode ser baseado em qualquer sistema matricial redundante que permita a decodificação através de uma matriz \mathbf{D} conhecida, de forma que

$$\mathbf{D}\mathbf{P} = \mathbf{I}. \quad (6.19)$$

Por exemplo, para um dado sistema sobredeterminado com matriz $\mathbf{P}_{m \times n}$, $m > n$, satisfazer a equação (6.19) significa obter um decodificador que irá permitir achar a solução LS [31] onde o problema seja descrito pela matriz de transformação \mathbf{P} .

O conjunto pré-codificador/decodificador aqui proposto toma como base matrizes ortonormais [31], que são utilizadas de uma forma peculiar para integrar \mathbf{P} e \mathbf{D} . Como exemplo, bases Walsh-Hadamard [42] podem ser usadas por simplicidade. Nesse caso, para M sinais de entrada e mudança de taxa N , usa-se uma matriz \mathbf{P} composta por uma Walsh-Hadamard $\mathbf{W}_{M \times M}$ e por uma matriz $r \times M$ composta pelas $r = N - M$ bases iniciais da Walsh-Hadamard, ou seja

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{M \times M} \\ \mathbf{W}_{r \times M} \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

No receptor, faz-se equalização antes de remover o sufixo e usa-se \mathbf{D} para recuperar as M subbandas. O decodificador no caso das bases Walsh-Hadamard é dado por

$$\mathbf{D} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^H. \quad (6.21)$$

A filosofia desse sistema é a diversidade espectral, recebendo M sinais de entrada, e não mais os enviando por portadoras dedicadas, como no caso dos MFBs,

mas sim enviando combinações dos M sinais de entrada através das N portadoras disponíveis. Tal sistema se difere de um MFB redundante no sentido estrito, porque esse último continuaria utilizando M portadoras para enviar os M sinais de entrada. Entretanto, não existe implementação de complexidade reduzida para MFBs redundantes para $\frac{N}{M}$ fracionário [23].

É importante frisar que a restrição da equação (6.6) sobre a ordem do transmissor continua valendo, e que o pré-codificador introduzido não modifica a ordem do transmissor, assim como a inserção do decodificador não modifica a ordem do receptor, pois tanto \mathbf{P} como \mathbf{D} são matrizes sem memória.

A estrutura resultante do transceptor proposto, baseado em um MFB com pré-codificação e decodificação é dada pela Figura 6.2, onde $\mathbf{R}(z)$ e $\mathbf{E}(z)$ são, respectivamente, as matrizes polifásicas do banco de síntese e análise do MFB, \mathbf{P} é a matriz do pré-codificador e \mathbf{D} é a matriz do decodificador.

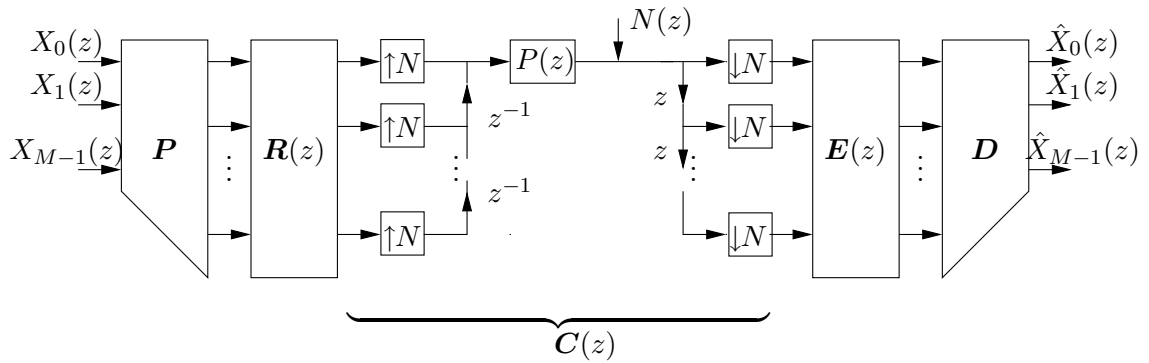


Figura 6.2: Estrutura de complexidade reduzida do transceptor redundante baseado em MFB N -canais com pré-codificador e decodificador.

Como o transceptor aqui proposto utiliza bancos MFB como estruturas moduladoras, técnicas de otimização como propostas no Capítulo 4 são as mais indicadas para desenvolver tais bancos. Uma vez já projetado um MFB para N bandas, com, por exemplo, critério de seletividade LS, basta inseri-lo na estrutura da Figura 6.2. Dessa forma, a otimização independe completamente da pré e pós-codificação.

O sistema proposto é mais imune à distorção imposta pelo canal $P(z)$ do que o equivalente não-redundante ($r = N - M = 0$). A maior imunidade resulta da diversidade espectral trazida pela técnica de inserção de redundância aqui proposta.

Em suma, o projeto do transceptor proposto não depende do tipo de canal,

assim como na Subseção 6.2.1, mas apenas de sua ordem, para a determinação da redundância r . A estrutura é redundante, mas se baseia em um MFB não-redundante.

6.3 Transceptor Redundante Baseado em FB Paraunitário

Em projetos apresentados no Capítulo 4, a otimização do sistema era feita baseada em figuras de mérito de distorção e concentração espectral, mas sem considerar o canal. Na Seção 6.2, foi proposta uma técnica que fazia o uso de redundância e contemplava o conhecimento da ordem do canal. Já nessa seção, não só a ordem do canal será assumida como conhecida, mas possivelmente a função densidade de probabilidade (*probability density function* ou PDF) [42, 55] dos seus *taps*, ou até mesmo os coeficientes do canal, caso este seja invariante no tempo. Além disso, a otimização será realizada visando minimizar toda e qualquer interferência entre símbolos. Ao sistema transceptor resultante foi dado o nome de paraunitário de portadora única (PSC ou *paraunitary single-carrier*).

Os transceptores propostos são baseados em FBs paraunitários, mas não baseados em sistemas modulados, para trazer maior flexibilidade ao projeto, uma vez que se utiliza uma estrutura mais genérica. Isso implica na necessidade de desenvolver todos os filtros de síntese, dados pelos polinômios $F_m(z)$, $m = 0, \dots, M-1$. Já os filtros de análise são determinados a partir dos filtros de síntese, pela seguinte relação

$$H_m(z) = z^{-N_f} F_m^*(z), \quad (6.22)$$

onde N_f é a ordem dos filtros de síntese e análise, e o operador (*) denota o complexo conjugado dos termos do polinômio.

A Figura 2.9 apresenta o sistema transceptor genérico, com M bandas e fator de mudança de taxa de amostragem N , sendo $N \geq M$. Nessa figura, $P(z)$ é o canal digital, supostamente não ideal.

O sistema também carrega a propriedade de paraunitariedade e, como dado na Seção 2.6, é representado pelas matrizes polifásicas $\mathbf{R}(z)$ e $\mathbf{E}(z)$.

A paraunitariedade do sistema transceptor é garantida se

$$\mathbf{E}(z) = z^{-Q} \mathbf{R}^H(z), \quad (6.23)$$

onde Q é a ordem das matrizes polifásicas.

A estrutura de complexidade reduzida do sistema transceptor, representada na Figura 2.10, mostra que o efeito do canal pode ser representado pela matriz $\mathbf{C}(z)$, que é função do canal $P(z)$, ou $\mathbf{C}(z) = F(P(z))$.

Para um sistema do tipo PR (sem distorção), é necessário que

$$z^{-\Delta} \mathbf{I} - \mathbf{E}(z) \mathbf{C}(z) \mathbf{R}(z) = \mathbf{0}, \quad (6.24)$$

onde Δ é o atraso de grupo do sistema transceptor e normalmente metade da ordem total deste, ou B (tanto transmissor como receptor possuem ordem B).

Uma vez que o sistema transceptor é paraunitário, e definindo $\Phi(z)$ como a matriz de distorção do sistema, um sistema PR deve satisfazer

$$\Phi(z) = z^{-B} (\mathbf{I} - \mathbf{R}^H(z) \mathbf{C}(z) \mathbf{R}(z)) = \mathbf{0}, \quad (6.25)$$

Dada a equação (6.25), é possível formular uma estratégia de otimização do sistema que busque minimizar as interferências do sistema.

Na Subseção 2.7.2, foram definidas as figuras de mérito ISI e ICI, através das equações (2.67) e (2.68). Entretanto, tais figuras de mérito têm sua nomenclatura oriunda de sistemas modulados, uma vez que a interferência entre portadoras (ICI) é computada para estruturas que apresentam separação espectral definida. Por isso, para os transceptores considerados nessa seção, a distorção atribuída à ICI passará a fazer parte do cômputo da ISI, o que inclusive condiz com a literatura dedicada ao assunto [12, 13, 51, 52].

Para que não haja confusão com as nomenclaturas anteriormente utilizadas, a energia da distorção total do sistema será batizada por SI (*system interference*), e uma estratégia de otimização adotada é a de que, para um dado canal $P(z)$ de comprimento finito L , a SI seja minimizada. A SI seria a soma da ISI com a ICI da Subseção 2.7.2, se ambos não considerassem a máxima distorção dentre todas as subbandas do sistema, mas sim o somatório das distorções para todas as M subbandas, e se o canal $P(z)$ fosse ideal.

Fazendo uso do vetor unitário $\mathbf{u} = [1 \ \cdots \ 1]^T$, a figura de mérito SI pode ser definida por

$$\text{SI} = \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} \mathbf{u}^T \Phi(z) \mathbf{u} \mathbf{u}^T \Phi^*(z) \mathbf{u} dz, \quad (6.26)$$

onde, mais uma vez, $(*)$ denota o complexo conjugado.

Para minimizar a SI é necessário conhecer os coeficientes do canal $P(z)$, o que pode se tornar muito inconveniente se tal canal for variante no tempo. Por exemplo, se a cada M amostras recebidas a PSD dos *taps* do canal variar suficientemente, será necessária uma nova estimação do mesmo. Isso quer dizer que a cada bloco transmitido é necessário estimar o canal, o que toma muito tempo e eleva a complexidade computacional do sistema.

Se, ao invés de requerer o conhecimento dos coeficientes do canal, for exigido somente o conhecimento da PSD dos seus coeficientes, é possível atribuir um peso a cada coeficiente, proporcional à energia média que este possua.

Seja a matriz de transferência interpolada do sistema $\mathbf{G}(z^N)$, como definida na equação (2.65), e a respectiva matriz de transferência $\mathbf{G}(z)$, com entradas $[\mathbf{G}(z)]_{u,v}$. De acordo com a Subseção 2.7.2, $g_{u,v}(n)$ representa a resposta impulsional da transferência da v -ésima entrada para a u -ésima saída, se o canal é ideal. No domínio temporal, tal transferência é descrita por

$$g_{u,v}(n, i) = \mathcal{D}_N \{t_{u,v}(m - i)\}, \quad (6.27)$$

onde $\mathcal{D}_N\{\cdot\}$ representa a operação de decimação com fator N , e

$$t_{u,v}(m) = f_v(m) * h_u(m), \quad (6.28)$$

sendo que $(*)$ denota a operação de convolução [4, 42]. Nessa notação foi inserida a variável i para permitir decimar o sinal nos ramos do receptor com atraso de i amostras.

A função de distorção SI agora pode ser escrita por

$$\text{SI} = \sum_{u,n} (\delta(n - d) - g_{u,u}(n, 0))^2 + \sum_{u,v,n, u \neq v} g_{u,v}^2(n, 0) \quad (6.29)$$

onde d representa um atraso inteiro ($d \leq Q$), $n = 0, \dots, 2Q$, e $u, v = 0, \dots, M - 1$.

Agora, para remover a dependência em n , basta definir

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{u,v}(i) &= [g_{u,v}(0, i) \cdots g_{u,v}(2Q, i)]^T \\ \boldsymbol{\delta}_d &= [\underbrace{0 \cdots 0}_{d-1} \ 1 \ 0 \cdots 0]^T \end{cases} \quad (6.30)$$

e definir a função de distorção ε , que permitirá ponderar os efeitos de cada percurso (atraso) do canal independentemente:

$$\varepsilon \stackrel{P(z)=1}{=} \sum_{i,u} \lambda_i (\boldsymbol{\delta}_d^T - \mathbf{g}_{u,u}^T(i)) (\boldsymbol{\delta}_d - \mathbf{g}_{u,u}(i)) + \sum_{i,u,v, u \neq v} \lambda_i \mathbf{g}_{u,v}^T(i) \mathbf{g}_{u,v}(i), \quad (6.31)$$

que contabiliza a distorção total, ponderando cada versão atrasada da resposta impulsional nos ramos do receptor, antes da decimação. Nessa equação, $i = 0, \dots, I$, onde usualmente $I = L - 1$, e L é o comprimento do canal.

Uma vez que o processo de otimização do sistema requer o cômputo das derivadas parciais de primeira ordem da função objetivo em relação às variáveis a otimizar [29], ou seja, o vetor gradiente $\nabla \varepsilon$, as seguintes definições se fazem necessárias:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_k = [f_k(0) \cdots f_k(N_f)]^T \\ \nabla \varepsilon = [\nabla^T \varepsilon_{\mathbf{f}_0} \cdots \nabla^T \varepsilon_{\mathbf{f}_{M-1}}]^T \\ \nabla \varepsilon_{\mathbf{f}_k} = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial f_k(0)} \cdots \frac{\partial \varepsilon}{\partial f_k(N_f)} \right]^T \\ = 2 \left(\sum_{i,u} \lambda_i \boldsymbol{\Gamma}(i, u, u, k) (\mathbf{g}_{u,u}(i) - \boldsymbol{\delta}_d) + \sum_{i,u,v, u \neq v} \lambda_i \boldsymbol{\Gamma}(i, u, v, k) \mathbf{g}_{u,v}(i) \right) \end{cases}, \quad (6.32)$$

assim como

$$\boldsymbol{\Gamma}(i, u, v, k) = [\mathcal{G}_{-i}(u, v, k) \ \mathcal{G}_{N-i}(u, v, k) \cdots \mathcal{G}_{(2Q-1+[i/N])N-i}(u, v, k)], \quad (6.33)$$

onde $\mathcal{G}_n(u, v, k), \forall n > 0$, é a n -ésima coluna da matriz $\mathcal{G}(u, v, k)$ a ser definida, e $\mathcal{G}_n(u, v, k) = [0 \cdots 0]^T, \forall n < 0$.

O parâmetro i em $\boldsymbol{\Gamma}(i, u, v, k)$ é crucial para permitir quantificar o efeito de

atrasos inseridos pelo canal. Além disso,

$$\mathcal{G}(u, v, k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{u,v}(0)}{\partial f_k(0)} & \cdots & \frac{\partial t_{u,v}(2N_f)}{\partial f_k(0)} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial t_{u,v}(0)}{\partial f_k(N_f)} & & \frac{\partial t_{u,v}(2N_f)}{\partial f_k(N_f)} \end{bmatrix} \\ \begin{cases} \mathbf{0}, & \forall k \notin (u, v) \\ \Omega_1(k), & \forall k \neq v \\ \Omega_2(k), & \forall k \neq u \\ \Omega_1(k) + \Omega_2(k), & \forall k = u = v \end{cases} \end{cases}, \quad (6.34)$$

onde

$$\Omega_1(n) = \begin{bmatrix} f_k(N_f) & \cdots & f_k(1) & f_k(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & f_k(1) & f_k(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f_k(N_f) & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_k(N_f) & f_k(N_f - 1) & \cdots & f_k(0) \end{bmatrix}, \quad (6.35)$$

$$\Omega_2(k) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & f_k(0) & f_k(1) & \cdots & f_k(N_f) \\ \vdots & \ddots & f_k(0) & f_k(1) & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & f_k(N_f) & \ddots & \vdots \\ f_k(0) & \cdots & f_k(N_f - 1) & f_k(N_f) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

A equação (6.31) permite contabilizar o efeito de canais não-ideais porque quantifica, com diferentes pesos λ_i , para $i = 0, \dots, L - 1$, o efeito de atrasos de i amostras nas respostas $t_{u,v}(m)$, computadas pré-decimação. Tal formulação visa minimizar a energia do erro entre a resposta ideal $\delta(n - d)$ e a resposta impulsional do u -ésimo ramo $g_{u,u}(n)$.

Os pesos λ_i são muito úteis quando as PDFs [42] dos coeficientes do canal são conhecidas. Por exemplo, caso o segundo percurso (primeiro atraso) do canal possua a mais elevada energia dentro todos os percursos, λ_1 deverá ser ajustado para o maior valor dentre todos os pesos, a fim de compensar as distorções. Os pesos podem ser ajustados manualmente se o algoritmo de otimização for do tipo QP, ou otimamente caso se use algoritmos do tipo SQP [29].

Para efetuar a otimização do sistema, usa-se um algoritmo do tipo QP [29], como por exemplo o disponibilizado no pacote de engenharia MATLAB[®], através da função *fminunc*. Nesse caso, a inicialização das variáveis a otimizar, ou seja,

os coeficientes do filtro, pode ser eficientemente feita através de um gerador de números aleatórios com distribuição gaussiana [55] e variância $\frac{1}{M^2}$. Cada subfiltro $f_k(n)$, $k = 0, \dots, M - 1$ deve ser inicializado dessa forma.

A ordem N_f dos subfiltros é determinada pelo fator de sobreposição de blocos ϱ . Entretanto, mais do que escolher um fator de sobreposição de blocos ϱ , deve-se ajustar N_f , que implica no ponto de máxima transferência da convolução de $f_k(n)$ com $f_k^*(N_f - n)$, $k = 0, \dots, M - 1$, de forma que N seja um múltiplo dessa ordem. Resumidamente, faz-se

$$N_f = \varrho M = cN, \quad (6.37)$$

sendo c é um número inteiro positivo. Conseqüentemente, $\varrho = \frac{N_f}{M}$ poderá ser fracionário.

A restrição em (6.37) se deve ao fato de que essa ordem garante que o pico da convolução (casamento) seja sempre amostrado, garantindo simetria à resposta impulsional amostrada e, conseqüentemente, reduzindo o número de restrições impostas ao sistema no momento da otimização.

6.4 Exemplos Numéricos

Nessa seção serão apresentados exemplos numéricos capazes de elucidar as técnicas de projeto apresentadas ao longo desse capítulo. O objetivo será demonstrar as peculiaridades de cada técnica, desde a fase de projeto até a fase de aplicação, para os SCMCs, CMCs e PSCs.

Uma especificação de projeto com baixa complexidade computacional foi escolhida, o que não traz perda alguma de generalidade, mas sim facilita a comparação.

Seja a seguinte especificação para um sistema transceptor:

$$\begin{cases} M = 8 \\ r = N - M = 2 \end{cases}, \quad (6.38)$$

onde M é o número de subbandas e r é a redundância do sistema.

Para o projeto do SCMC, a ordem escolhida do filtro protótipo é igual a $N_p = \varrho M - 1 = 79$, onde $\varrho = 2K = 10$ é o fator de sobreposição de blocos (ver Seção 4.1). Além disso, a função-objetivo que define a forma de contenção espectral

deve ser escolhida entre LS, PCLS ou Minimax. Para os exemplos em questão, a função-objetivo é LS, o que se traduz em mínima energia na banda de rejeição dos subfiltros do sistema. Nesse tipo de projeto, a otimização independe do canal.

No projeto CMC, como o número de subbandas do transceptor codificado será dado por N e não por M , faz-se $\varrho = 8$ e $N_p = \varrho N - 1 = 79$. Já a função objetivo é a mesma da anterior, ou seja, LS, com $\rho = 1$ (sobreposição espectral), assim como no projeto SCMC descrito anteriormente.

No caso do sistema PSC, o valor mais próximo de N_p que seja múltiplo de N é $N_f = 80$, o que resulta em $\varrho = \frac{N_f}{M} = 10$. Nesse caso, a função objetivo é o SI, a qual depende do canal (no mínimo de sua ordem).

A otimização do sistema PSC normalmente se baseia na PDF do canal para fazer a ponderação do vetor $\boldsymbol{\lambda}$. Mas, para canais determinísticos, não faz sentido falar em PDF e $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0 \cdots \lambda_{L-1}]^T$ tem suas entradas dadas pelo valor quadrático de cada coeficiente do canal ou $\boldsymbol{\lambda} = [p(0)^2 \cdots p(L-1)^2]^T$, onde L é o comprimento do canal e $p(n)$ sua resposta impulsional.

Nos exemplos dessa seção, o canal é invariante no tempo (determinístico) e dado por

$$P(z) = 1 + 0.1z^{-1} + 0.05z^{-2}. \quad (6.39)$$

Tal canal é comumente encontrado em sistemas DMT com modulação em fase [42].

As Figuras 6.3, 6.4 e 6.5 mostram a magnitude da resposta em frequência dos subcanais dos transmissores SCMC, CMC e PSC, respectivamente. Observa-se que o SCMC não apresenta concentração espectral, havendo total sobreposição das respostas em frequência de todas as subbandas, o que é típico de um sistema com multiplexação no tempo (TDM). O mesmo comportamento se aplica ao transceptor PSC.

Nessa seção, tanto o SCMC como o CMC foram projetados baseados em MFBs do tipo CMFB. As técnicas de projeto estão amplamente detalhadas nos capítulos 4 e 6.

O sistema CMC foi projetado com matrizes codificadoras \mathbf{P} e \mathbf{D} baseadas em bases Hadamard, como detalhado na Seção 6.3. Nesse transceptor, os M subcanais de entrada são pré-codificados por \mathbf{P} , gerando N sinais que serão submetidos ao MFB de síntese para transmissão. No receptor, o MFB de análise irá demodular o

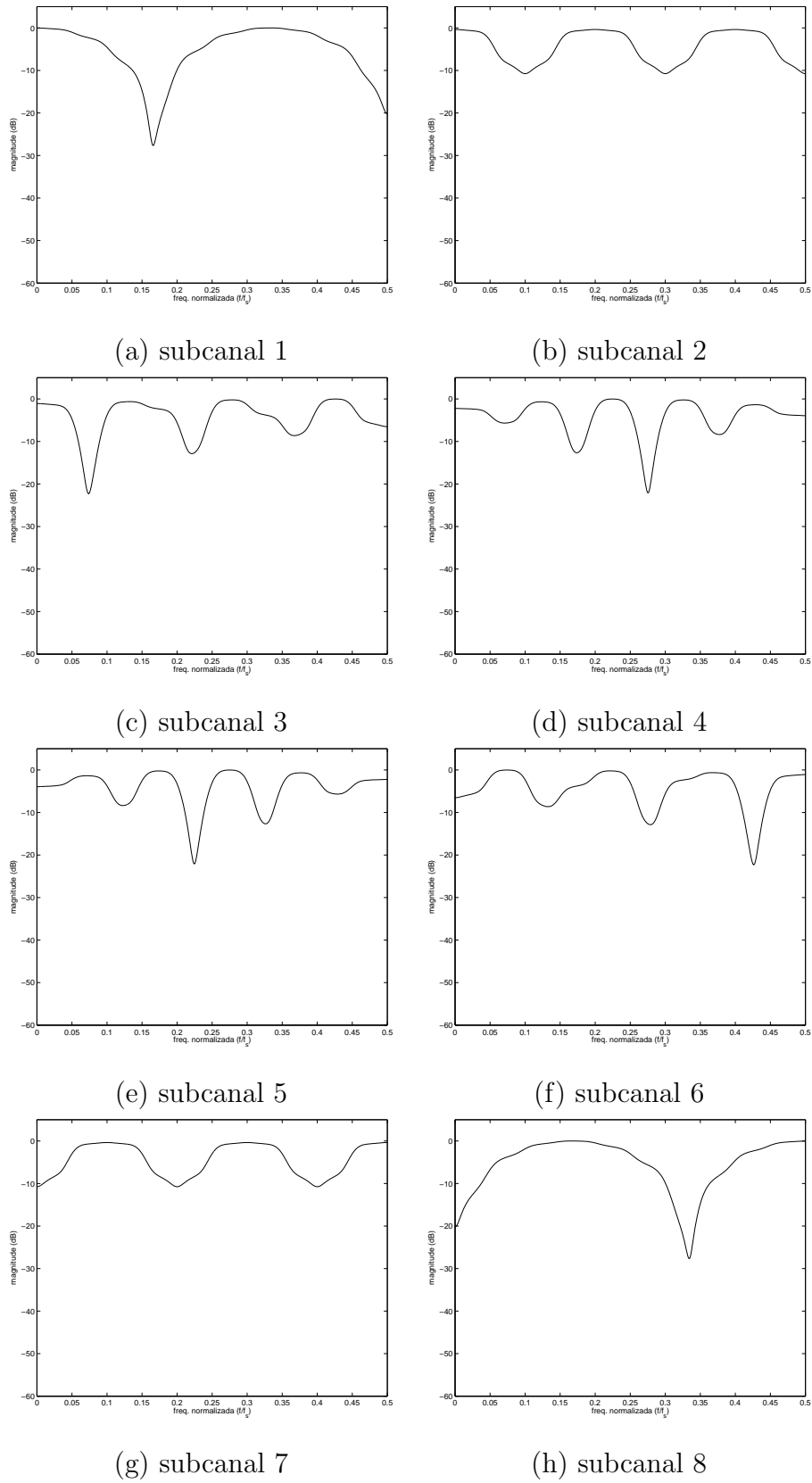


Figura 6.3: Resposta em magnitude dos 8 subcanais do sistema SCMC com $\rho = 10$ e $\rho = 1$.

sinal, o qual será posteriormente decodificado por \mathbf{D} , resultando na separação total dos subcanais.

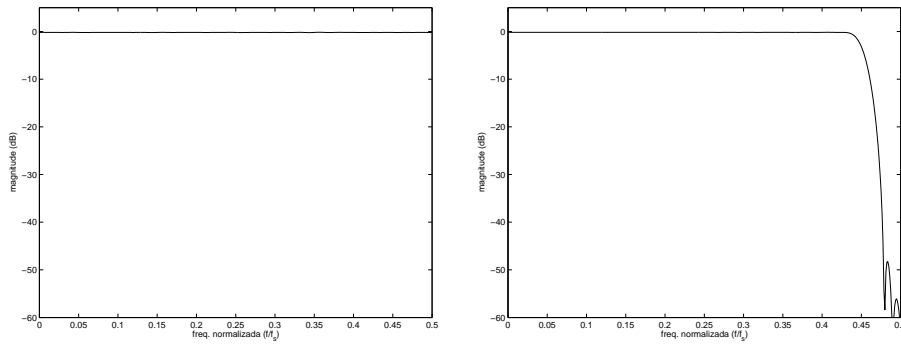
A vantagem em utilizar um sistema do tipo CMC reside no fato de que, além de se permitir a inserção de redundância nos dados de entrada, tem-se o total controle sobre a concentração espectral do sinal transmitido. Por exemplo, se forem usadas $N - 1$ bandas para transmitir o sinal codificado e a última for ignorada, o sinal transmitido em banda base estará concentrado na faixa de frequência $[0, F_s(N - 1)/2N]$, onde F_s é a frequência de amostragem. Isso é interessante porque facilita a eliminação das repetições espectrais do sinal, que deve ser feita pelo conversor digital-analógico (D/A), para transmissão através do meio físico, reduzindo a interferência com sistemas adjacentes [42].

As Figuras 6.4(b) e 6.4(c) mostram a concentração espectral dos subcanais do CMC com a última subbanda removida, para $\varrho = 8$ e $\varrho = 80$, respectivamente, facilitando a tarefa de filtragem de *aliasing* promovida pelo conversor D/A.

A Figura 6.5 mostra todas as respostas em magnitude dos subcanais do transmissor PSC. Tal transmissor tem a vantagem de ser projetado especialmente para uma dada PDF de um canal variante (ou invariante) no tempo. Dessa forma, é esperado que tal sistema atinja valores mais baixos de distorção. A exemplo do sistema SCMC, os subcanais apresentam resposta em frequência ocupando toda a faixa espectral, e a ortogonalidade se manifesta por reduzidos valores de correlação entre os subfiltros do sistema. Ao contrário do CMC, não é possível fazer concentração espectral, atenuando a faixa próxima à frequência $F_s/2$, o que irá dificultar o trabalho de filtragem de repetições espectrais do conversor D/A para difusão ao meio físico. Entretanto, pode ser aplicado um pré-filtro para eliminar componentes de frequências muito altas ou sobreamostrar o sinal a ser transmitido [42]. Esse transceptor se apresenta como o mais robusto face a canais não-ideais.

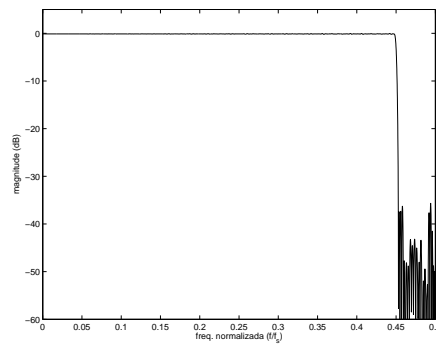
Para efeitos de comparação, tanto o muito difundido sistema DMT [1, 42] (baseado nas transformadas DFT e DFT inversa), como o sistema de portadora única (*single-carrier* ou SC) proposto em [56] (com transmissor composto única e exclusivamente pela matriz identidade \mathbf{I} , e receptor dado pela DFT), foram implementados.

O DMT é um sistema modulado, tal como os MFBs. Entretanto, como o



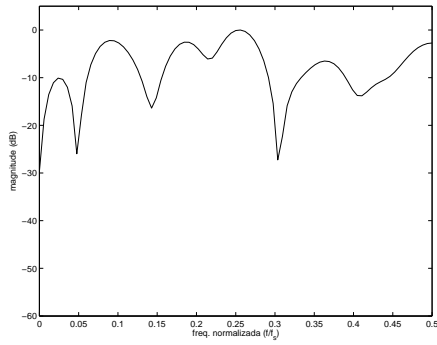
(a) $\varrho = 8, \rho = 1$

(b) $\varrho = 8, \rho = 1$

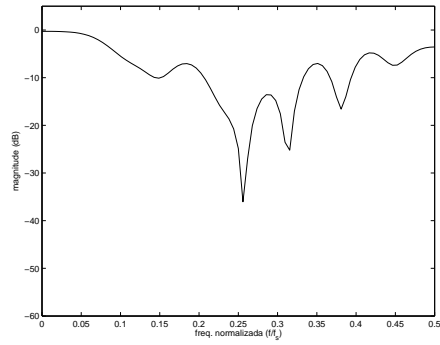


(c) $\varrho = 80, \rho = 0,1$

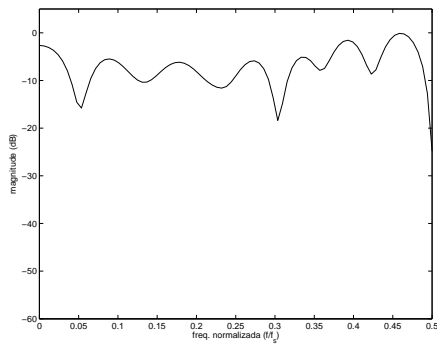
Figura 6.4: Resposta em magnitude do sistema CMC: (a) resposta dos 8 subcanais com fator de sobreposição de blocos $\varrho = 8$ e *roll-off* $\rho = 1$; (b) resposta dos 8 subcanais removendo uma banda do MFB; (c) idem, com maior valor de sobreposição de blocos e menor *roll-off*.



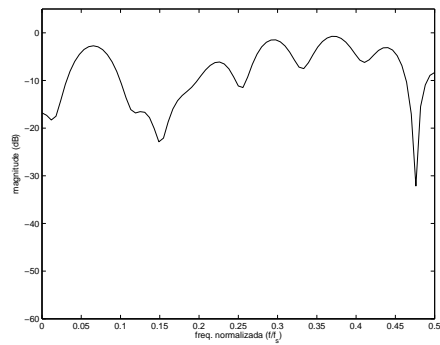
(a) subcanal 1



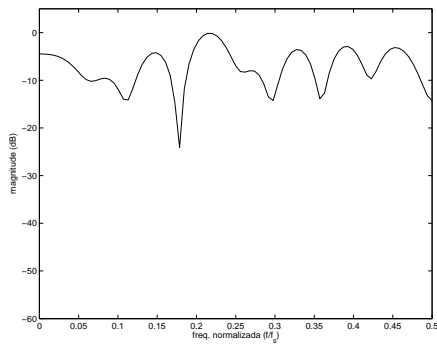
(b) subcanal 2



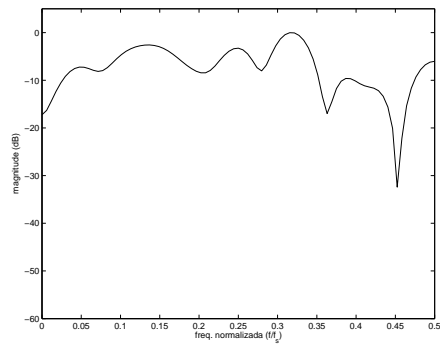
(c) subcanal 3



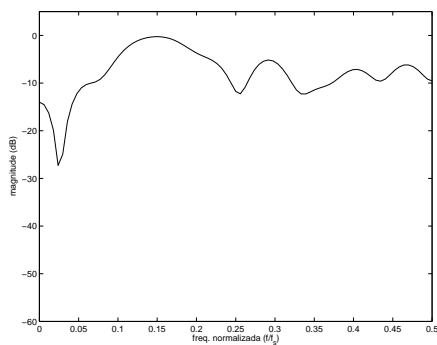
(d) subcanal 4



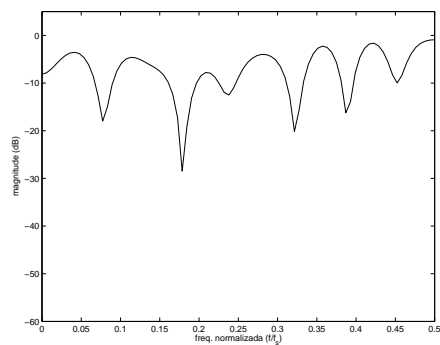
(e) subcanal 5



(f) subcanal 6



(g) subcanal 7



(h) subcanal 8

Figura 6.5: Resposta em magnitude dos subcanais do transmissor PSC com $\rho = 10$ e ordem $N_f = 80$.

DMT não possui memória, seu projeto é simples, o que o tornou muito difundido.

O sistema SC está enquadrado na categoria dos TDMS, e se sustenta no princípio da diversidade espectral, transmitindo cada símbolo por toda a faixa espectral disponível.

Tanto o SC como o DMT permitem a inserção de redundância de forma muito simples. As Figuras 6.6 e 6.7 mostram as respostas em magnitude de ambos os sistemas. Como o DMT não possui memória, percebe-se que a atenuação na faixa de rejeição é muito baixa quando comparada com sistemas MFBs, o que pode implicar em baixa eficiência face a manifestação de ruído colorido [1, 42, 54].

A Tabela 6.1 resume as especificações dos transceptores, assim como o SI calculado como na equação (6.31), com λ_i ajustado como descrito anteriormente, o que contabiliza o efeito do canal $P(z)$ sobre o sistema transceptor. Para calcular o SI, foram feitas transmissões sucessivas de impulsos por cada subcanal e analisada a saída no receptor. Dos resultados dessa tabela se conclui que todos os sistemas apresentaram distorção na mesma ordem de grandeza e que o sistema PSC, projetado com o conhecimento a priori do canal (nesse exemplo), obteve melhor desempenho.

Da Tabela 6.1 se conclui que o sistema DMT foi o que apresentou o pior resultado, e isso é justificado pelo fato de que o canal era seletivo em frequência e que, como o DMT é um sistema do tipo FDM (*frequency domain multiplexing*) [42], existe alocação de subcanais nas faixas de frequência em que o canal $P(z)$ impõe maior atenuação, sofrendo estes de redução na sua transferência de energia, conseqüentemente aumentando a distorção medida pelo SI.

Um problema que afeta mais seriamente sistemas do tipo FDM do que os do

Tabela 6.1: Especificações e figura de distorção dos transceptores projetados na Seção 6.4.

sistema	ordem	ρ	SI (dB)
SCMC	79	10	-10,7
CMC	79	8	-11,0
PSC	80	10	-11,3
SC	0	0	-10,7
DMT	0	0	-10,4

tipo TDM, e que resulta da seletividade em frequência do meio físico, é a significativa redução da relação sinal-ruído (*signal-to-noise ratio* ou SNR) em subcanais cuja resposta em frequência se sobreponha às regiões espectrais de maior atenuação do meio. Esse efeito não foi medido nesse exemplo numérico mas será observado no Capítulo 7, ao longo de outras simulações.

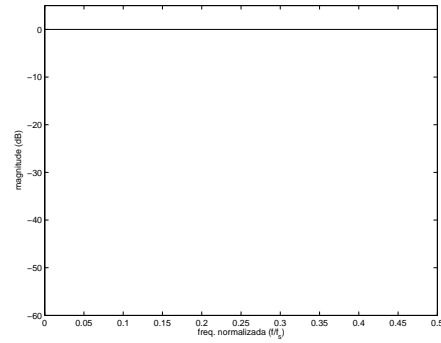
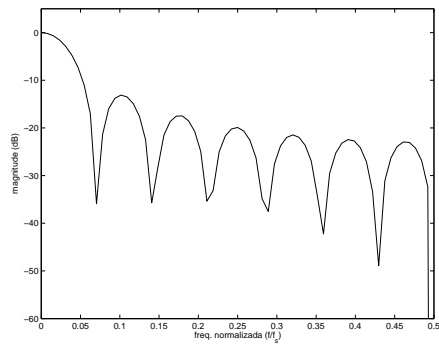
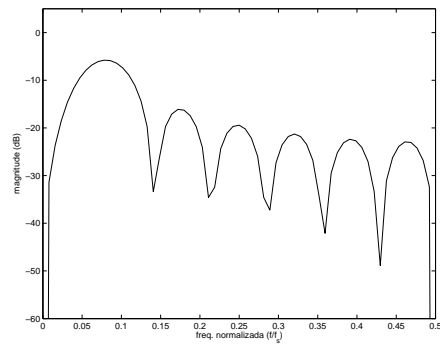


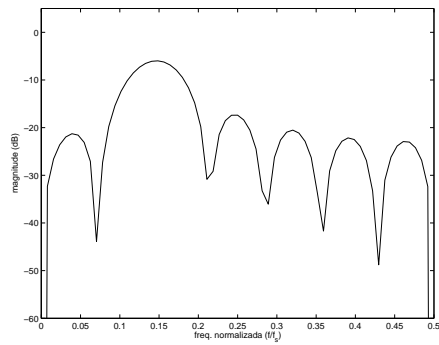
Figura 6.6: Resposta em magnitude de todos os canais do transmissor SC.



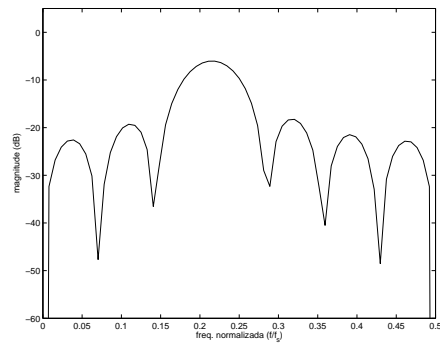
(a) subcanal 1



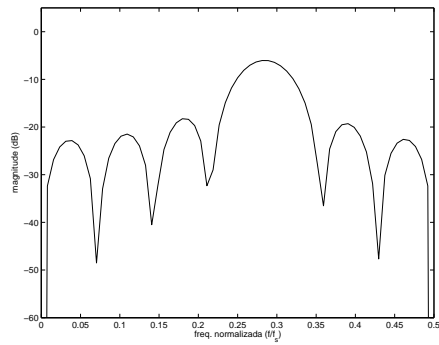
(b) subcanal 2



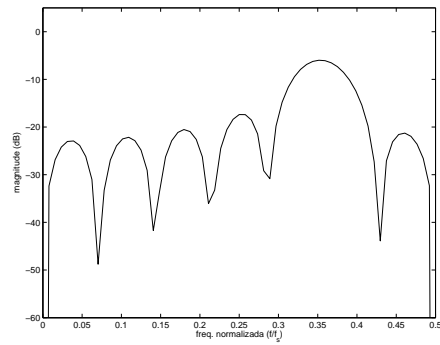
(c) subcanal 3



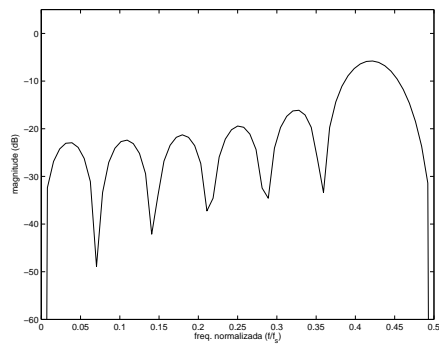
(d) subcanal 4



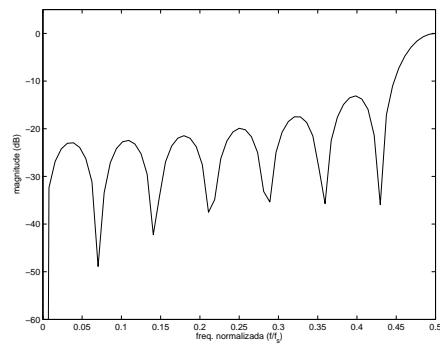
(e) subcanal 5



(f) subcanal 6



(g) subcanal 7



(h) subcanal 8

Figura 6.7: Resposta em magnitude dos subcanais do transmissor DMT.

6.5 Conclusão

Nesse capítulo foram apresentadas técnicas de projeto de transceptores redundantes, quer sejam baseados em MFBs ou baseados em sistemas paraunitários não-modulados.

A inserção da redundância se fez necessária para minimizar os efeitos nocivos de canais com memória, através da redução do erro no sinal reconstruído no receptor.

Cada transceptor apresentado possui características peculiares, as quais ficarão claras no decorrer do próximo capítulo, que traz simulações realistas de sistemas transceptores operando sobre meios hostis.

Esse capítulo fechou a apresentação das técnicas de otimização de transceptores iniciada no Capítulo 4, trazendo uma preocupação maior para a adaptação dos sistemas às imperfeições do meio físico. Entretanto, todos os dois capítulos tiveram um enfoque muito maior em otimização quadrática do que em comunicações. Já o próximo capítulo traz o enfoque em comunicações necessário ao desfecho dessa pesquisa de tese.

Capítulo 7

Simulações de Sistemas Transceptores

Este capítulo apresenta simulações de sistemas transceptores baseadas em situações práticas. Para tanto, faz-se um estudo breve do meio físico e de técnicas de equalização adotadas. Em seguida, são apresentados alguns exemplos práticos que fazem uso dos transceptores desenvolvidos nos Capítulos 4 e 6.

O elo entre as técnicas de projeto e a aplicabilidade destas é obtido neste capítulo em função das simulações, que foram realizadas no pacote de engenharia Matlab®.

O capítulo se organiza da seguinte forma: a Seção 7.1 estuda os efeitos do meio físico, e as Seções 7.2 e 7.3 apresentam a teoria de equalizadores e os tipos aplicáveis aos FBs para minimizar tais efeitos, respectivamente. A Seção 7.4 apresenta os resultados de simulações de transmissão e a Seção 7.5 conclui o capítulo.

7.1 Estudo do Meio Físico

Nesta seção é estudado o meio físico variante no tempo, que é analisado no domínio do tempo contínuo, mas é facilmente estendido ao tempo discreto, para sistemas digitais, o que será feito ao realizar as simulações.

Os meios físicos podem ser variantes ou invariantes no tempo. Sistemas de transmissão por fios, baseados em propagação elétrica, usualmente variam pouco ou nada ao longo de um intervalo razoavelmente longo de tempo. Já os sistemas basea-

dos em comunicação sem fio, através de ondas eletromagnéticas, podem apresentar altas variações ao longo de intervalos de tempo relativamente pequenos, através da ocorrência de múltiplos percursos variantes em atenuação e atraso [42].

O ruído aditivo também é muito comum em sistemas de comunicação e usualmente é adicionado no receptor, causados por ruído térmico. Além disso, é comum a existência de interferidores na faixa espectral em uso para sistemas de comunicação sem fio [42].

7.1.1 O Meio Físico Variante no Tempo

Supondo que um sinal complexo banda base $x(t)$ é transmitido por modulação em amplitude com portadora f_c , o sinal resultante $s(t)$ enviado pelo meio físico pode ser descrito por

$$s(t) = \Re[x(t)e^{-j2\pi f_c t}], \quad (7.1)$$

sendo $\Re[\cdot]$ o operador que denota a parte real de um número.

Uma vez que o meio físico não é ideal, podem existir múltiplos caminhos de propagação, o que fará com que o sinal recebido $r(t)$ seja descrito por

$$r(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l(t) s(t - \tau_l(t)) \quad (7.2)$$

onde $\alpha_l(t)$ e $\tau_l(t)$ contabilizam, respectivamente, a amplitude da atenuação e o atraso de propagação variantes no tempo ao longo do caminho de propagação l .

Em termos da informação $x(t)$, o sinal recebido após demodulação com portadora complexa, pode ser escrito por

$$\hat{x}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l(t) e^{-j2\pi\tau_l(t)} x(t - \tau_l(t)), \quad (7.3)$$

o que se traduz em uma resposta impulsional do canal $p(\tau; t)$ dada por

$$p(\tau; t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l(t) e^{-j2\pi\tau_l(t)} \delta(\tau - \tau_l(t)) \quad (7.4)$$

Na equação (7.4), $p(\tau; t)$ representa a resposta impulsional ao longo do tempo t para uma entrada aplicada no instante $t - \tau$, e $\delta(t)$ é a função impulso de Dirac [42]. Dessa forma, τ representa o tempo decorrido do evento desde a aplicação da

entrada. Na mesma equação, observa-se que o sinal recebido $\hat{x}(t)$ sofre degradação de amplitude e fase. Entretanto, um outro fenômeno importante que é devido à variação temporal dos caminhos de propagação (atenuação e atraso) é o desvanescimento (*fading*).

O desvanescimento é facilmente percebido quando se transmite um sinal concentrado em frequência. Por exemplo, um degrau unitário no tempo tem resposta em frequência impulsional [42]. Se tal sinal representar $x(t)$, então o sinal recebido pode ser escrito por

$$\hat{x}_u(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l(t) e^{-j\theta_l(t)}, \quad t > 0, \quad (7.5)$$

sendo que $\theta_l(t) = 2\pi\tau_l(t)$. Na equação anterior, $\hat{x}_u(t)$ deveria ser uma versão atenuada do degrau transmitido, caso o canal fosse invariante no tempo. No entanto, para uma simples variação de $\theta_l(t)$ de π radianos ao longo do tempo (uma variação em $\tau_l(t)$ de $\frac{1}{2f_c}$), provoca reversão ao longo do caminho de propagação l . Normalmente, altas variações de fase ocorrem em intervalos pequenos de tempo, devido ao fato de ser o período da portadora pequeno e a velocidade de propagação ser alta (próxima à velocidade da luz) [42]. Já a atenuação $\alpha_l(t)$ varia mais lentamente, para uma mesma mobilidade onde a fase seja observada.

Caso o número de percursos de propagação L seja grande, o sinal recebido $\hat{x}(t)$ poderá ser modelado por um processo aleatório gaussiano complexo [42, 1].

Quando a resposta impulsional $p(\tau; t)$ é modelada por um processo aleatório gaussiano complexo de média zero, a envoltória $|p(\tau; t)|$ é dita como sendo distribuída de acordo com Rayleigh [42]. Nesse caso, o canal possui desvanescimento Rayleigh. Caso hajam percursos invariáveis no meio ou com potência fixa predominante, a resposta impulsional não poderá mais ter média zero, fazendo com que $|p(\tau; t)|$ tenha distribuição de Rice. Outra distribuição existente é a Nakagami-m, muito usada para modelar ambientes móveis celulares urbanos [42].

Para facilitar o estudo do canal variante no tempo, é necessário fazer uso do conceito de estacionaridade. Um processo estocástico $y(t)$ é dito estacionário no sentido amplo (*wide-sense stationary* ou WSS) quando [9]

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= \mu \\ E[y^*(t_1)y(t_2)] &= \phi(t_1, t_2) = \phi(t_1 - t_2), \end{aligned} \quad (7.6)$$

onde $\phi(t_1, t_2)$ define a função de correlação de $y(t_1)$ com $y(t_2)$, e $E[.]$ é o operador de valor esperado.

Assumindo que $p(\tau; t)$ é um processo estocástico estacionário no sentido amplo em t , define-se a sua função de autocorrelação

$$\begin{aligned}\phi_p(\tau_1; \tau_2; t_1; t_2) &= \phi_p(\tau_1; \tau_2; \Delta t) \\ &= E[p^*(\tau_1; t)p(\tau_2; t + \Delta t)].\end{aligned}\quad (7.7)$$

7.1.2 Seletividade em Freqüência

Na maioria dos canais de rádio é razoável assumir que a atenuação e o desvio de fase do atraso provocados pelas imperfeições do meio são descorrelacionados para duas entradas quaisquer aplicadas neste, em tempos distintos. Sendo assim,

$$E[p^*(\tau_1, t)p(\tau_2, t + \Delta t)] = \phi_p(\tau_1; \Delta t)\delta(\tau_1 - \tau_2)\quad (7.8)$$

Se $\Delta t = 0$, então $\phi_p(\tau; 0) \equiv \phi_p(\tau)$ é a potência média do canal em função do atraso temporal τ . Por essa razão, $\phi_p(\tau)$ é chamada de perfil de intensidade multipercurso ou o espectro de potência do atraso [42].

Na prática, $\phi_p(\tau; \Delta t)$ é medido transmitindo impulsos e correlacionando os sinais recebidos com suas versões atrasadas. A faixa de valores de τ para os quais $\phi_p(\tau) > 0$ é chamada de espalhamento multipercurso do canal e é denotada por T_m .

Através do uso da transformada de Fourier [4, 42], é possível analisar o efeito do atraso τ na função de autocorrelação $\phi_p(\tau; \Delta t)$, ou seja, o perfil da intensidade multipercurso. Sendo assim

$$\phi_P(\Delta f; \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_p(\tau; \Delta t)e^{-j2\pi\Delta f\tau} d\tau\quad (7.9)$$

é definida como a função de correlação de freqüência e tempo incrementais, e que pode ser medida transmitindo um par de senóides separadas na freqüência por Δf e correlacionando-as no receptor com um atraso relativo de Δt .

Na Equação (7.9), se $\Delta t = 0$, define-se $\phi_P(\Delta f; 0) \equiv \phi_P(\Delta f)$, que permite quantificar a coerência em freqüência do canal. Dessa forma

$$\Delta f_c \approx \frac{1}{T_m}\quad (7.10)$$

é a largura de banda da coerência do canal. Então, duas senóides com espaçamento maior do que Δf_c são afetadas diferentemente pelo canal, quando transmitidas simultaneamente. Se Δf_c é pequeno quando comparado com a largura de banda do sinal transmitido, então diz-se que o canal é seletivo em frequência. Caso contrário, o canal é plano ou não-seletivo em frequência.

7.1.3 Efeito Doppler

O efeito Doppler decorre das variações temporais do meio físico, que podem ser medidas pelo parâmetro Δt em $\phi_P(\Delta f; \Delta t)$. Tal efeito pode resultar em espalhamento espectral do sinal transmitido e deslocamento em frequência.

Analisa-se o efeito Doppler a partir da transformada de Fourier sobre a variável Δt em $\phi_P(\Delta f; \Delta t)$, ou seja,

$$S_P(\Delta f; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_P(\Delta f; \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t, \quad (7.11)$$

a qual pode ser analisada para um tom simples transmitido, ao fazer $\Delta f = 0$. Sendo assim, $S_P(\lambda) \equiv S(0; \lambda)$ é o espectro de potência Doppler, resultante das variações temporais do meio. A faixa de valores de λ onde $S_P(\lambda) > 0$ é chamada de espalhamento Doppler do canal, ou B_d .

Se o meio físico é invariante no tempo, $S_P(\lambda) = \delta(\lambda)$, não havendo espalhamento.

O recíproco de B_d é uma medida do tempo de coerência do canal, ou seja,

$$\Delta t_c = \frac{1}{B_d}. \quad (7.12)$$

Um canal que varie pouco no tempo tem um alto Δt_c e conseqüentemente um pequeno espalhamento Doppler.

A função que quantifica a potência média do canal em função dos atrasos τ e do efeito Doppler é dada por

$$S(\tau, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_p(\tau, \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t, \quad (7.13)$$

e é chamada de *channel scattering function*.

O fator de espalhamento é definido pelo produto $T_m B_d$. Se $T_m B_d < 1$, o canal é dito sub-espalhado. Caso contrário, tem-se sobre-espalhamento.

7.2 Técnicas de Equalização

Se o meio físico é não-ideal, este causará interferência entre os símbolos transmitidos. Nesse caso, o sistema transceptor pode ter o seu desempenho severamente degradado. Porém, existem técnicas de equalização que podem ser aplicadas para minimizar os efeitos nocivos de tal meio, mas que dependem fortemente do cenário em questão.

Para sistemas onde o meio físico é invariante no tempo, usualmente aplicam-se soluções baseadas na minimização do erro médio quadrático ou MSE (*mean square error*), que têm como melhor estimador a solução de Wiener [9, 42]. Ao usar tal solução, assume-se que o sinal recebido é estacionário. Outras soluções baseiam-se na maximização da informação mútua entre os sinais transmitido e recebido ou na minimização da taxa de erro de bit [42]. Entretanto, tais soluções são mais complexas e não serão abordadas nessa pesquisa de tese.

Se o sinal recebido no receptor não for estacionário, fato este resultante, por exemplo, do efeito de um canal variante no tempo, a solução de Wiener não será mais a solução ótima a minimizar o MSE, e se fará necessário o uso de técnicas de filtragem adaptativa, quer seja linear ou não-linear. O filtro adaptativo é variante no tempo, e por este motivo já é por si só não-linear. Entretanto, a nomenclatura estabelece que o filtro adaptativo é linear quando o mesmo realiza transformação linear no sinal de entrada, tal como um filtro FIR comum. A nomenclatura também estabelece que um filtro adaptativo é não-linear quando realiza transformações de ordem superiores no sinal de entrada, tal como as redes neurais o fazem [9, 42].

Dentre as técnicas de filtragem adaptativa mais conhecidas destacam-se o LMS e o RLS, devido à simplicidade e velocidade de convergência, respectivamente, além de suas variantes [8, 9].

Tanto o filtro de Wiener como os filtros adaptativos convencionais requerem o conhecimento do sinal desejado para que seja efetuado o treinamento do equalizador. Entretanto, existem métodos que, ao invés de tentarem minimizar o erro entre o sinal desejado e a saída do equalizador, tentam minimizar o erro (diferença) entre a entrada e a saída do decodificador, responsável pela tomada de decisão sobre o símbolo transmitido, uma vez conhecida a constelação. Tais técnicas são chamadas de equalização orientada à decisão (*decision-directed equalization* ou DDE)[9], e eli-

minimam a necessidade do envio de uma seqüência de treinamento pelo meio físico, evitando redução da taxa útil de transmissão da informação.

A Figura 7.1 mostra a estrutura do DDE, a qual não leva em consideração o sinal de informação original $\mathbf{d}(n)$.

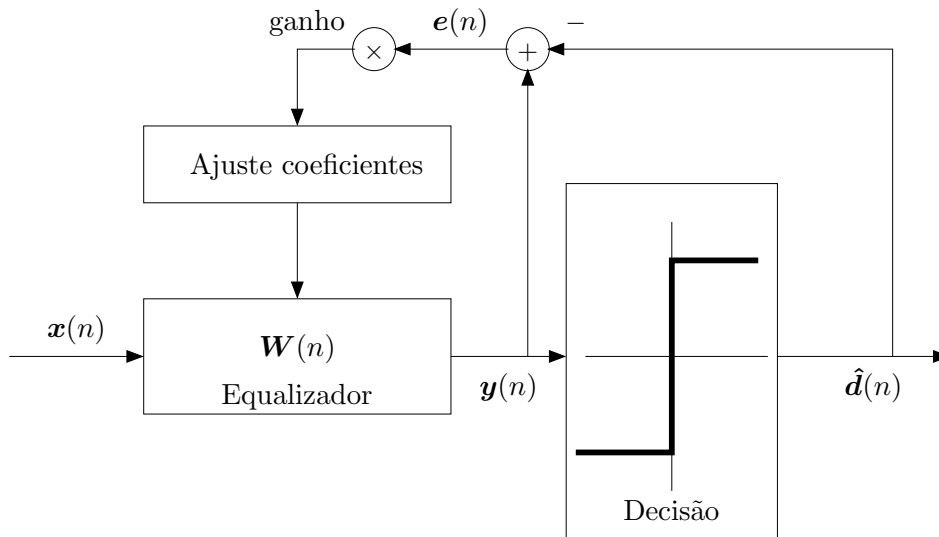


Figura 7.1: Equalização orientada à decisão.

7.2.1 Filtragem de Wiener

Ao transmitir um vetor de processos estocásticos complexos definido no domínio discreto por $\mathbf{d}(n)$, ou por simplicidade \mathbf{d} , que porventura seja corrompido por um canal MIMO (*multiple input multiple output*) não-ideal e invariante no tempo \mathbf{C} e por ruído aditivo branco, é possível encontrar o equalizador ótimo no sentido MMSE (*minimum MSE*). Para tanto, seja o vetor de observações do sinal corrompido $\mathbf{x}(n)$ ou \mathbf{x} , e \mathbf{W} a matriz de equalização. Então, tal matriz é dada pela solução de Wiener por [9, 42, 55]

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{P}, \quad (7.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx} &= E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] \\ \mathbf{P} &= E[\mathbf{x}\mathbf{d}^H], \end{aligned} \quad (7.15)$$

e o operador $(.)^H$ define o conjugado transposto. O apêndice D aborda com mais detalhes o assunto.

Tendo definido o filtro de Wiener, a melhor estimativa para \mathbf{d} será obtida por

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{W}^H \mathbf{x}. \quad (7.16)$$

Um estudo mais detalhado sobre filtragem ótima no sentido MSE pode ser obtido em [8, 9, 55].

7.2.2 Filtragem Adaptativa LMS

Se ao invés de determinar um filtro invariante no tempo como dado pela solução de Wiener, for definido um filtro $\mathbf{W}(n)$ variante no tempo, ajustado ao longo das observações do vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$ e do sinal desejado na saída $\mathbf{d}(n)$, é possível desenvolver um algoritmo que adapte o equalizador de acordo com uma medida instantânea do erro $\mathbf{e}(n) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{y}(n)$, onde $\mathbf{y}(n) = \mathbf{W}^H(n)\mathbf{x}(n)$.

A solução baseada em MSE pode ser escrita em função do erro por

$$\begin{aligned} \xi(n) &= E[\mathbf{e}^H(n)\mathbf{e}(n)] \\ &= \sigma_d^2 - \mathbf{P}^H \mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^H(n) \mathbf{P} + \mathbf{W}^H(n) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}(n). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Então, o vetor gradiente fica (consultar Apêndice D para obter definição das derivadas parciais vetoriais complexas)

$$\nabla \xi(n) = -2\mathbf{P} + 2\mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}(n). \quad (7.18)$$

Métodos baseados em gradiente descendente [9] buscam atualizar os pesos do filtro na direção de descida da função erro, ou seja, na direção oposta ao gradiente, o que é dado por

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \mu(n)(\mathbf{P} - \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}(n)). \quad (7.19)$$

Se o valor esperado for substituído por valores instantâneos, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n+1) &= \mathbf{W}(n) - \mu(n) (\mathbf{x}(n)\mathbf{d}^H(n) - \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{W}(n)) \\ &= \mathbf{W}(n) - \mu(n) \mathbf{x}(n)\mathbf{e}^H(n), \end{aligned} \quad (7.20)$$

o que se traduz no método LMS ou *Least-mean-square* [8, 9]. O tamanho do passo μ é crítico para a convergência e define diferentes vertentes do algoritmo LMS, tal como o LMS normalizado ou NLMS, que define o passo por

$$\mu(n) = \frac{\alpha}{\beta + \mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n)}, \quad (7.21)$$

onde $\alpha \in (0, 2)$ e $0 \leq \beta$.

O LMS é muito difundido devido a sua simplicidade e por isso foi escolhido para ser usado nesse trabalho.

7.2.3 Equalização com Realimentação de Decisão

Esse equalizador se baseia na técnica DDE apresentada anteriormente nessa seção. Entretanto, uma realimentação de decisão com equalizador é inserida no sistema para permitir que, ao se determinar o símbolo atual transmitido, o efeito deste sobre os próximos símbolos possa ser removido. Dessa forma, o equalizador inserido tenderá a convergir para a cauda da resposta impulsional do canal, ou seja, para os coeficientes após o atraso de grupo [9, 57] do canal. A estrutura também é conhecida por DFE ou *decision-feedback equalizer*. Na estrutura, o filtro adaptativo $\mathbf{W}_a(n)$ (filtro *feedback*) é o responsável por eliminar o ISI remanescente após o bloco decisor (decodificador baseado na constelação). Já o filtro $\mathbf{W}_b(n)$ provém da estrutura original do DDE (filtro *feedforward*).

Tanto o filtro $\mathbf{W}_b(n)$ quanto o filtro $\mathbf{W}_a(n)$ podem ser atualizados com algoritmos de filtragem adaptativa, tal como o LMS [8, 9].

A estrutura do DFE está representada na Figura 7.2.

7.3 Equalização Aplicada ao Transceptor FIR

Foram apresentadas técnicas de equalização na Seção 7.2. Agora será apresentado como fazer uso de tais técnicas em sistemas com transceptores FIR, de forma a minimizar os efeitos degradantes de um canal não-ideal.

Se a resposta em frequência do canal não é unitária ou seja, $P(z) \neq z^{-\Delta}$, altos níveis de interferência intersimbólica poderão estar presentes, mesmo se o transceptor FIR for do tipo reconstrução perfeita (PR). Nestes casos, duas técnicas são

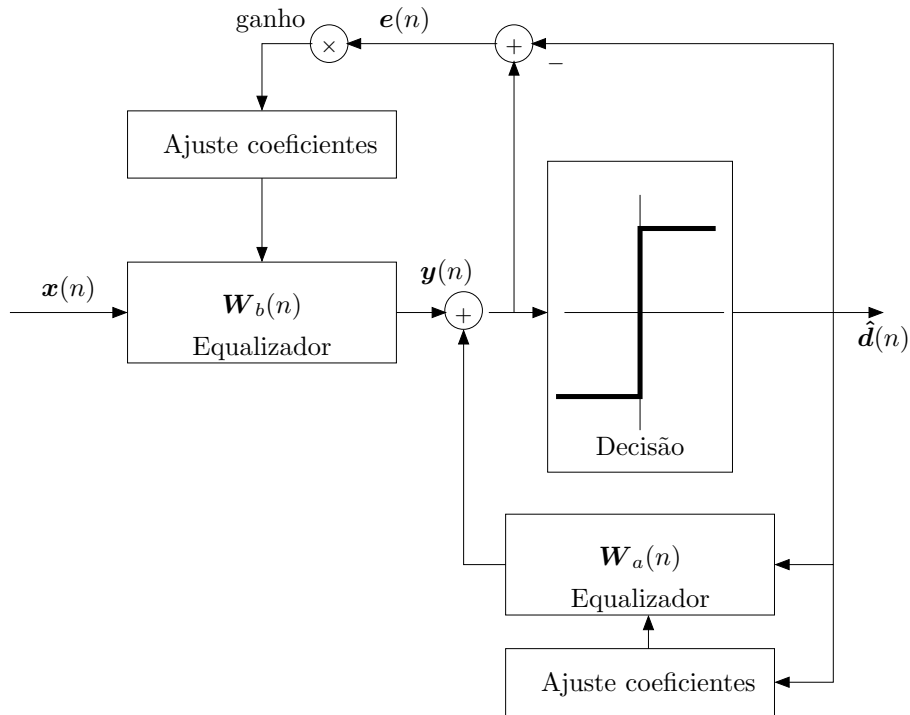


Figura 7.2: Equalização com realimentação de decisão.

comumente mencionadas na literatura, visando minimizar tal efeito: encurtamento do canal (*channel shortening*) e combinação a posteriori.

As duas técnicas são descritas a seguir.

7.3.1 Encurtamento do Canal

Dentre as soluções para encurtamento do canal (CS ou *channel-shortening*), a mais simples consiste em utilizar um atrasador único, responsável por sincronizar os sinais nos ramos do receptor FIR com os sinais dos ramos do transmissor FIR. Esse atraso z^{-d} é implementado na entrada do receptor e pode ser computado fazendo variar d em um intervalo de números inteiros positivos menores que o fator N de decimação/interpolação do transceptor FIR. Nesse caso, o atraso escolhido corresponderá ao valor de d que culminar em maior correlação entre o sinal transmitido (atrasado por um bloco de transmissão de tamanho cN , $c \in Z$) e o sinal recebido após o atrasador.

Alternativamente, pode ser realizado encurtamento do canal com mais do que um único atrasador. Nesse caso o filtro não se constitui de um único coeficiente [8, 9].

Existem técnicas mais elaboradas para calcular o melhor filtro CS, sendo o filtro de Wiener multi-estágios com posto reduzido uma boa opção, devido à robustez e simplicidade [58, 59]. Tal algoritmo implementa um filtro de Wiener sem calcular a inversa da matriz de autocorrelação do processo de entrada e permite a utilização de posto unitário. O Apêndice E apresenta a teoria associada à filtragem de Wiener multi-estágios.

O filtro para CS deve ser inserido imediatamente após o canal FIR $P(z)$ na Figura 7.3 e, apesar da simplicidade (pode ser um simples atrasador), é de grande valia para reduzir a distorção em sistemas transceptores.

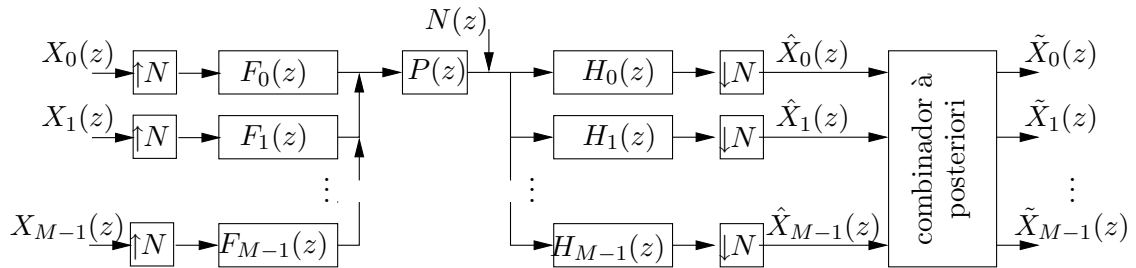


Figura 7.3: Conjunto transceptor FIR/equalizador.

7.3.2 Equalizador Combinador a Posteriori

O combinador a posteriori ou PCE (*post-combiner equalizer*) é utilizado em um transceptor FIR logo após o banco de análise (receptor), como mostrado na Figura 7.3, e sua estrutura mais geral é composta por uma transformada unitária \mathbf{T} e uma matriz $\mathbf{W}(z)$, de ordem Q , que pode vir a ser diagonal, tridiagonal, ou não apresentar qualquer propriedade estrutural. Além disso, ainda é utilizada a transformada inversa \mathbf{T}^H para recuperar o sinal estimado. A Figura 7.4 mostra tal sistema equalizador.

A idéia principal em usar uma transformada unitária é que esta irá decompor o sinal recebido em M subbandas ortogonais. Se o transceptor a ser utilizado já possuir tal transformada em sua estrutura, tal como o OFDM, o CMFB, o SMFB e o MDFTFB, então a mesma é suprimida no equalizador. Se o receptor não prevê o uso da transformada, tal como o SC ou o SCMC, então a mesma deverá ser utilizada no PCE. Nesse caso específico, o conjunto receptor/equalizador, dado por

$\mathbf{T}\mathbf{E}(z)$, resulta em um MFB cujas funções de transferência das subbandas são versões moduladas do filtro protótipo seletivo em frequência $H_p(z)$ [54].

Se o par receptor/equalizador resultar em um sistema que realize a decomposição do sinal de entrada em subbandas, tal como proposto anteriormente, então cada subbanda poderá ser equalizada considerando somente as subbandas imediatamente adjacentes, uma vez que as demais irão interferir pouco na subbanda em questão, devido ao fato de já estarem com razoável distância espectral da mesma. Tal solução reduz consideravelmente a complexidade do equalizador, cuja matriz de equalização $\mathbf{W}(z)$ passa a possuir uma estrutura tridiagonal [31].

Na grande maioria das simulações realizadas nessa pesquisa de tese, o equalizador utilizado possuía estrutura tridiagonal devido ao fato do par receptor/equalizador constituir um banco de filtros ortogonais.

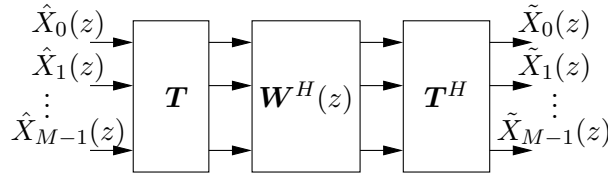


Figura 7.4: Equalizador combinador a posteriori M -canais.

Dado o PCE da Figura 7.4, defina $\hat{\mathbf{W}}(z)$ como a solução MMSE quando $\mathbf{T} = \mathbf{I}$. Então, para qualquer transformação ortonormal (incluindo a matriz identidade), pode-se escrever

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{W}}(z)\mathbf{T}^H, \quad (7.22)$$

onde $(\cdot)^H$ é a operação de conjugado transposto.

Na estrutura tradicional do sistema transceptor definiu-se $\mathbf{X}(z)$ como sendo a entrada e $\hat{\mathbf{X}}(z)$ a saída, como apresentado na Figura 7.3. Nessa configuração, caso não houvesse processamento futuro, $\hat{\mathbf{X}}(z)$ seria a melhor estimativa da entrada. Entretanto, ao inserir um equalizador como o anterior após o banco receptor, $\hat{\mathbf{X}}'(z) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{X}}(z)$ se torna o vetor de observações do processo e $\tilde{\mathbf{X}}(z)$ se torna a melhor estimativa para o sinal de entrada $\mathbf{X}(z)$. Portanto, para realizar um treinamento do filtro MMSE, basta assumir como sinal desejado na saída do equalizador o vetor $\mathbf{D}'(z) = \mathbf{T}\mathbf{X}(z)$.

No domínio do tempo tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}'(n) &= \mathbf{T}\mathbf{x}(n) \\
&= \mathbf{T}[x_0(n) \ x_1(n) \ \cdots \ x_{M-1}(n)]^T \\
\hat{\mathbf{x}}'(n) &= \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(n) \\
&= \mathbf{T}[\hat{x}_0(n) \ \hat{x}_1(n) \ \cdots \ \hat{x}_{M-1}(n)]^T.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

A solução MMSE pode ser calculada na prática com o auxílio do seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}(n) &= [\hat{\mathbf{x}}'^T(n) \ \hat{\mathbf{x}}'^T(n-1) \ \cdots \ \hat{\mathbf{x}}'^T(n-Q)]^T \\
\mathcal{D}(n_a, n_b) &= [\mathbf{d}'(n_a) \ \cdots \ \mathbf{d}'(n_b)] \\
\mathcal{X}(n_a, n_b) &= [\bar{\mathbf{x}}(n_a) \ \cdots \ \bar{\mathbf{x}}(n_b)] \\
\mathcal{W} &= [\mathcal{W}_0^T \ \mathcal{W}_1^T \ \cdots \ \mathcal{W}_Q^T]^T \\
&= (\mathcal{X}(n_a, n_b)\mathcal{X}^H(n_a, n_b))^{-1} \mathcal{X}(n_a, n_b)\mathcal{D}^H(n_a, n_b),
\end{aligned} \tag{7.24}$$

onde Q é a ordem da matriz de equalização $\mathbf{W}(z)$, e $[n_a, n_b]$ define a região de suporte no domínio temporal utilizada para estimar as correlações necessárias. Tal solução é comumente utilizada na prática e pode ser vista, por exemplo, em [54, 51].

É possível decompor a matriz de equalização no domínio z como uma soma de matrizes constantes, uma vez que o sistema é FIR. Sendo assim, escreve-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}(z) &= \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 z^{-1} + \cdots + \mathbf{W}_Q z^{-Q} \\
\mathbf{W}_q &= \{\mathcal{W}_q\} \text{ for } q = 0, \dots, Q.
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Se o produto $\mathbf{T}\mathbf{E}(z)$ se comportar como um banco de filtros seletivo em frequência, como visto para os MFBs estudados se $\mathbf{T} = \mathbf{I}$, assim como para o SCMC apresentado na Subseção 6.2.1 ($\mathbf{T} \neq \mathbf{I}$), a matriz $\mathbf{W}(z)$ poderá assumir aspecto tridiagonal [54], uma vez que apenas os subcanais imediatamente adjacentes terão influência significativa sobre o subcanal que se pretende equalizar. Nesse caso, simplifica-se o equalizador utilizando

$$\mathbf{W}_q = \text{tridiag}\{\mathcal{W}_q\} \text{ for } q = 0, \dots, Q, \tag{7.26}$$

onde $\text{tridiag}\{\mathcal{W}\}$ representa uma matriz tridiagonal composta pela diagonal adjacente inferior, pela diagonal principal e pela diagonal adjacente superior da matriz \mathcal{W} .

Se optar-se por uma equalização do tipo DDE, tal como a DFE apresentada na Subsecção 7.2.3, não será necessário definir um sinal de treinamento, e se o algoritmo de adaptação for o LMS, não será necessário definir a região de suporte, pois não existe a necessidade de estimar correlações [9].

A estrutura do PCE será muito utilizada nas simulações dos sistemas transceptores a serem apresentadas na próxima seção.

7.4 Resultados de Simulações

No Capítulo 4 foram apresentadas as técnicas de projeto de sistemas transceptores FIR baseados em MFBs não-redundantes, e no Capítulo 6 foram apresentadas técnicas de inserção de redundância nas estruturas previamente mencionadas para que as mesmas pudessem ser utilizadas eficientemente em meios físicos não-ideais, assim como também foram apresentadas novas técnicas de projeto para transceptores paraunitários.

Agora, uma vez tendo desenvolvido os sistemas transceptores, estes serão testados através de simulações no software de engenharia Matlab[®], com o intuito de verificar as vantagens e desvantagens dos sistemas propostos.

As seções anteriores deste capítulo forneceram subsídios para que pudessem ser apresentados os exemplos numéricos, uma vez que introduziram os efeitos nocivos observados nos meios físicos reais, assim como apresentaram técnicas de equalização utilizadas para mitigar tais efeitos.

Os exemplos apresentados contemplarão meios físicos invariantes e variantes no tempo, com a adição no receptor de ruído branco gaussiano e ruído colorido [42], o que permite contabilizar efeitos de ruído térmico e efeitos atmosféricos, assim como interferências recebidas de outros sistemas rádio-transmissores.

Nos exemplos, o ruído aditivo será adicionado sempre no receptor, e será do tipo branco gaussiano (AWGN ou *additive white gaussian noise*).

Os exemplos tratam somente da camada física. Nesse sentido, não é utilizada codificação de canal (códigos corretores, *interleaving*, etc.) [42], mas tão somente mapeamento dos bits de entrada (gerados aleatoriamente) em uma constelação apropriada (PSK, QPSK, M-QAM, etc.) com mapeamento Gray [42], e

posterior transmissão utilizando o transceptor em estudo.

7.4.1 Comparação entre OFDM e MFB Frente a Ruído Aditivo e Interferidor

Nesse exemplo numérico, o efeito do meio é desprezado (canal ideal) e o desempenho do sistema OFDM [1, 2] é comparado com o do MFB do tipo MDFT [7] utilizando um filtro protótipo do tipo PR, projetado como descrito na Seção 6.1, com fator de sobreposição de blocos $\rho = 2K = 16$ e fator de *roll-off* $\rho = 1,0$.

O objetivo do exemplo é avaliar a eficiência da técnica de projetos de filtros protótipos para MFBs apresentada na Seção 4.1. A função objetivo utilizada é do tipo LS [4].

As especificações são as seguintes:

$$\begin{cases} M = 64 \\ r = 0 \text{ (redundância)} \\ P_s = 0 \text{ dB} \end{cases}, \quad (7.27)$$

onde M é o número de bandas do sistema e $N = M$ (sem redundância), assim como P_s é a potência do sinal na entrada do receptor.

A Figura 7.5 apresenta a resposta em magnitude dos transceptores OFDM e MDFT, respectivamente. Pela figura se observa a alta seletividade do sistema MDFT frente ao sistema OFDM. A vantagem dessa propriedade do MDFT é que os efeitos de interferidores de banda estreita mas com potência considerável podem ser eliminados mais facilmente, uma vez que as subbandas adjacentes às subbandas afetadas apresentam considerável atenuação na faixa de rejeição.

Os sistemas transceptores OFDM e MDFT são comparados nesse exemplo numérico em termos da relação sinal-interferência (SIR ou *signal-to-interference ratio*). Para tanto, inicialmente é feita uma transmissão sem interferidor, com relação sinal-ruído (SNR ou *signal-to-noise ratio*) variando de 0 a 15 dB. A taxa de erro de bit (BER ou *bit-error rate*) medida é a mesma para os dois sistemas nesse caso, conforme apresentado na Figura 7.6(a). Nessa configuração não foram usados os equalizadores CS e PCE.

Para a simulação de transmissão utilizou-se constelação do tipo QPSK (2 bits por símbolo) [42] e um total de 100 iterações de Monte Carlo [55].

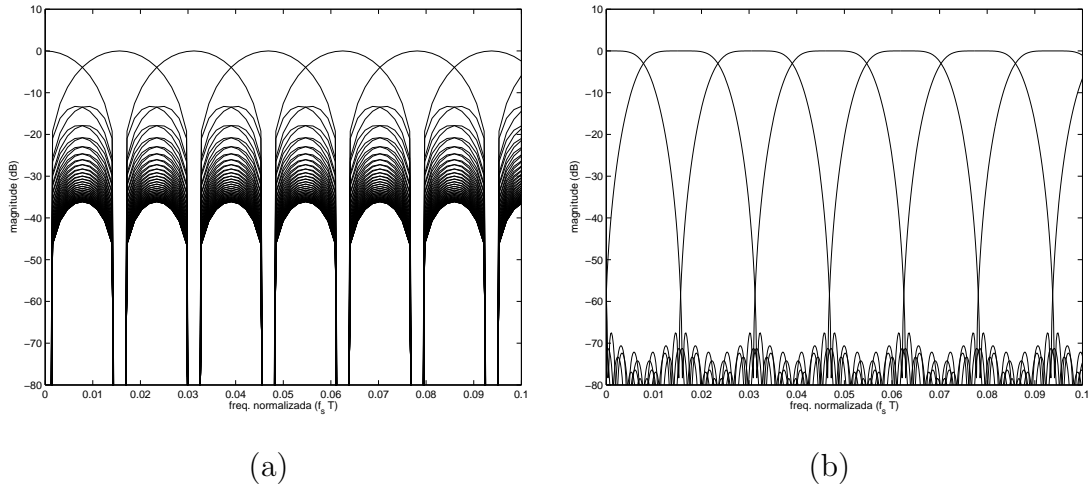


Figura 7.5: Exemplo 7.4.1: (a) Resposta em magnitude do OFDM com eixo de freqüências ampliado ($f_s T = 1,0$ Hz); (b) Resposta em magnitude do transceptor MDFT com ampliação do eixo de freqüências.

A Figura 7.6(b) mostra a densidade espectral de potência (PSD ou *power spectral density*) do sinal interferidor adicionado no receptor. A potência total do interferidor é $P_c \approx 20$ dB. Para essa configuração, a SIR medida se encontra na Figura 7.6(c), onde percebe-se claramente o melhor desempenho do sistema MDFT para rejeitar a interferência. A SNR usada foi 15 dB. Nesse caso, foi feito uso do equalizador PCE visando rejeitar a interferência. O treinamento foi realizado com 100 blocos de transmissão.

Caso seja implementada pré e pós-codificação do sistema transceptor, assim como descrito na Subseção 6.2.2 e na Seção 6.4, será possível equalizar a SIR, o que permite uma BER menor. Nesse caso, o pré-codificador utilizado foi a matriz de Hadamard de tamanho $N = M = 64$. No entanto, qualquer outra matriz ortogonal [31] (ex.: DFT) poderia ter sido utilizada.

A Figura 7.6(d) apresenta a SIR para os sistemas codificados mencionados anteriormente, onde se observa claramente que a SIR para ambos os transceptores está mais plana do que para os seus equivalentes não-codificados, ou seja, esses transceptores são capazes de equalizar a SIR. Novamente, o desempenho do MDFT é superior.

O sistema OFDM com pré-codificação baseada na DFT é conhecido como SC [56] e apresenta inclusive algumas vantagens sobre o OFDM, tal como reduzida

relação pico-média [1, 2]. Já o MDFT pré-codificado nos moldes da Subseção 6.2.2 é aqui chamado de CMC MDFT.

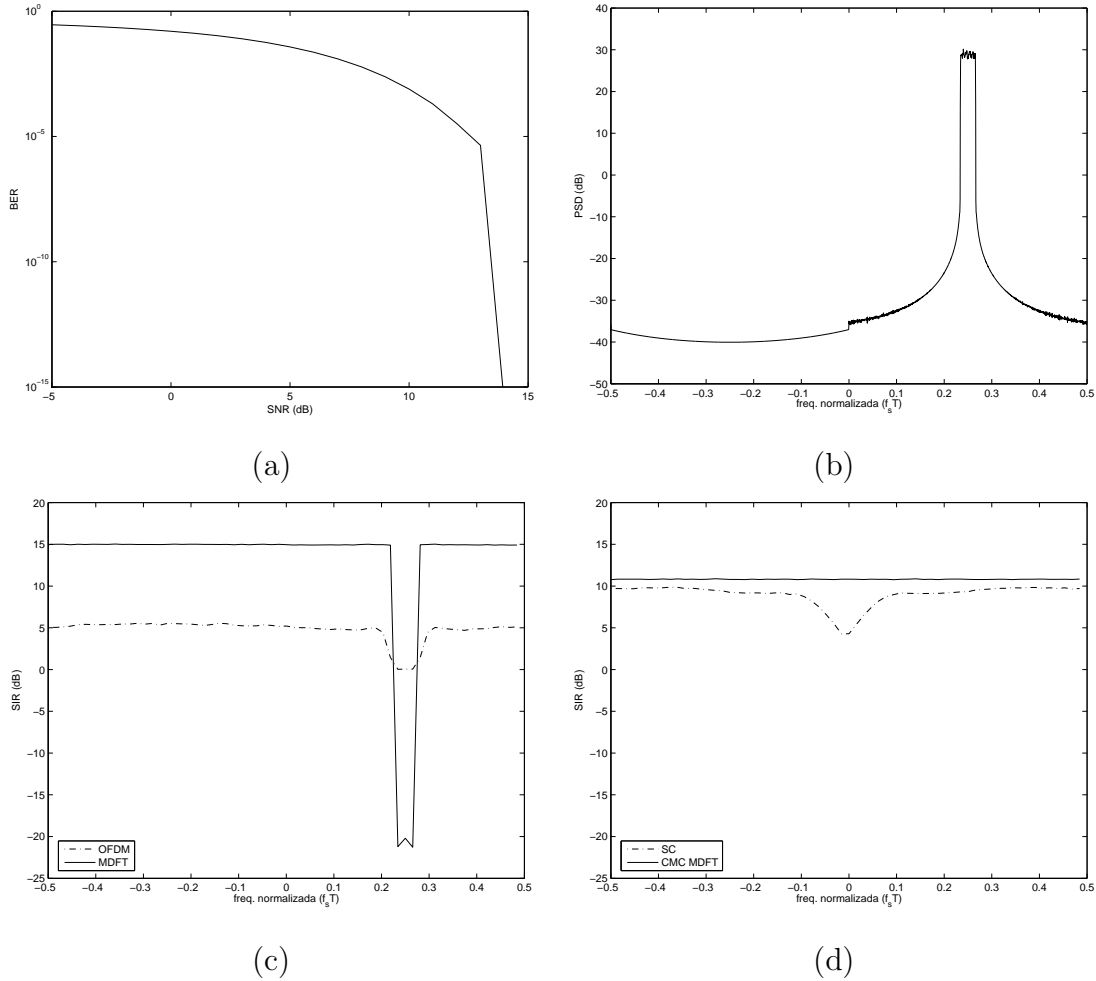


Figura 7.6: Exemplo 7.4.1: (a) BER atingida para canal AWGN; (b) PSD do interferidor ocupando 4 subbandas do sistema transceptor; (c) SIR para $P_s = 0$ dB e $P_c \approx 20$ dB para os sistemas OFDM e MDFT; (d) SIR para $P_s = 0$ dB e $P_c \approx 20$ dB, para os sistemas SC e CMC MDFT (com pré e pós-codificação).

7.4.2 Transceptor Redundante para Canal Invariante no Tempo

Esse exemplo compara o sistema SC projetado em [51] com o sistema SCMC proposto na Subseção 6.2.1 e descrito no artigo [54]. O propósito é verificar a eficiência do sistema SCMC proposto nessa tese frente a uma boa alternativa ao OFDM, proposta em [53, 56], dentre outros artigos. Tais alternativas visam trazer

um desempenho superior ao OFDM.

Os parâmetros de configuração são os seguintes:

$$\begin{cases} M = 12 \\ r = 4 \text{ (redundância)} \\ P_s = 0 \text{ dB} \end{cases}, \quad (7.28)$$

o que resulta em fator de sobreamostragem $N = 16$.

Novamente, para o cômputo da BER executou-se um total de 100 iterações de Monte Carlo, sendo que a constelação utilizada foi do tipo PSK com 1 bit por símbolo (assim como em [51]), porque o canal utilizado é real, e a transmissão, por coerência, só usa a componente em fase (I ou *in-phase*) [42].

O canal é dado pelas primeiras 30 amostras da resposta impulsional [51]

$$P(z) = 0.314 \frac{1 + 0.067z^{-1} + 0.394z^{-2} + 0.784z^{-3}}{1 - 1.084z^{-1} + 0.946z^{-2} - 0.157z^{-3}}, \quad (7.29)$$

onde fica claro que a redundância inserida no sistema não é suficiente para reduzir a matriz do canal $\mathbf{C}(z)$ a uma matriz constante (ver Subseções 2.6.2 e 6.2.1).

As simulações foram realizadas com ruído do tipo AWGN, com e sem interferidor. Nessa última configuração, a potência do interferidor era $P_c = 10$ dB.

As Figuras 7.7(a) e 7.7(b) mostram a resposta em magnitude do canal e a PSD do interferidor, respectivamente.

Esse exemplo fez uso dos equalizadores CS e PCE apresentados anteriormente nesse capítulo, sendo que o CS era simplesmente um atraso (sincronizador), estimado com 10 blocos de transmissão consecutivos. Já o PCE fez uso de uma região de suporte $n_b - n_a = 300$. Tais parâmetros foram escolhidos para garantir uma estimação satisfatória das correlações dos sinais em questão.

A ordem do PCE escolhida foi $Q = 4$, resultando em uma equalização apropriada do canal [51]. Apesar do fato dessa ordem não satisfazer a Equação (6.6), equalização ZF não está sob consideração e não é uma condição necessária aqui.

A matriz de transformação ortogonal usada no receptor foi $\mathbf{T} = \mathbf{C}_{IV}$, a qual está de acordo com a Subseção 6.2.1.

O sistema SCMC foi projetado minimizando F_2 na Equação (6.17), o que independe da resposta impulsional do canal. O fator de sobreposição de blocos escolhido foi $\varrho = 2K = 8$, o qual garantiu desempenho satisfatório e baixa complexidade computacional. Além disso, o *roll-off* escolhido foi $\rho = 1,0$.

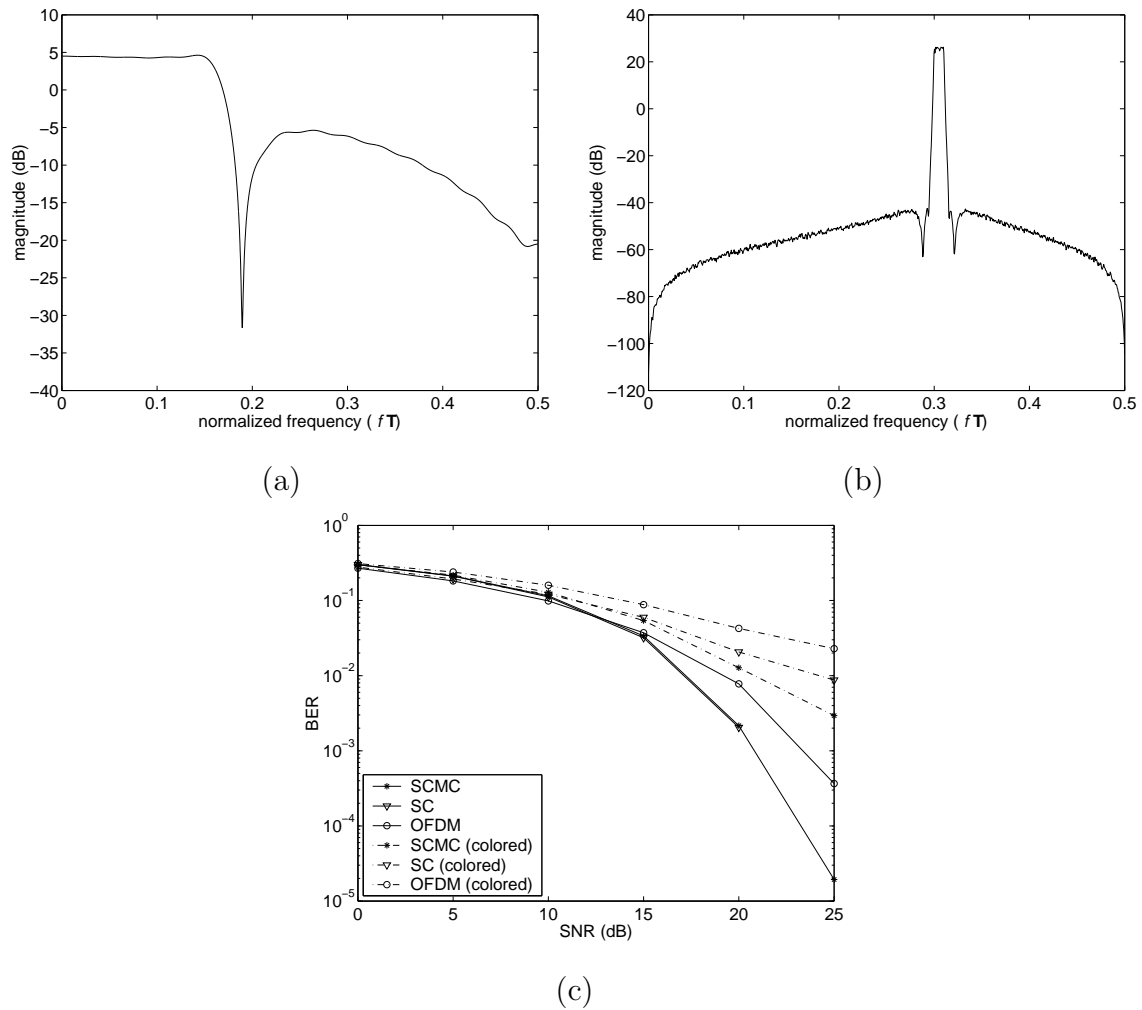


Figura 7.7: Exemplo 7.4.2: (a) Resposta em magnitude do canal real; (b) PSD do interferidor; (c) BER em função da SNR para canal AWGN com e sem interferidor.

A BER como função da SNR é apresentada na Figura 7.7(c), onde está claro que ambos os sistemas SC e SCMC possuíram desempenho semelhante para o canal seletivo em frequência AWGN, sem interferidor. Entretanto, na presença deste, o SCMC apresentou desempenho cerca de 5 dB melhor para uma $BER = 10^{-2}$, devido à alta seletividade do par receptor/equalizador do SCMC, permitindo equalização eficiente no domínio da frequência.

O sistema OFDM teve desempenho ruim porque o canal $P(z)$ em questão degradava severamente um subcanal do transceptor, através de forte atenuação em torno de frequência normalizada $f_s T \approx 0,2$.

Transmultiplexadores que trabalham no domínio da frequência (FDM) usualmente estão mais susceptíveis aos canais seletivos em frequência do que sistemas no

domínio do tempo (TDM) [56, 53]. Os TDMs estão representados tanto pelo sistema SC quanto pelo SCMC proposto (transmissão no domínio do tempo e equalização no domínio da frequência).

A complexidade do receptor SCMC é maior do que a do transmissor devido à equalização no domínio da frequência. Dessa forma, se o emprego for feito em telefonia móvel, é desejável que seja usado no *uplink*, uma vez que o receptor pode facilmente ser implementado com mais complexidade na estação rádio-base, e não no aparelho móvel [1].

7.4.3 Transceptor Redundante para Canal Complexo Invariante no Tempo

Nesse exemplo, a comparação é feita com o sistema SC estudado em [53] e também com o sistema OFDM, com as especificações [54]

$$\begin{cases} M = 64 \\ r = 3 \text{ (redundância)} \\ P_s = 0 \text{ dB} \end{cases}, \quad (7.30)$$

resultando em $N = 67$.

O canal utilizado é dado por [53]

$$\begin{aligned} P(z) = & -0.3699 - j0.5782 - (0.4053 + j0.5750)z^{-1} - (0.0834 + j0.0406)z^{-2} \\ & + (0.1587 - j0.0156)z^{-3}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

e a constelação é do tipo QPSK [42].

A resposta em magnitude do canal é mostrada na Figura 7.8(a). A PSD do interferidor é a mesma do exemplo 7.4.2, assim como o SCMC.

Nesse exemplo foram utilizados os equalizadores CS (somente atraso sincronizador) e PCE, sendo este último com ordem $Q = 0$. Ademais, o PCE utilizou como transformada a matriz DFT, ou seja, $\mathbf{T} = \mathbf{W}_M$,

A BER está representada na Figura 7.8(b), a qual confirma o desempenho superior da estrutura SCMC proposta frente ao transceptor SC estudado em [56, 53], e muito mais superior frente ao OFDM.

Tal desempenho se deve à elevada seletividade que o par receptor/equalizador trouxe ao sistema, permitindo boa rejeição à interferência. Além disso, o transmissor

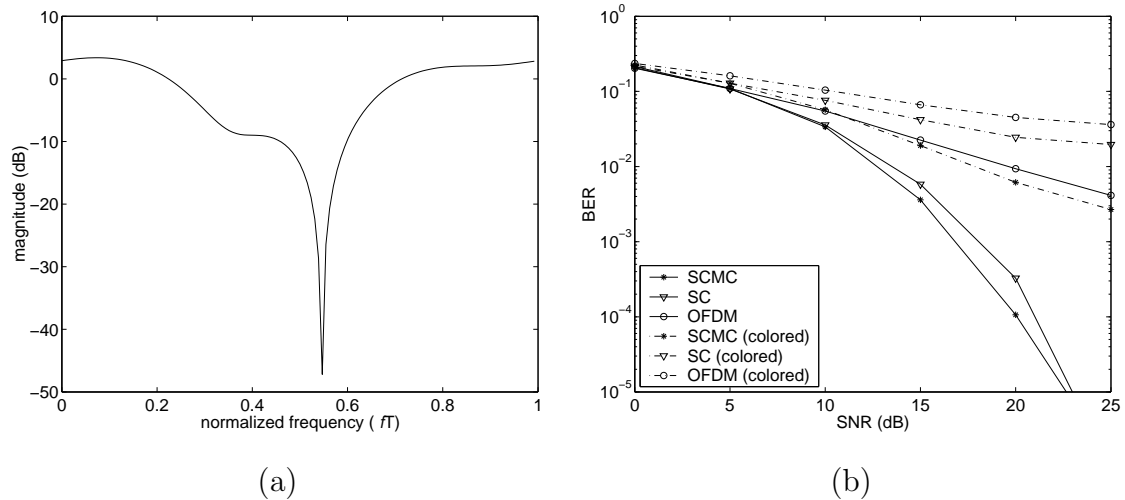


Figura 7.8: Exemplo 7.4.3: (a) Resposta em magnitude do canal; (b) BER em função da SNR para canal seletivo AWGN sem e com interferidor (*color*).

traz diversidade espectral ao sinal transmitido, o que propicia maiores chances de reconstrução frente a canal seletivos em frequência.

Alternativamente poderia ter sido utilizado o transceptor CMC baseado em DFT, apresentado na Subsecção 6.2.2.

7.4.4 Transceptor Redundante para Canal Complexo Variante no Tempo

Nesse exemplo, os transceptores MDFT e CMC MDFT são comparados com o transceptor OFDM utilizado no padrão IEEE 802.16[®], que opera em configuração ponto a multi-ponto. Tal comparação permitirá verificar que é possível atingir maior taxa de bits (BR ou *bit-rate*) com os transceptores propostos mencionados anteriormente. Isso se deve ao fato de que o 802.16[®] com camada física baseada em OFDM (MAN-OFDM PHY) [60] utiliza somente 200 dos 256 subcanais previstos para implementar o chamado efeito *brick wall*, que se traduz em rejeição significativa fora da banda passante. Portanto, utilizando um sistema mais seletivo em frequência do que o OFDM poderão ser utilizados mais subcanais.

O IEEE 802.16[®] prevê a operação em duas faixas amplas do espectro: 2–11,0 GHz, baseado em OFDM (MAN-OFDM PHY), e 10 – 66,0 GHz (MAN-SC PHY). No primeiro caso, como a frequência é mais baixa, múltiplos percursos são comuns,

e o sistema deve ser projetado para operar no modo fora-de-visada-direta (NLOS *non-line-of-sight*). No último caso, o sistema opera fundamentalmente em visada direta (LOS).

As constelações utilizadas variam desde PSK até 256 QAM [42, 60].

As especificações desse exemplo são

$$\begin{cases} M = 256 \\ r = 2 \text{ (redundância)} \\ P_s = 0 \text{ dB} \end{cases}, \quad (7.32)$$

resultando em $N = 258$.

O fator de sobreposição de blocos escolhido para o MDFT foi $\varrho = 2K = 8$ e fator de *roll-off* era $\rho = 1,0$.

Esse sistema não possui redundância e a mesma só é prevista com pré/pós codificação, o que resulta no sistema CMC MDFT. Por isso, ao comparar OFDM e MDFT, ambos os sistemas serão implementados sem redundância. A redundância, quando usada, era do tipo prefixo cíclico ou CP.

Foram realizadas um total de 100 iterações de Monte Carlo, assim como nos exemplos anteriores, resultando em mais de 10^8 bits transmitidos. Entretanto, esse exemplo se distingue dos demais por usar equalização do tipo DFE, com treinamento adaptativo baseado na técnica LMS [8, 9, 42], mais adequado para sistemas variantes no tempo do que um filtro de Wiener. A constelação usada era do tipo QPSK.

A primeira comparação a ser feita visa elucidar a vantagem dos transceptores tipo MFB, tal como o MDFT, no que tange a concentração espectral. Tal vantagem traduzir-se-á nesse exemplo em aumento da BR.

As Figuras 7.9(a) e (b) mostram as respostas em magnitude da primeira subbanda dos sistemas OFDM e MDFT, com escala de frequências normal e ampliada, respectivamente. Pela figura, o sistema OFDM apresenta atenuação de aproximadamente 40 dB na 28^a subbanda à direita (ou esquerda) da subbanda em questão. Essa mesma atenuação é obtida no sistema MDFT logo na 2^a subbanda. Sendo assim, ao invés de deixar $2 \times 28 = 56$ subbandas de guarda, como previsto no padrão IEEE 802.16[®] para o sistema OFDM, deixaremos apenas $2 \times 2 = 4$ subbandas de guarda para a mesma implementação com transceptor MDFT, o que permitirá um aumento de $52/200 \times 100 = 26 \%$ na BR do sistema, sem afetar o nível de atenuação

no final da faixa de guarda.

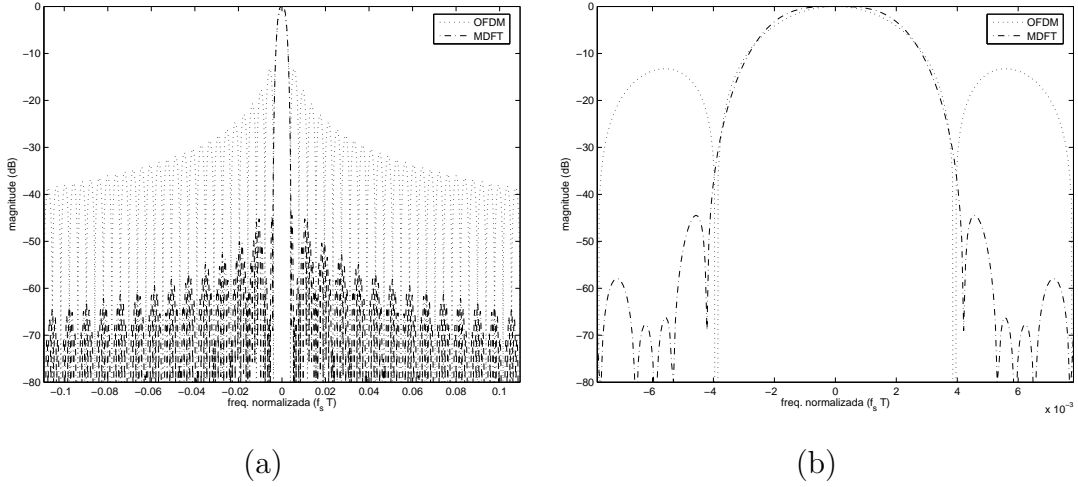


Figura 7.9: Exemplo 7.4.4: (a) Resposta em magnitude de uma das subbandas dos transceptores OFDM e MDFT (eixo de freqüências cobrindo a faixa de 56 subbandas); (b) Idem ao anterior, cobrindo a faixa de 4 subbandas.

As simulações de transmissão assumiram uma taxa de símbolos de 11,4 Mbaud/s, o que é previsto no padrão do 802.16[®] para um canal com largura de banda de 10,0 MHz [60]. Nessas condições, o cenário mais nocivo previsto ocorre no modelo de canal SUI-5 (*Stanford University Interim*) [61].

O canal sem fio ou *wireless* normalmente é caracterizado pelos seguintes efeitos (ver Seção 7.1): atenuação de percurso, múltiplos percursos, desvanescimento, espalhamento Doppler, e interferência co-canal e com canais adjacentes.

Os canais SUI é modelado pela distribuição de Rice [42, 55], o que significa haver uma componente fixa e uma componente variável (estocástica) para cada *tap* ou coeficiente do canal. Sendo assim, o fator k que determina a razão entre a potência da parte fixa e da parte estocástica é um dos parâmetros de configuração dos canais SUI e é considerado baixo para o SUI-5, que também apresenta alto espalhamento efetivo do atraso, dado por [61]

$$\tau_{rms} = \sum_{l=0}^L \frac{P_l}{P_t} \tau_l - \tau_{avg}^2, \quad (7.33)$$

onde P_l é a potência do *tap* associado ao atraso τ_l , $P_t = \sum_l P_l$, e $\tau_{avg} = \sum_l P_l \tau_l$.

O terreno no SUI-5 é do tipo acidentado, montanhoso e com árvores densas e pode ser estendido às áreas urbanas [61].

O modelo SUI-5 utilizado apresenta 3 *taps* (assim como todos os outros SUI), com atrasos $\tau_1 = 0,0 \mu s$, $\tau_2 = 4,0 \mu s$ e $\tau_3 = 10,0 \mu s$. A antena é direcional com abertura 30° , propiciando potências nos *taps* dadas por $P_1 = 0$, $P_2 = -11$ e $P_3 = -22$ (dB). Além disso, o espalhamento Doppler é o maior dentre todos os modelos SUI.

A Figura 7.10(a) apresenta a BER obtida para os sistemas OFDM e MDFT considerando todos os parâmetros discutidos anteriormente. A BER é dada em função da SNR, assim como em exemplos anteriores. Nessa simulação, o equalizador DFE usado como PCE possuía 2 *taps feedforward* e 1 *taps feedback*. Já a Figura 7.10(b) faz a mesma comparação, porém usando codificadores para equalizar a SIR (ver Subseção 6.2.2), o que transforma o sistema OFDM no SC e o MDFT no CMC MDFT. Nesse caso, observa-se a melhora no desempenho geral dos transceptores, assim como uma menor BER para o CMC MDFT, o que justifica seu uso.

O interferidor usado nas simulações tinha a mesma PSD da apresentada no exemplo da Subseção 7.4.2, com potência 16 dB maior do que a do sinal de interesse.

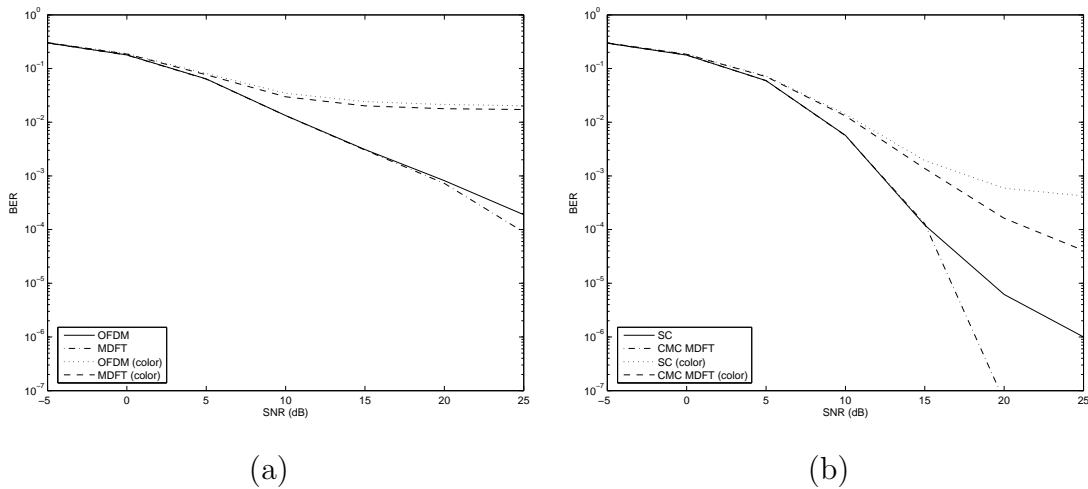


Figura 7.10: Exemplo 7.4.4: (a) BER para os sistemas OFDM e MDFT com e sem interferidor; (b) BER para os sistemas SC e CMC MDFT com e sem interferidor.

O efeito da equalização da SIR ao utilizar o par pré/pós codificador também pode ser obtido utilizando codificação de canal. Nesse caso seria usado o enfoque tradicional no domínio binário, que faz uso de *interleaver* e códigos corretores [42]. Mas, uma vez que o objetivo desse trabalho era desenvolver transceptores e não codificadores, não foi feito um estudo mais detalhado desse tema.

7.5 Conclusão

Esse capítulo apresentou resultados de simulações nos mais variados cenários, a fim de ressaltar o motivo pelo qual os transceptores FIR propostos foram desenvolvidos: reduzir efeitos nocivos de canais não-ideais, aumentar a concentração espectral do sinal transmitido (reduzindo interferência em bandas adjacentes), e principalmente minimizar o efeito degradante de interferidores de banda estreita e significativa potência.

Os resultados mostram que o ganho em termos de BER justifica o emprego dos transceptores propostos nas aplicações mais exigentes. Por exemplo, a quarta geração (4G) de telefonia móvel poderá desfrutar de tais benefícios.

Capítulo 8

Conclusão

O propósito dessa pesquisa de tese foi utilizar técnicas de otimização não-lineares para desenvolver bancos de filtros (FBs) paraunitários e/ou modulados (MFBs), que constituíram os blocos fundamentais de sistemas transceptores FIR para aplicação em sistemas de comunicação digital.

Foram utilizadas diferentes funções objetivo, e restrições não-lineares foram incorporadas para garantir distorção reduzida (ou nula) ao conjunto, resultando em reconstrução perfeita (PR ou *perfect reconstruction*) ou quase perfeita (NPR ou *near-perfect reconstruction*) do sinal transmitido.

As técnicas de projeto apresentadas traziam como inovação a versatilidade para conformação da resposta em frequência das subbandas do MFB, onde funções objetivo do tipo LS, minimax e WLS foram empregadas. Isso permitiu que a resposta em frequência do banco de filtros fosse modelada de acordo a necessidade da aplicação.

Uma característica importante das técnicas apresentadas é que a princípio não se fazia qualquer suposição sobre a resposta impulsional do canal, o que permitiu o emprego dos transceptores nas mais variadas situações, desde sistemas invariantes no tempo com canais pouco nocivos até condições severas de variação temporal da resposta do canal.

O Capítulo 4 apresentou técnicas de otimização de MFBs não redundantes, os quais seriam usados como blocos fundamentais no desenvolvimento dos transceptores. As técnicas sugeridas, além de inovarem na flexibilidade da modelagem espectral, permitem drástica redução na complexidade computacional do processo de

otimização, uma vez que foi elaborada uma forma simplificada e acurada de calcular as distorções na saída do FB, a fim de mantê-las negligíveis, evitando degradação do sinal de interesse. Dessa forma, tanto bancos do tipo NPR quanto PR poderiam ser desenvolvidos eficientemente. O resultado desses desenvolvimentos foi apresentado nos artigos [18, 45], assim como parte dele derivou da tese de mestrado [24].

Outra inovação foi a proposta do projeto do filtro protótipo dos bancos MFBs baseado na técnica FRM, apresentada no Capítulo 5, o que permitiu reduzir drasticamente o número de variáveis envolvidas no processo de otimização, permitindo realizar FBs com número de bandas elevado (maior do que 1024) e com pequenos valores de sobreposição ρ . Tal trabalho resultou no artigo [32].

Não bastando as vantagens inerentes da estrutura FRM, foram propostas na Seção 5.4 técnicas de projeto com restrições no domínio do tempo, o que reduziu ainda mais a complexidade computacional do processo de otimização. O artigo [33] apresentou tal desenvolvimento.

Uma vez tendo em mãos um conjunto completo de técnicas para o projeto de MFBs, foram sugeridas técnicas de inserção de redundância no Capítulo 6, visando aumentar a robustez do sistema frente a canais com memória. Um dos resultados [54] foi enviado para apreciação de uma revista da área de comunicações.

Em seguida foi desenvolvida uma técnica de projeto de FBs onde a única restrição era a paraunitariedade. Nesse caso, assumia-se o conhecimento da potência de cada *tap* do canal. Os estudos sobre a eficiência de tal método estão em andamento.

As ferramentas desenvolvidas foram utilizadas para otimizar FBs utilizados no Capítulo 7 com o intuito de confirmar o benefício de se utilizar sistemas transceptores seletivos em frequência. Para tanto, alguns testes comparativos foram realizados com outros transceptores, dentre eles o OFDM, o qual se mostrou sempre pior do que os transceptores propostos em termos da taxa de erros de bits.

Um exemplo prático bem realista envolveu a simulação do meio físico do IEEE 802.16[®], onde o MFB projetado mais uma vez apresentou desempenho superior aos transceptores convencionais, sem memória, em termos da BER e um taxa líquida de informação.

Por fim, ressalta-se que o ganho advindo do emprego dos transceptores aqui propostos se justifica em sistemas onde a preocupação final não é a complexidade,

mas sim a eficiência, porque os transceptores FIR têm complexidade computacional maior do que os transceptores sem memória.

Referências Bibliográficas

- [1] PRASAD, R., HARA, S., *Multicarrier Techniques for 4G Mobile Communications*. Boston, EUA, Artech House, 2003.
- [2] COUASNON, T. D., MONNIER, R., RAULT., J. B., “OFDM for digital TV broadcasting”, *Elsevier Science Signal Processing*, v. 39, 1994.
- [3] VAIDYANATHAN, P. P., *Multirate Systems and Filter Banks*. Englewood Cliffs, EUA, Prentice Hall, 1993.
- [4] DINIZ, P. S. R., da SILVA, E. A. B., NETTO, S. L., *Digital Signal Processing: System Analysis and Design*. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2001.
- [5] MALVAR, H. S., *Signal Processing with Lapped Transforms*. Norwood, EUA, Artech House, 1992.
- [6] VIHOLAINEN, A., STITZ, T. H., ALHAVA, J., *et al.*, “Complex modulated critically sampled filter banks based on cosine and sine modulation”. In: *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, pp. 833–836, Scottsdale, EUA, May 2002.
- [7] KARP, T., FLIEGE, N. J., “Modified DFT filter banks with perfect reconstruction”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, v. CAS-46, n. 11, pp. 1404–1414, November 1999.
- [8] DINIZ, P. S. R., *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*. 2 ed. Massachusetts, EUA, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [9] HAYKIN, S., *Adaptive Filter Theory*. 3 ed. Upper Saddle River, EUA, Prentice Hall, 1996.

- [10] CROCHIERE, R. E., RABINER, L. R., *Multirate Digital Signal Processing*. 1 ed. Englewood Cliffs, EUA, Prentice Hall, 1996.
- [11] WIEGAND, T., FLIEGE, N. J., “Equalizers for transmultiplexers in orthogonal multiple carrier data transmission”. In: *Proc. European Signal Processing Conference*, v. II, pp. 1211–1214, September 1996.
- [12] LIM, Y.-P., PHOONG, S.-M., “Minimum redundancy for ISI-free FIR filterbank transceivers”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 50, n. 4, pp. 842–853, April 2002.
- [13] SCAGLIONE, A., GIANNAKIS, G. B., BARBAROSSA, S., “Redundant filterbank precoders and equalizers: Unification and optimal designs”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 47, n. 7, pp. 1988–2006, July 1999.
- [14] LIM, Y.-P., PHOONG, S.-M., “ISI-Free FIR filterbank transceivers for frequency-selective channels”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 49, n. 11, pp. 2648–2658, November 2001.
- [15] SARAMÄKI, T., “A generalized class of cosine-modulated filter banks”. In: *Proc. TICSP Workshop on Transforms and Filter Banks*, pp. 336–365, Tampere, Finland, June 1998.
- [16] VIHOLAINEN, A., SARAMÄKI, T., RENFORS, M., “Cosine-modulated filter bank design for VDSL modems”. In: *Proc. IEEE Int. Workshop Intelligent Signal Processing and Communication Systems*, pp. 143–147, Melbourne, Australia, November 1998.
- [17] ALHAVA, J., VIHOLAINEN, A., “Implementation of nearly-perfect reconstruction cosine-modulated filter banks”. In: *Proc. FinSig*, pp. 222–226, Oulu, Finland, 1999.
- [18] FURTADO, M. B., DINIZ, P. S. R., NETTO, S. L., “Numerically efficient optimal design of cosine-modulated filter banks and transmultiplexers with peak-constrained least-squares behavior”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I*, v. 52, n. 3, pp. 597–608, March 2005.

- [19] VIHOLAINEN, A., SARAMÄKI, T., RENFORS, M., “Nearly-perfect reconstruction cosine-modulated filter bank design for VDSL Modems”. In: *Proc. IEEE Int. Conf. Electronics, Circuits and Systems*, pp. 373–376, Paphos, Greece, September 1999.
- [20] FARHANG-BOROJENY, B., LIN, L., “Analysis of post-combiner equalizers in cosine-modulated filter bank based transmultiplexer system”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 51, n. 12, pp. 3249–3262, December 2003.
- [21] FARHANG-BOROJENY, B., “Multicarrier modulation with blind detection capability using cosine modulated filter banks”, *IEEE Transactions on Communications*, v. 51, n. 12, pp. 2057–2070, December 2003.
- [22] MERTINS, A., “Frame analysis for biorthogonal cosine-modulated filterbanks”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 51, n. 1, pp. 172–181, January 2003.
- [23] BÖLCSKEI, H., HLAWATSCH, F., “Oversampled cosine modulated filter banks with perfect reconstruction”, *IEEE Transactions on Circuits and System - II*, v. 45, n. 8, pp. 1057–1071, August 1998.
- [24] FURTADO, M. B., *Otimização de Bancos de Filtros à Cosseno Modulado Usando Mascaramento de Resposta em Freqüência*. Tese de mestrado, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [25] ALHAVA, J., VIHOLAINEN, A., “Coefficient quantization in perfect-reconstruction cosine-modulated filter banks”. In: *Proc. European Sig. Processing Conference*, pp. 1747–1750, Tampere, Finland, September 2000.
- [26] MALVAR, H. S., “Extended lapped transforms: Properties, applications, and fast algorithms”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. 40, n. 11, pp. 2703–2714, November 1992.
- [27] VAIDYANATHAN, P. P., KOILPILLAI, R. D., “Cosine-modulated FIR filter banks satisfying perfect reconstruction”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. 40, n. 4, pp. 770–783, April 1992.

- [28] NARASIMHA, M. J., PETERSON, A. M., “On the computation of de discrete cosine transform”, *IEEE Trans. Commun.*, v. COM-26, n. 6, pp. 934–936, June 1978.
- [29] LUENBERGER, D. G., *Linear and Nonlinear Programming*. 2 ed. Menlo Park, EUA, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [30] “MATLAB Optimization Toolbox: User’s Guide”, The MathWorks Inc.: Portable Document Format (PDF) version available in the Internet, 2005, as part of MATLAB[®] documentation.
- [31] STRANG, G., *Linear Algebra and Its Applications*. 3 ed. Brooks/Cole Pub Co., 1988.
- [32] FURTADO, M. B., DINIZ, P. S. R., NETTO, S. L., *et al.*, “On the design of high-complexity cosine-modulated transmultiplexers based on the frequency-response masking approach”, *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, v. 52, n. 11, pp. 2413–2426, November 2005.
- [33] FURTADO, M. B., DINIZ, P. S. R., NETTO, S. L., *et al.*, “Time-domain constraints for the design of cosine-modulated and modified DFT filter banks with large number of bands and zero intersymbol interference”. In: *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, v. III, pp. 189–192, Vancouver, Canada, May 2004.
- [34] DINIZ, P. S. R., NETTO, S. L., “On WLS-Chebyshev FIR digital filters”, *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, v. 9, n. 3-4, pp. 155–168, 1999.
- [35] LIM., Y. C., “Frequency-response masking approach for the synthesis of sharp linear phase digital filters”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. CAS-33, pp. 357–364, April 1986.
- [36] LIM, Y. C., LIAN., Y., “The optimal design of one- and two- dimensional FIR filters using the frequency fespone masking technique”, *IEEE Transactions CAS II*, v. 40, pp. 88–95, 1993.

- [37] LIM, Y. C., LEE, J. H., CHEN, C. K., *et al.*, “A weighted least squares algorithm for quasi-equiripple FIR and IIR digital filter design”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. 40, n. 3, pp. 551–558, March 1992.
- [38] McCLELLAN, J. H., PARKS, T. W., RABINER, L. R., “A computer program for designing optimum FIR linear-phase digital filters”, *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, v. AU-21, pp. 506–526, December 1973.
- [39] ADAMS, J. W., WILLSON JR., A. N., “A new approach to FIR digital filters with fewer multipliers and reduced sensitivity”, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, v. CAS-30, pp. 277–283, May 1983.
- [40] BREGOVIĆ, R., SARAMÄKI, T., “Design and properties of two-channel FIR filter banks optimized by using peak-constrained least squares optimization criterion”. In: *Proc. 2nd Int. Workshop Spectral Methods and Multirate Signal Processing*, v. TICSP, pp. 33–39, Toulouse, France, September 2002.
- [41] NGUYEN, T. Q., “Near-perfect-reconstruction pseudo-QMF banks”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 42, n. 1, pp. 65–76, January 1994.
- [42] PROAKIS, J. G., *Digital Communications*. 3 ed. New York:NY, EUA, McGraw-Hill, 1995.
- [43] SARAMÄKI, T., NEUVO, Y., “A class of FIR Nyquist (N th-band) filters with zero intersymbol interference”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, v. CAS-34, n. 10, pp. 1182–1190, October 1987.
- [44] LAWSON, C., *Contribution to the theory of linear least maximum approximations*. Doctorate thesis, University of California, Los Angeles, 1961.
- [45] FURTADO, M. B., DINIZ, P. S. R., NETTO, S. L., “Optimization techniques for cosine-modulated filter banks based on the frequency-response masking approach”. In: *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, v. IV, pp. 13–16, Bangkok, Thailand, May 2003.
- [46] FURTADO, M. B., DINIZ, P. S. R., NETTO, S. L., “Optimized prototype filter based on the FRM approach for cosine-modulated filter banks”, *Circuits, Systems and Signal Processing*, v. 22, n. 2, pp. 193–210, March/April 2003.

- [47] BARCELLOS, L. C. R., *Mascaramento de Resposta em Freqüência: Otimização pelo Algoritmo WLS-Chebyshev e Implementação Eficiente em Bancos de Filtros Modulados por Cosseno*. Tese de mestrado, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, 2001.
- [48] DINIZ, P. S. R., de BARCELLOS, L. C. R., NETTO, S. L., “Design of high-resolution cosine-modulated transmultiplexers with sharp transition band”, *IEEE Transactions Signal Processing*, v. 52, n. 5, pp. 1278–1288, May 2004.
- [49] ROSENBAUM, L., LOWENBORG, P., JOHANSSON, M., “Cosine and sine modulated FIR filter banks utilizing the frequency-response masking approach”. In: *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, v. III, pp. 882–885, May 2003.
- [50] ALHAVA, J., VIHOLAINEN, A., RENFORS, M., “Efficient implementation of complex exponentially-modulated filter banks”. In: *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, v. IV, pp. 157–160, May 2003.
- [51] RIBEIRO, C. B., CAMPOS, M. L. R. D., DINIZ, P. S. R., “FIR equalizer with minimum redundancy”. In: *Proc. IEEE Intern. Conf. on Acoust. Speech and Signal Processing*, v. III, pp. 2673–2676, May 2002.
- [52] XIA, X.-G., “New precoding for intersymbol interference cancellation using nonmaximally decimated multirate filterbanks with ideal FIR equalizers”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 45, n. 10, pp. 2431–2441, October 1997.
- [53] LIM, Y.-P., PHOONG, S.-M., “BER minimized OFDM systems with channel independent precoders”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 51, n. 9, pp. 2369–2380, September 2003.
- [54] FURTADO, M. B., DINIZ, P. S. R., NETTO, S. L., “Redundant paraunitary FIR transceivers for single-carrier transmission over frequency selective channels with colored noise”, *IEEE Transactions on Communications*, Aceito em Setembro/2006 para publicação.
- [55] PAPOULIS, A., PILLAI, S. U., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. 4 ed. New York:NY, EUA, McGraw-Hill, 2002.

- [56] FALCONER, D., ARIYAVISITAKUL, S. L., BENYAMIN-SEEYAR, A., *et al.*, “Frequency domain equalization for single-carrier broadband wireless systems”, *IEEE Communications Magazine*, v. 40, n. 4, pp. 58–66, April 2002.
- [57] SMALLEY, D., “Equalization Concepts: A tutorial”, October 1994, Application Report SPRA140.
- [58] GOLDSTEIN, J. S., REED, I. S., SCHARF, L. L., “A multistage representation of the Wiener filter based on orthogonal projections”, *IEEE Trans. on Information Theory*, v. IT-44, pp. 2943–2959, March 1998.
- [59] PETER A. ZULCH, J. S. G., REED, L. S., “Comparison of reduced-rank signal processing techniques”. In: *Proc. 32nd Asilomar Conf. Signals, Syst. Comput.*, November 1998.
- [60] “IEEE Standards for Local and Metropolitan Area Networks. PART 16: Air Interface for Fixed Broadband Wireless Access Systems”, IEEE 802.16 Working Group: Portable Document Format (PDF) version available in the Internet, 2004, Doc. number: 802.16-2004.pdf.
- [61] “Channel models for fixed wireless applications”, IEEE 802.16 Working Group: Portable Document Format (PDF) version available in the Internet, 2001, Doc. number: 80216a-03_01.pdf.
- [62] DUTTA, S. R. K., VIDYASAGAR, M., “New algorithms for constrained min-max optimization”, *Mathematical Programming*, v. 13, pp. 140–155, 1977.
- [63] SCHARF, L. L., THOMAS, J. K., “Wiener filter in canonical coordinates for transform coding, filtering, and quantizing”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. 46, n. 3, March 1998.

Apêndice A

O Segundo Algoritmo de Dutta e Vidyasagar

Existem alguns algoritmos de otimização que se encaixam bem com o tipo de problema relacionado a uma OF e várias restrições. Dentre eles, os do tipo *sequential quadratic programming* parecem ser os que convergem mais rápido para um ponto próximo ao ótimo, realizando a otimização através de aproximações seqüenciais de segunda ordem [29]. Entretanto, um algoritmo de otimização eficiente consiste em, ao invés de resolver um problema de otimização de várias variáveis com restrições não lineares, inserir as mesmas em uma OF modificada (MOF), a qual, obviamente, também levará em conta a OF original. Dessa forma, podem ser resolvidos os problemas comuns encontrados no projeto de MFBs, seja com funções objetivo do tipo *Least-squares*, Minimax ou WLS [4], dadas as restrições $T_0(z)$ e $T_i(z)$, $i = 1, \dots, \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor$ apresentadas na Seção 2.7.1. Para isso, define-se a MOF $P(\Phi, \xi)$, onde Φ é o vetor das variáveis a serem ajustadas, que normalmente são os coeficientes do filtro protótipo.

A solução ótima que minimiza a MOF, baseada no princípio apresentado, pode ser obtida usando o segundo algoritmo de Dutta e Vidyasagar [15, 62], que leva em consideração apenas as restrições ativas e o desvio não tolerado da OF original em relação à um parâmetro calculado.

Usando o algoritmo de Dutta e Vidyasagar e considerando que a função de transferência seja calculada em um conjunto discreto de frequências $\omega_{j'} \in [\omega_r, \pi]$, $j' = 1, 2, \dots, J'$, a MOF $P(\Phi, \xi)$, com Φ sendo composto pelos coeficientes de $h_p(n)$,

$n = 0, 1, \dots, \frac{N_p-1}{2}$ ($N_p = 2KM - 1$), será dada por

$$P(\Phi, \xi) = \sum_{j' | f_{j'}(\Phi) > \xi} [f_{j'}(\Phi) - \xi]^2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor} \sum_{k' | d_{i_{k'}}(\Phi) > 0} W_i [d_{i_{k'}}(\Phi)]^2 \quad (\text{A.1})$$

com

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[h_p(0) \ h_p(1) \ \dots \ h_p\left(\frac{N_p-1}{2}\right) \right]^T \\ f_{j'}(\Phi) &= |H_p(\Phi, e^{j\omega_{j'}})| \quad j' = 1, 2, \dots, J' \\ d_{0_{k'}} &= \left| |T_0(e^{j\omega_{k'}})| - 1 \right| - \delta_1 \quad k' = 1, 2, \dots, K' \\ d_{i_{k'}} &= \left| |T_i(e^{j\omega_{k'}})| - \delta_2 \right| \quad k' = 1, 2, \dots, K' \quad i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

sendo que $J' \approx 20N_p$, $K' \approx 10K$, δ_1 e δ_2 são, respectivamente, os desvios permitidos para a transferência direta e para a distorção de *aliasing* do banco de filtros e são configurados pelo usuário, e W_i é o peso ou relevância que será dada a cada função de distorção $d_{i_{k'}}$. A variável ξ determina o nível mínimo de rejeição que o filtro protótipo deve apresentar na faixa de rejeição, e é ajustado de forma a permitir que a função $P(\Phi, \xi)$ chegue o mais próximo possível do valor zero. É importante ressaltar que as funções de distorção $d_{i_{k'}}$ são periódicas com periodicidade igual a $\frac{2\pi}{M}$ [15], de forma que só precisam ser calculadas no intervalo $\omega \in [0, \frac{2\pi}{M}]$. Sendo assim, deve-se escolher um conjunto discreto de frequências $\omega_{k'}$ de forma que

$$\begin{aligned} \omega_{k'} &= 0 & k' &= 1 \\ \omega_{k'} &= \frac{2\pi}{M} & k' &= K' \end{aligned}$$

Na equação (A.1), o primeiro termo contém todos os $f_{j'}(\Phi)$ que são maiores do que ξ , e o segundo termo contém todos os $d_{i_{k'}}$ que são maiores do que zero. O algoritmo de Dutta e Vidyasagar tenta buscar o menor valor de ξ , de forma que possa ser encontrado um vetor Φ que torne $P(\Phi, \xi)$ aproximadamente zero.

Os passos do segundo algoritmo de otimização Dutta e Vidyasagar são os seguintes:

- Passo 1: Ache um bom vetor de coeficientes iniciais $\hat{\Phi}_0$.
Ajuste $B_{low} = 0$, $B_{high} = 10^4$, $\xi_1 = B_{low}$, e $k = 1$.
- Passo 2: Ache $\hat{\Phi}$ que minimize $P(\Phi, \xi_k)$, usando $\hat{\Phi}_{k-1}$ como solução inicial.
- Passo 3: Calcule

$$M_{low} = \xi_k + \sqrt{P(\hat{\Phi}_k, \xi_k)/n} \quad (\text{A.2})$$

sendo n o número de $f_{j'}(\hat{\Phi}_k)$'s que são maiores do que ξ_k e

$$M_{high} = \xi_k + \frac{P(\hat{\Phi}_k, \xi_k)}{\sum_{j'|f_{j'}(\hat{\Phi}_k) > \xi_k} [f_{j'}(\hat{\Phi}_k) - \xi_k]} \quad (\text{A.3})$$

- Passo 4: Se $M_{high} \leq B_{high}$, então faça $\xi_{k+1} = M_{high}$. Caso contrário, faça $\xi_{k+1} = M_{low}$. Faça também $\xi_0 = \xi_{k+1} - \xi_k$.
- Passo 5: Ajuste $B_{low} = M_{low}$ e $S = P(\hat{\Phi}_k, \xi_k)$.
- Passo 6: Incremente k de uma unidade ($k = k + 1$).
- Passo 7: Ache $\hat{\Phi}_k$ que minimize $P(\Phi_k, \xi_k)$, usando $\hat{\Phi}_{k-1}$ como solução inicial.
- Passo 8: Se $\frac{(B_{high}-B_{low})}{B_{high}} \leq \epsilon_1$ ou $\frac{\xi_0}{\xi_k} \leq \epsilon_1$, então pare. Caso contrário, prossiga para o próximo passo.
- Passo 9: Se $P(\hat{\Phi}_k, \xi_k) > \epsilon_2$, então vá para o Passo 3. Caso contrário, se $S \leq \epsilon_3$, então pare. Se nada for verdade, então ajuste $B_{high} = \xi_k$, $S = 0$, $\xi_k = B_{low}$, e vá para o Passo 7.

No processo de otimização, o ajuste $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 10^{-14}$ parece funcionar bem.

No algoritmo de Dutta e Vidyasagar, os Passos 2 e 7 devem ser realizados com o auxílio de um algoritmo de otimização não-linear eficiente, tal como os *quasi-Newton* [29], que têm como referência os algoritmos Davidon-Fletcher-Powell (DFP) e o Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Esses algoritmos necessitam das derivadas parciais da OF com relação aos coeficientes a otimizar.

A eficiência do algoritmo de Dutta e Vidyasagar resulta do fato de que os Passos 2 e 7 de otimização são realizados sobre uma OF bem comportada, que se assemelha a uma função do tipo LS.

Apêndice B

Cálculo das Distorções e Respectivas Derivadas

A teoria desse capítulo é válida para todos os FBs estudados, ou seja, o CMFB, o SMFB e o MDFTFB, embora o desenvolvimento seja feito para o CMFB.

Os subfiltros de análise e síntese de um MFB são versões moduladas do filtro protótipo. No caso do CMFB, tais subfiltros são descritos por

$$H_m(z) = \alpha_m \beta_m^{N_p/2} H_p(z\beta_m) + \alpha_m^* \beta_m^{-N_p/2} H_p(z\beta_m^*) \quad (\text{B.1})$$

$$F_m(z) = \alpha_m^* \beta_m^{N_p/2} H_p(z\beta_m) + \alpha_m \beta_m^{-N_p/2} H_p(z\beta_m^*), \quad (\text{B.2})$$

onde $\alpha_m = e^{j(-1)^m \frac{\pi}{4}}$, $\beta_m = e^{-j(2m+1)\frac{\pi}{2M}}$, e * denota o operador de complexo conjugado.

Usando as equações (B.1) e (B.2), a equação (2.61) pode ser reescrita por

$$T_i(z) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[\beta_m^{N_p} H_p(z\beta_m) H_p(z e^{-\frac{j2\pi i}{M}} \beta_m) + \beta_m^{-N_p} H_p(z\beta_m^*) H_p(z e^{-\frac{j2\pi i}{M}} \beta_m^*) + \alpha_m^{*2} H_p(z\beta_m) H_p(z e^{-\frac{j2\pi i}{M}} \beta_m^*) + \alpha_m^2 H_p(z\beta_m^*) H_p(z e^{-\frac{j2\pi i}{M}} \beta_m) \right],$$

uma vez que $(\alpha_m^2 + \alpha_m^{*2}) = 0$ e $\alpha_m \alpha_m^* = 1$, $\forall m$.

Usando a equação (4.1) e a definição $W_i = e^{\frac{j2\pi i}{M}}$, obtém-se

$$T_i(z) = \sum_{n=0}^{2N_p} \left[a_i(n) z^{-n} \sum_{m=0}^{M-1} \left(\beta_m^{(N_p-n)} + \beta_m^{-(N_p-n)} \right) \right] + \sum_{n=0}^{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} \left[h_p(n) h_p(l) z^{-(n+l)} W_i^l \times \sum_{m=0}^{M-1} \left(\alpha_m^{*2} \beta_m^{(n-l)} + \alpha_m^2 \beta_m^{-(n-l)} \right) \right],$$

onde $a_i(n)$ é definido por

$$Z \{(W_i^n h_p(n)) * h_p(n)\} = \sum_{n=0}^{2N_p} a_i(n) z^{-n}, \quad (\text{B.3})$$

onde $(*)$ denota a convolução linear e $Z \{.\}$ denota a transformada z [4].

O lema seguinte é a chave para simplificar o processo de otimização.

Lema B.1

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= \sum_{m=0}^{M-1} \left(\beta_m^{(N_p-n)} + \beta_m^{-(N_p-n)} \right) \\ &= \begin{cases} 0, & (N_p - n) \neq 2Mc \\ 2M(-1)^c, & (N_p - n) = 2Mc, \quad c \in \mathbb{Z} \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma(n-l) &= \sum_{m=0}^{M-1} \left(\alpha_m^{*2} \beta_m^{(n-l)} + \alpha_m^2 \beta_m^{-(n-l)} \right) \\ &= \begin{cases} 0, & (n-l) \neq (2c+1)M \\ 2M(-1)^c, & (n-l) = (2c+1)M, \quad c \in \mathbb{Z} \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

a qual possui a propriedade $\Gamma(n-l) = -\Gamma(l-n)$.

Prova: A equação (B.4) foi demonstrada em [46], e é novamente desenvolvida aqui.

Da equação (2.60), e usando a definição de β_m , se obtém

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= \left[\sum_{m=0}^{M-1} \left(\beta_m^2 e^{\frac{j(2m+1)\pi n}{2M}} + \beta_m^{*2} e^{-\frac{j(2m+1)\pi n}{2M}} \right) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} e^{-\frac{j(N_p-n)(2m+1)\pi}{2M}} + \sum_{m=0}^{M-1} e^{\frac{j(N_p-n)(2m+1)\pi}{2M}}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

uma vez que $\beta_m^2 = e^{-\frac{j(2m+1)\pi N_p}{2M}}$. Se $(N_p - n)$ não é um múltiplo de $2M$, então

$$\begin{aligned}
\gamma(n) &= e^{-\frac{j(N_p-n)\pi}{2M}} \left[\frac{1 - e^{-j(N_p-n)\pi}}{1 - e^{-\frac{j(N_p-n)\pi}{M}}} \right] + e^{\frac{j(N_p-n)\pi}{2M}} \left[\frac{1 - e^{j(N_p-n)\pi}}{1 - e^{\frac{j(N_p-n)\pi}{M}}} \right] \\
&= e^{-\frac{j(N_p-n)\pi}{2}} \frac{\sin \left[\frac{(N_p-n)\pi}{2} \right]}{\sin \left[\frac{(N_p-n)\pi}{2M} \right]} + e^{\frac{j(N_p-n)\pi}{2}} \frac{\sin \left[\frac{(N_p-n)\pi}{2} \right]}{\sin \left[\frac{(N_p-n)\pi}{2M} \right]} \\
&= \frac{2 \cos \left[\frac{(N_p-n)\pi}{2} \right] \sin \left[\frac{(N_p-n)\pi}{2} \right]}{\sin \left[\frac{(N_p-n)\pi}{2M} \right]} \\
&= \frac{\sin [(N_p - n)\pi]}{\sin \left[\frac{(N_p-n)\pi}{2M} \right]}, \tag{B.7}
\end{aligned}$$

o que é nulo para todo n .

Entretanto, se $(N_p - n) = 2Mc$, com c inteiro, a equação (B.6) torna-se

$$\gamma(n) = \sum_{m=0}^{M-1} 2 \cos [c(2m+1)\pi] = \sum_{m=0}^{M-1} 2(-1)^c \tag{B.8}$$

resultando em

$$\gamma(n) = \begin{cases} 2M(-1)^c, & \text{para } (N_p - n) = 2Mc, \text{ } c \text{ inteiro} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} . \tag{B.9}$$

Já o caso geral na equação (B.5) é obtido reescrevendo $\Gamma(n-l)$ por [45]

$$\begin{aligned}
\Gamma(n-l) &= -je^{\frac{j\pi(n-l)}{2M}} \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m e^{\frac{jm\pi(n-l)}{M}} + je^{-\frac{j\pi(n-l)}{2M}} \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m e^{-\frac{jm\pi(n-l)}{M}} \\
&= -je^{\frac{j\pi(n-l)}{2M}} \left[\frac{1 - \left(-e^{\frac{j\pi(n-l)}{M}}\right)^M}{1 - \left(-e^{\frac{j\pi(n-l)}{M}}\right)} \right] + je^{-\frac{j\pi(n-l)}{2M}} \left[\frac{1 - \left(-e^{-\frac{j\pi(n-l)}{M}}\right)^M}{1 - \left(-e^{-\frac{j\pi(n-l)}{M}}\right)} \right] \\
&= -\frac{4 \cos \frac{\pi(n-l)}{2M} \sin \pi(n-l)}{2 \left(1 + \cos \frac{\pi(n-l)}{M}\right)} \\
&= -\frac{\sin \pi(n-l)}{\cos \frac{\pi(n-l)}{2M}} \tag{B.10}
\end{aligned}$$

Usando o Lema B.1, $T_i(z)$ pode ser simplificado por

$$\begin{aligned}
T_i(z) &= \sum_{n=0}^{2N_p} a_i(n) z^{-n} \gamma(n) + \sum_{n=0}^{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} h_p(n) h_p(l) z^{-(n+l)} W_i^l \Gamma(n-l) \\
&= \sum_{n=0}^{2N_p} a_i(n) z^{-n} \gamma(n) + \sum_{n=0}^{N_p} \sum_{l=n}^{N_p} \left[h_p(n) h_p(l) z^{-(n+l)} W_i^l \Gamma(n-l) + \right. \\
&\quad \left. h_p(n) h_p(l) z^{-(n+l)} W_i^n \Gamma(l-n) \right] \\
&= \sum_{n=0}^{2N_p} a_i(n) z^{-n} \gamma(n), \tag{B.11}
\end{aligned}$$

uma vez que

$$\sum_{n=0}^{N_p} \sum_{l=n}^{N_p} h_p(n) h_p(l) z^{-(n+l)} W_i^l \Gamma(n-l) = - \sum_{n=0}^{N_p} \sum_{l=n}^{N_p} h_p(n) h_p(l) z^{-(n+l)} W_i^n \Gamma(n-l).$$

Dessa forma, todas as funções $T_i(z)$ podem ser calculadas usando essa simplificação, convoluindo o filtro protótipo com suas versões moduladas, como segue:

$$T_i(z) = Z \{ (W_i^n h_p(n) * h_p(n)) \gamma(n) \}, \tag{B.12}$$

para $i = 0, 1, \dots, (M-1)$.

Devido à simetria na função de modulação, segue que $T_i(z) = T_{M-i}(z)$. Portanto, as funções $T_i(z)$ devem ser calculadas simplesmente para $i = 0, 1, \dots, N_c$, onde $N_c = \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor$.

■

Se o filtro protótipo tem fase linear, então as funções $T_i(z)$ podem ser analiticamente escritas por

$$T_i(z) = z^{-N_p} 2M \left[a_i(N_p) + \sum_{l=1}^{K-1} a_i(N_p - 2Ml) (-1)^l (z^{2Ml} + z^{-2Ml}) \right] \tag{B.13}$$

As respostas impulsiais $a_i(n)$ usadas para o cômputo das transferências direta ($T_0(z)$) e de *aliasing* ($T_i(z)$), $i = 0, \dots, \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$, têm aqui as suas derivadas em relação aos coeficientes do filtro protótipo $h_p(n)$ deduzidas, uma vez que essas últimas são usadas para calcular o vetor gradiente das restrições relacionadas com $T_0(z)$ e $T_i(z)$.

A resposta impulsional $a_i(n)$ é dada por

$$a_i(m) = \sum_{\tau=0}^m e^{\frac{j2\pi i \tau}{M}} h_p(m-\tau) h_p(\tau) \quad 0 \leq m \leq 2N_p \quad \text{e} \quad 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor$$

o que resulta nas duas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
a_i(N_p - m) &= \sum_{\tau=0}^{N_p-m} e^{\frac{j2\pi i\tau}{M}} h_p(N_p - m - \tau) h_p(\tau) \\
&= \sum_{\tau=0}^{N_p-m} e^{\frac{j2\pi i\tau}{M}} h_p(m + \tau) h_p(\tau) \\
a_i(N_p + m) &= \sum_{\tau=0}^{N_p+m} e^{\frac{j2\pi i\tau}{M}} h_p(N_p + m - \tau) h_p(\tau) \\
&= \sum_{\tau=n}^{N_p} e^{\frac{j2\pi i\tau}{M}} h_p(-m + \tau) h_p(\tau) \\
&= e^{\frac{j2\pi im}{M}} \sum_{u=0}^{N_p-n} e^{\frac{j2\pi iu}{M}} h_p(u) h_p(u + m)
\end{aligned}$$

fazendo $u = \tau - n$ na última equação .

Do desenvolvimento anterior resultam as relações da equação (B.14).

$$\begin{aligned}
a_i(N_p + m) &= e^{\frac{j2\pi im}{M}} a_i(N_p - m) \\
a_i(2N_p - m) &= e^{-\frac{j2\pi i(m+1)}{M}} a_i(m)
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Essa última equação traz uma importante propriedade:

$$a_i(N_p + 2Ml) = a_i(N_p - 2Ml)$$

As derivadas parciais de $a_i(m)$ em relação à $h_p(n)$ ficam como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_i(m)}{\partial h_p(n)} &= \sum_{\tau=0}^m \left(e^{\frac{j2\pi i\tau}{M}} \frac{\partial h_p(m - \tau)}{\partial h_p(n)} h_p(\tau) + e^{\frac{j2\pi i\tau}{M}} \frac{\partial h_p(\tau)}{\partial h_p(n)} h_p(m - \tau) \right) \\
&= e^{\frac{j2\pi i(m-n)}{M}} h_p(m - n) + e^{\frac{j2\pi i(m+n+1)}{M}} h_p(m + n - N_p) + \\
&\quad e^{\frac{j2\pi in}{M}} h_p(m - n) + e^{-\frac{j2\pi i(n+1)}{M}} h_p(m + n - N_p) \\
&= 2e^{\frac{j\pi im}{M}} \times \\
&\quad \left(\cos \frac{\pi i(m - 2n)}{M} h_p(m - n) + \cos \frac{\pi i(m + 2n + 2)}{M} h_p(m + n - N_p) \right)
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Da equação (B.15) são obtidos os termos $\frac{\partial a_i(N_p)}{\partial h_p(n)}$ e $\frac{\partial a_i(N_p-2Ml)}{\partial h_p(n)}$, usados na equação (4.33) para obter a equação (4.34):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_i(N_p)}{\partial h_p(n)} &= 2e^{-\frac{j\pi i}{M}} \left(\cos \frac{\pi i(2n + 1)}{M} h_p(N_p - n) + \cos \frac{\pi i(2n + 1)}{M} h_p(n) \right) \\
&= 4e^{-\frac{j\pi i}{M}} \cos \frac{\pi i(2n + 1)}{M} h_p(n)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_i(N_p - 2Ml)}{\partial h_p(n)} &= 2e^{-\frac{j\pi i}{M}} \times \\
&\quad \left(\cos \frac{\pi i(2n+1)}{M} h_p(N_p - 2Ml - n) + \cos \frac{\pi i(2n+1)}{M} h_p(n - 2Ml) \right) \\
&= 2e^{-\frac{j\pi i}{M}} \cos \frac{\pi i(2n+1)}{M} (h_p(n + 2Ml) + h_p(n - 2Ml)).
\end{aligned}$$

Como resultado, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_{T_i}(\omega)}{\partial h_p(n')} &= 8M \cos \frac{\pi i(2n'+1)}{M} \times \\
&\quad \left[h_p(n') + \sum_{l=1}^{K-1} [h_p(n' + 2Ml) + h_p(n' - 2Ml)] \cos(2M\omega + \pi)l \right],
\end{aligned} \tag{B.16}$$

com $h_p(n') = 0$ para $n' < 0$ e $n' > N_p$.

Esse apêndice apresentou o cômputo simplificado das distorções e respectivas derivadas, que são necessárias ao processo de otimização com algoritmos do tipo QP e SQP.

Apêndice C

Reconstrução Perfeita com Estruturas Treliça

Aqui é definida a técnica de reconstrução perfeita para bancos de filtros modulados, a qual é obtida se as $2M$ componentes polifásicas do filtro protótipo $H_p(z)$, com ordem $N_p = 2KM - 1$, satisfizerem a condição dada pela equação (2.87). Entretanto, uma vez que o filtro protótipo é simétrico, essas restrições podem ser reduzidas pela metade, porque elas são únicas apenas para $j = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}$, se M é ímpar, ou $j = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1$, se M é par [27].

Se o filtro $H_p(z)$ é simétrico, então suas componentes polifásicas possuem a relação expressa na equação (C.1).

$$E_j(z) = z^{-(K-1)} E_{2M-j}(z^{-1}) \quad j = 0, \dots, 2M - 1 \quad (\text{C.1})$$

Uma forma natural de forçar as componentes polifásicas $E_j(z)$, a atenderem a condição de reconstrução perfeita é utilizando estruturas treliça [15, 27], ou simplesmente treliça, cujas fórmulas recursivas de construção são dadas por

$$\begin{aligned} E_j^{(k)}(z) &= s_{jk} E_j^{(k-1)}(z) + c_{jk} z^{-1} E_{j+M}^{(k-1)}(z) \\ E_{j+M}^{(k)}(z) &= c_{jk} E_j^{(k-1)}(z) - s_{jk} z^{-1} E_{j+M}^{(k-1)}(z) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

com $E_j^0(z) = s_{j0}$ e $E_{j+M}^0(z) = c_{j0}$, $j = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor$ (M par ou ímpar), $k = 0, \dots, K - 1$, o que corresponde a K seções treliça para gerar duas componentes

polifásicas, e

$$c_{jk} = \cos \phi_{jk}$$

$$s_{jk} = \sin \phi_{jk}$$

A Figura C.1 mostra uma estrutura treliça gerando duas componentes polifásicas para a construção do filtro protótipo $H_p(z)$, a saber: $E_j(z)$ e $E_{j+M}(z)$. O ganho de entrada da estrutura é $c = \frac{1}{\sqrt{2M}}$.

A implementação das componentes polifásicas do filtro protótipo $H_p(z)$ através de estruturas treliça, para a obtenção de bancos modulados com reconstrução perfeita, reduz o número de variáveis a otimizar, o qual será dado por $K \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$, muito menor do que KM , o que corresponde à metade do número de coeficientes independentes de um filtro FIR simétrico de comprimento $2KM$. Então, utilizando estruturas treliça, ao invés de se otimizar diretamente os coeficientes do filtro protótipo $h_p(n)$, otimiza-se os coeficientes do vetor de ângulos Φ , dado por

$$\Phi = \left[\phi_{00} \ \phi_{10} \ \cdots \ \phi_{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor 0} \ \phi_{01} \ \phi_{11} \ \cdots \ \phi_{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor 1} \ \cdots \ \phi_{0(K-1)} \ \phi_{1(K-1)} \ \cdots \ \phi_{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor (K-1)} \right]^T$$

Os algoritmos de otimização normalmente irão requerer informações de gradiente. Sendo assim, todas as derivadas parciais que se referirem diretamente aos coeficientes do filtro protótipo $h_p(n)$, $n = 0, 1, \dots, N_p$, poderão ser calculadas realizando a substituição

$$\frac{\partial f}{\partial h_p(n)} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial h_p(n)} \frac{\partial h_p(n)}{\partial \phi_{jk}} \quad (\text{C.3})$$

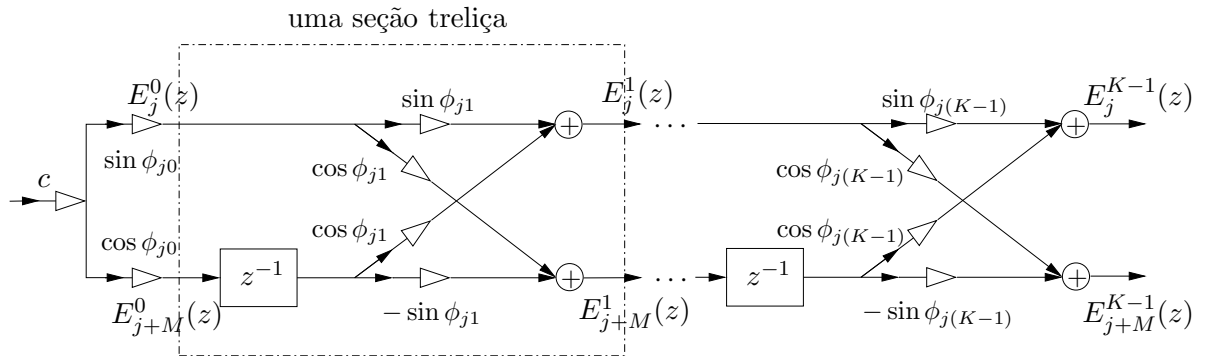


Figura C.1: Estrutura treliça.

sendo f uma função genérica dependente de $h_p(n)$.

É importante observar que

$$\frac{\partial h_p(n)}{\partial \phi_{jk}} = \begin{cases} h_p(n)|_{\phi_{jk}+\pi/2} & \text{se } n = j + M + Ml \quad l = -1, 0, 1, \dots, (2K - 2) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

com $j = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor$, e onde $h_p(n)|_{\phi_{jk}+\pi/2}$ é o coeficiente $h_p(n)$ obtido da treliça ao substituir ϕ_{jk} por $\phi_{jk} + \pi/2$.

Ainda a respeito de processos de otimização com estruturas treliça, uma importante observação que deve ser feita está ligada aos ângulos iniciais que devem ser ajustados na estrutura, os quais irão formar uma solução inicial para o problema de otimização. Uma boa inicialização dos ângulos consiste em torná-los todos iguais a zero [15], o que irá gerar um filtro protótipo com todos os coeficientes nulos, com exceção dos dois coeficientes centrais, que terão valores iguais ao ganho da estrutura treliça, ou seja, iguais a c .

Apêndice D

Filtro de Wiener Complexo

O filtro de Wiener complexo encontra aplicações onde os sinais provenientes da observação do processo, e os sinais de referência ou desejados, são complexos. Isso ocorre, por exemplo, quando sinais físicos com diferença de fase, tais como as componentes I (*in-phase*) e Q (*quadrature*) de sinais de telecomunicações modulados por cosseno e seno, estão presentes no sistema.

D.1 Teoria Básica

Por simplicidade, inicialmente será descrito o filtro de Wiener para sinais reais, e posteriormente desenvolvido o filtro para sinais complexos. Dessa forma, assumindo que o sinal real escalar desejado é dado por $d(n)$, e que o vetor de observações do processo é dado por $\mathbf{x}(n)$ (também real), o erro na saída do filtro de Wiener, cujos coeficientes são representados por \mathbf{w} , é dado por

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n) \quad (\text{D.1})$$

Assim, se omitido por simplicidade o número de amostra n , o erro quadrático na saída do sistema é dado por

$$\begin{aligned} |e|^2 &= ee^H \\ &= (d - \mathbf{w}^H \mathbf{x})(d^H - \mathbf{x}^H \mathbf{w}) \\ &= dd^H - d\mathbf{x}^H \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{x}d^H + \mathbf{w}^H \mathbf{x}\mathbf{x}^H \mathbf{w} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

E o erro médio quadrático (MSE ou *mean square error*), definido como o valor esperado do erro quadrático ao longo das observações do processo, é dado por

$$\begin{aligned}
\xi &= E[|e|^2] \\
&= \sigma_d^2 - \mathbf{p}^H \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{p} + \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \\
&= \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^H \mathbf{p} + \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}
\end{aligned} \tag{D.3}$$

onde

$$\begin{aligned}
\sigma_d^2 &= E[dd^H] \\
\mathbf{p} &= E[\mathbf{x}d^H] \\
\mathbf{R}_{xx} &= E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Para minimizar o erro MSE, tem-se que

$$\begin{aligned}
0 &= -2\mathbf{p} + \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \\
\therefore \mathbf{w} &= 1/2 \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}
\end{aligned} \tag{D.5}$$

D.2 Processos Complexos

Agora, assumindo que d é complexo, assim como as observações do processo \mathbf{x} , ou seja, $d = d_r + jd_i$ e $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + j\mathbf{x}_i$, o erro quadrático pode ser desmembrado em suas componentes real e imaginária. Dessa forma

$$\begin{aligned}
e_r &= d_r - \mathbf{w}_r^T \mathbf{x}_r - \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}_i \\
e_i &= d_i - \mathbf{w}_r^T \mathbf{x}_i + \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}_r
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Por consequência, como o MSE é dado por

$$\begin{aligned}
E[ee^H] &= E[e_r e_r^T + e_i e_i^T] \\
&= \xi_r + \xi_i
\end{aligned} \tag{D.7}$$

basta encontrar as contribuições das partes real e imaginária do erro quadrático, o que é feito como segue

$$\begin{aligned}
\xi_r &= E[e_r e_r^T] \\
&= (d_r - \mathbf{w}_r^T \mathbf{x}_r - \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}_i)(d_r^T - \mathbf{x}_r^T \mathbf{w}_r - \mathbf{x}_i^T \mathbf{w}_i) \\
&= \sigma_{d_r}^2 - \mathbf{p}_r^T \mathbf{w}_r - \mathbf{p}_{ir}^T \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_r^T \mathbf{p}_r + \mathbf{w}_r^T \mathbf{R}_r \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_r^T \mathbf{R}_{ri} \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^T \mathbf{p}_{ir} \\
&\quad + \mathbf{w}_i^T \mathbf{R}_{ir} \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{w}_i
\end{aligned} \tag{D.8}$$

onde

$$\begin{aligned}
\sigma_{d_r}^2 &= E[d_r d_r^T] \\
\mathbf{p}_{ri} &= E[\mathbf{x}_r d_i^T] \\
\mathbf{p}_{ir} &= E[\mathbf{x}_i d_r^T] \\
\mathbf{p}_r &= E[\mathbf{x}_r d_r^T] \\
\mathbf{p}_i &= E[\mathbf{x}_i d_i^T] \\
\mathbf{R}_{ri} &= E[\mathbf{x}_r \mathbf{x}_i^T] \\
\mathbf{R}_{ir} &= E[\mathbf{x}_i \mathbf{x}_r^T] \\
\mathbf{R}_r &= E[\mathbf{x}_r \mathbf{x}_r^T] \\
\mathbf{R}_i &= E[\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T]
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Agora, repetindo todo o desenvolvimento, porém para o erro da parte imaginária, ou ξ_i , tem-se

$$\begin{aligned}
\xi_i &= E[e_i e_i^T] \\
&= \sigma_{d_i}^2 - \mathbf{p}_i^T \mathbf{w}_r + \mathbf{p}_{ri}^T \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_r^T \mathbf{p}_i + \mathbf{w}_r^T \mathbf{R}_i \mathbf{w}_r - \mathbf{w}_r^T \mathbf{R}_{ir} \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_i^T \mathbf{p}_{ri} \\
&\quad - \mathbf{w}_i^T \mathbf{R}_{ri} \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_i^T \mathbf{R}_r \mathbf{w}_i
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Para minimizar $\xi = \xi_r + \xi_i$, faz-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{w}_r} &= -2\mathbf{p}_r + 2\mathbf{R}_r \mathbf{w}_r + 2\mathbf{R}_{ri} \mathbf{w}_i + -2\mathbf{p}_i + 2\mathbf{R}_i \mathbf{w}_r + 2\mathbf{R}_{ir} \mathbf{w}_i = 0 \\
\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{w}_i} &= -2\mathbf{p}_{ir} + 2\mathbf{R}_{ir} \mathbf{w}_r + 2\mathbf{R}_i \mathbf{w}_i + 2\mathbf{p}_{ri} - 2\mathbf{R}_{ri} \mathbf{w}_r + 2\mathbf{R}_r \mathbf{w}_i = 0
\end{aligned} \tag{D.11}$$

ou, em forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_r + \mathbf{R}_i & \mathbf{R}_{ri} - \mathbf{R}_{ir} \\ \mathbf{R}_{ir} - \mathbf{R}_{ri} & \mathbf{R}_r + \mathbf{R}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_r \\ \mathbf{w}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_r + \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_{ir} - \mathbf{p}_{ri} \end{bmatrix} \tag{D.12}$$

o que simplesmente se reduz a

$$\mathbf{R} \mathbf{w} = \mathbf{p} \tag{D.13}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= E[\mathbf{x} \mathbf{x}^H] \\
\mathbf{p} &= E[\mathbf{x} \mathbf{d}^H]
\end{aligned} \tag{D.14}$$

Dado o desenvolvimento anterior, conclui-se que o filtro ótimo que minimiza o MSE para sinais complexos é dado por

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \quad (\text{D.15})$$

D.3 Desenvolvimento Simplificado

Um outro desenvolvimento do filtro de Wiener para sinais complexos pode ser obtido a partir de algumas definições básicas, tais como a interpretação da derivada parcial de uma função complexa genérica f em relação a um vetor complexo \mathbf{w} .

Definindo $\mathbf{w} = \mathbf{w}_r + j\mathbf{w}_i$ e assumindo que f é função desta variável, ou seja, $f(\mathbf{w})$, pode-se definir

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}_r} + j \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}_i} \quad (\text{D.16})$$

Seja,

$$\begin{aligned} g &= f f^H \\ f &= \mathbf{w}^H \mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Então,

$$\begin{aligned} g &= \mathbf{w}^H \mathbf{x} \mathbf{x}^H \mathbf{w} \\ E[g] &= \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[g]}{\partial \mathbf{w}} &= E \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} f^H + f \frac{\partial f^H}{\partial \mathbf{w}} \right] \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{w}^H}{\partial \mathbf{w}_r} + j \frac{\partial \mathbf{w}^H}{\partial \mathbf{w}_i} \right) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}_r} + j \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}_i} \right) \\ &= (\mathbf{I} + j(-j\mathbf{I})) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx})^T (\mathbf{I} + j(j\mathbf{I})) \\ &= 2\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}} = 2\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}, \quad (\text{D.20})$$

e também

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{w}^H}{\partial \mathbf{w}} &= 2\mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{D.21}$$

Sendo assim, se

$$e = d - \mathbf{w}^H \mathbf{x},\tag{D.22}$$

então

$$\begin{aligned}\xi &= E[ee^H] \\ &= \sigma_d^2 - \mathbf{p}^H \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{p} + \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}\end{aligned}\tag{D.23}$$

Portanto, para obter o mínimo MSE

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{w}} &= -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} = 0 \\ \therefore \mathbf{w} &= \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}\end{aligned}\tag{D.24}$$

Agora, sendo o sinal desejado um vetor, ou \mathbf{d} , o filtro deve ser representado matricialmente por \mathbf{W} e, como a saída do sistema pode ser tratada de forma independente, o erro médio mínimo do sistema é obtido quando cada saída tem erro médio mínimo, o que permite escrever

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{P}\tag{D.25}$$

onde

$$\mathbf{P} = E[\mathbf{x} \mathbf{d}^H]\tag{D.26}$$

Apêndice E

Filtragem de Wiener

Multi-Estágios

Dado um processo estocástico de referência $d_0(n)$ e um vetor de observações $\mathbf{x}_0(n)$ desse processo, adicionado à ruído e correlacionado, o filtro de Wiener que visa minimizar o erro entre o sinal de referência e a projeção do vetor de observações é dado por (vêr Apêndice D)

$$\mathbf{w}_{x_0} = \mathbf{R}_{x_0}^{-1} \mathbf{p}_{x_0 d_0} \quad (\text{E.1})$$

onde \mathbf{R}_{x_0} é a matriz de correlação do vetor de dados $\mathbf{x}_0(n)$, e $\mathbf{p}_{x_0 d_0}$ é a correlação cruzada deste vetor com o processo $d_0(n)$.

Já o mínimo erro quadrático médio resultante na saída do sistema é dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= E[|\epsilon_0(n)|^2] \\ &= \sigma_{d_0}^2 - \mathbf{p}_{x_0 d_0}^H \mathbf{R}_{x_0}^{-1} \mathbf{p}_{x_0 d_0} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

onde $\sigma_{d_0}^2$ é a variância do sinal $d_0(n)$.

A matriz de correlação dos dados na entrada do filtro de *Wiener* pode ser escrita na forma

$$\mathbf{R}_{x_0} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H \quad (\text{E.3})$$

onde a matriz \mathbf{V} é composta pelos N autovetores \mathbf{V}_i de \mathbf{R}_{x_0} e $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal contendo os autovalores λ_i , $i = 1, \dots, N$ [31].

A técnica de redução de posto baseada em componentes principais permite descartar, para um posto $p = N - l$, os l autovetores correspondentes aos menores

autovalores da matriz de correlação do processo. Dessa forma, a dimensão do vetor \mathbf{x}_0 poderá ser reduzida através da transformação

$$\mathbf{T}\mathbf{x}_0 = ([\mathbf{V}_i]_{i=1}^p)^H \mathbf{x}_0, \quad (\text{E.4})$$

gerando um vetor de dimensão $p \times 1$. O vetor de pesos \mathbf{w}_{x_0} deverá sofrer a mesma transformação.

Usando a equação (E.3), o mínimo erro quadrático médio da equação (E.2) é reescrito como

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \sigma_{d_0}^2 - \mathbf{p}_{x_0 d_0}^H \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{V}^H \mathbf{p}_{x_0 d_0} \\ &= \sigma_{d_0}^2 - \sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{V}_i^H \mathbf{p}_{x_0 d_0}|^2}{\lambda_i}, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

o que claramente varia em função do posto do sistema.

A técnica MSWF (*multi-stage Wiener filtering*) [58] permite redução de posto sem levantar estimativa da matriz \mathbf{R}_{x_0} , e muito menos de sua inversa, o que tende a ser computacionalmente mais eficiente. Nesta técnica, o filtro de *Wiener* é decomposto em vários estágios, onde são calculadas apenas correlações cruzadas $\mathbf{p}_{x_i d_i}$ entre vetores de dados de entrada de dimensão cada vez mais reduzida \mathbf{x}_i ($N - i + 1$), $i = 1, \dots, N$, com sinais desejados d_i . Esses processos são calculados usando a transformação

$$\begin{bmatrix} d_i(n) \\ \mathbf{x}_i(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_i^H \\ \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{i-1}(n) \\ \mathbf{x}_{i-1}(n) \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{E.6})$$

sendo a matriz \mathbf{B}_i calculada em função do vetor \mathbf{h}_i por

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \psi_1 & -\psi_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & -\psi_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \psi_{N-2} & -\psi_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \psi_{N-1} & -\psi_N \end{bmatrix}, \quad (\text{E.7})$$

onde $\psi_l = \frac{1}{h_{i_l}}$, $l = 1, \dots, N_a$, sendo h_{i_l} o l -ésimo elemento do vetor \mathbf{h}_i . Outras transformações são possíveis, desde que mantenham a característica da ortogonalidade [58].

O filtro de *Wiener* é calculado iterativamente a partir de seções como as da Figura E.1, usando o método descrito a seguir [58]:

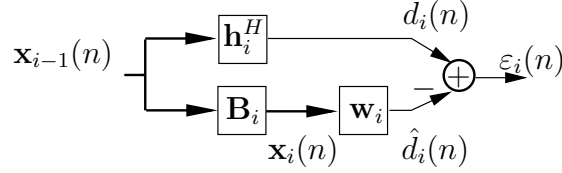


Figura E.1: Uma seção do MSWF.

FORWARD

1. começe com $i = 0$.
2. calcule $\mathbf{p}_{x_i d_i} = E[\mathbf{x}_i(n)d_i^*(n)]$.
3. faça $\delta_{i+1} = \sqrt{\mathbf{p}_{x_i d_i}^H \mathbf{p}_{x_i d_i}}$ e $\mathbf{h}_{i+1} = \frac{\mathbf{p}_{x_i d_i}}{\delta_{i+1}}$.
4. determine $\mathbf{B}_{i+1} = \text{null}\{\mathbf{h}_{i+1}\}$.
5. calcule $d_{i+1}(n) = \mathbf{h}_{i+1}^H \mathbf{x}_i(n)$ e $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{B}_{i+1} \mathbf{x}_i(n)$.
6. incremente i e vá para o Passo 2 se $i < N - 1$.

Por fim, faça $d_N(n) = \mathbf{x}_{N-1}(n) = \epsilon_N(n)$.

BACKWARD

1. inicialmente, determine $\epsilon_N = E[|\mathbf{x}_{N-1}(n)|^2] = \sigma_{d_N}^2$, $\delta_N = \mathbf{p}_{x_{N-1} d_{N-1}}$, e faça $i = N$.
2. faça $\omega_i = \epsilon_i^{-1} \delta_i$, $i = i - 1$, $\epsilon_i(n) = d_i(n) - \omega_{i+1}^* \epsilon_{i+1}(n)$ e $\epsilon_i = \sigma_{d_i}^2 - \epsilon_{i+1}^{-1} |\delta_{i+1}|^2$.
3. se $i = 0$, pare. Caso contrário, vá para o Passo 2.

Um método que também pode ser utilizado na redução de posto é o baseado em filtro de *Wiener* em coordenadas canônicas, ou CCWF [63]. Entretanto, este método é interessante quando o sinal desejado $d_0(n)$ é um vetor e não um escalar. Neste último caso, as coordenadas do sistema serão transformadas de forma que o vetor

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{R}_{x_0}^{-1/2} \frac{\mathbf{p}_{x_0 d_0}}{\mathbf{p}_{x_0 d_0}^H \mathbf{p}_{x_0 d_0}} \mathbf{x}_0(n) \quad (\text{E.8})$$

possua $\mathbf{v}_1(n)$ como único elemento correlacionado com o sinal desejado (neste caso também transformado para $u(n) = \frac{1}{\sigma_{d_0}}$). Então, reduzindo o posto até o valor $p = 1$ não afetará a resposta do sistema. Dessa forma, o método CCWF, para esse problema, se traduzirá no filtro de *Wiener* com posto completo.